GERHARD HEINZMANN

Raisonnement mathématique et art

Philosophia Scientiæ, tome 2, nº 1 (1997), p. 131-145
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1997__2_1_131_0>

Raisonnement mathématique et art

Gerhard Heinzmann
Département de philosophie / ACERHP
Université Nancy 2

Philosophia Scientiae, 2 (1), 1997, 131-145

Résumé. Y-a-t-il place pour un critère non-logique de rigueur en mathématiques ? En interprétant la pensée de Poincaré à la lumière des textes de Helmholtz et de Peirce, on se propose de reconnaître dans le raisonnement mathématique de Poincaré un caractère esthétique — au sens goodmanien du terme — qui pourrait satisfaire à l'exigence en question.

Abstract. The main thesis of this paper is that, interpreted in the light of reflections of Helmholtz and Peirce, one can found in mathematical reasoning of Poincaré a non logical symptom for mathematical rigour that may be aesthetic in Goodman's sense.

1. Introduction

Affirmer que la logique est un système de règles, c'est soutenir que ce système *procure le fondement* de la pratique du raisonnement. Affirmer que la logique est un système de propositions, c'est soutenir qu'elle *articule* la pratique du raisonnement. Depuis Aristote, chacunes des deux opinions a bénéficié de multiple appuis. La première voit dans la logique un art, la deuxième une science. Je ne prendrais pas parti dans le débat, qui est loin d'être clos. Que la logique soit considérée comme art ou comme science, elle est, semble-t-il, le principal critère de la rigueur mathématique. «En effet, au fur à mesure que les théories mathématiques cessaient d'apparaître comme des "descriptions" fidèles de certains domaines d'"objets", l'unique condition qui semblait encore s'imposer» [Agazzi 1986, 31] était celle des déductions et des métathéorèmes de la logique formelle. Toutefois, l'euphorie des inventeurs de ces outils modernes se trouve quelque peu modérée par les voix de Husserl, Peirce ou Henri Poincaré : En 1894, dans son article *Sur la nature du raisonnement mathématique,* Poincaré discute le dilemme suivant : les mathématiques sont d'une part une science exacte, c'est-à-dire que leurs preuves sont d'une parfaite rigueur, donc en apparence déductives et, d'autre part, les conclusions des raisonnements mathématiques constituent souvent une extension par rapport à la connaissance exprimée dans les prémisses. Voici, comment Poincaré résout le dilemme : à l'opposé du but déclaré des logicistes, l'analyticité ou la rigueur logique ne sont pas un critère de correction en mathématique. Il nous faut, au contraire, maintenir une intuition spécifique à l'égard du raisonnement mathématique. Car celui-ci n'est pas indépendant de son contenu, sa logique étant pour ainsi dire "locale". Or, si un calcul universel ne semble plus être reconnu comme critère de rigueur mathématique, de quelle nature est cette faculté intuitive capable de supplanter la logique ? Poincaré donne à sa réponse une forme métaphorique et mentionne un élément de condensation médiatisée par une "architecture mathématique" :

> Notre corps est formé de cellules et les cellules d'atomes ; ces cellules et ces atomes sont-ils donc toute la réalité du corps humain ? La façon dont ces cellules sont agencées, et d'où résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité et beaucoup plus intéressante ? Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ? Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'œuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan d'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander. [Poincaré, SM, 133/134]

Selon cette image, le mathématicien lie dans une inférence la prémisse à la conclusion à l'aide d'une "architecture mathématique". Ainsi, l'induction complète est l'expression d'une architecture mathématique : elle suppose que tous les nombres puissent être atteints par l'addition successive de 1. C'est cette structure mathématique qui permet «[de] ranger [une construction] à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre.» [Poincaré, SH, 44] En revanche, une démonstration analytique, que Poincaré appelle une *vérification*, et qui se fonde sur le syllogisme, la substitution et la définition nominale n'est pas proprement mathématique, puisque le procédé d'inférence est *constructif* ou *combinatoire*.

Poincaré n'a pas approfondi sa réflexion sur la structure d'une inférence mathématique. Je me propose de la reconstruire en combinant les réflexions philosophiques de Poincaré et une analyse sémiotique fondée sur la pensée de Helmholtz et de Peirce. Ma conclusion se résume ainsi : l'intuition nécessaire au raisonnement mathématique est esthétique dans la mesure où elle utilise un langage largement non-dénotatif et plutôt saturé au sens de Goodman.

Cette thèse exige une triple explication : Comment peut-on concevoir selon Poincaré les relations entre mathématiques et esthétique, intuition et langage, raisonnement et symbolisme ?

2. Mathématiques et esthétique

Que les mathématiques possèdent une esthétique est un *topos* bien répandu chez les mathématiciens sensibles au charme de leur science et je partage avec Herbert Mehrtens le regret de ne pas pouvoir disposer d'une étude historique sur ce sujet [Mehrtens 1990, 538]. La position de Poincaré semble à première vue des plus classiques. La beauté des mathématiques résulte de leur structure. C'est une beauté intellectuelle «qui vient de l'ordre harmonieux» de ses structures [Poincaré, SM, 15], elles-mêmes entendues comme imitations de l'harmonie du monde physique :

> Il en est des symboles mathématiques comme des réalités physiques; c'est en comparant les aspects différents des choses que nous pourrons en comprendre l'harmonie intime, qui seule est belle et par conséquent digne de nos efforts. [Poincaré, VS, 110]

La beauté semble un but en soi et l'harmonie mathématique un reflet de l'harmonie naturelle. Cependant, ce reflet n'est pas l'expression d'une relation donnée, il ne s'agit nullement d'une harmonie préétablie qui autoriserait le mathématicien à rechercher l'harmonie des lois mathématiques sans en considérer les applications. Au contraire, selon Poincaré

> le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur, serait semblable à un peintre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraient défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt tarie. [Poincaré, VS, 109]

Avec l'introduction des modèle, la perspective commence à changer : les modèles, étant évidemment choisit par l'artiste, possèdent leurs traits particuliers. Le peintre les choisit pour représenter sa propre sensibilité de la beauté. Ou autrement dit : un modèle utile à la représentation du peintre reflète en tant que réalité naturelle également la beauté d'une harmonie. «Le souci du beau, conclut Poincaré, nous conduit aux mêmes choix que celui de l'utile». [Poincaré, SM, 16] Cette devise conserve toute sa validité dans l'application aux mathématiques :

> Les combinaisons utiles, ce sont précisément les plus belles, je veux dire celles qui peuvent le mieux charmer cette sensibilité spéciale que tous les mathématiciens connaissent. [Poincaré, SM, 58]

Les modèles physiques du mathématicien jouent un rôle analogue aux modèles du peintre : ils permettent d'embrasser et d'étendre notre connaissance du monde grâce à la mise en place d'une nouvelle harmonie, qui nous fait en retour pressentir de nouvelles lois mathématiques [Poincaré, SM, 58]. Selon Poincaré, les mathématiques ont un but physique et esthétique :

> Ces deux buts sont inséparables et le meilleur moyen d'atteindre l'un, c'est de viser l'autre, ou du moins de ne jamais le perdre de vue. C'est ce que je vais m'efforcer de démontrer en précisant la nature des rapports entre la science pure et ses applications. [Poincaré, VS, 104]

Ainsi se dessine chez Poincaré l'ébauche d'une théorie esthétique de la connaissance. Pour en percevoir les contours, il nous faut maintenant comprendre le fonctionnement de la capacité intuitive qui est à l'origine à la fois d'une émotion esthétique et d'une perception sensible.

3. Intuition et perception

Comme Helmholtz, Poincaré admet deux axiomes :

— Tout ce qu'on peut saisir d'une réalité est constitué par des éléments relationnels.

— La constitution d'un lien objectif dans la réalité se fonde sur certaines impressions et présuppose une compétence symbolique.

Dans son livre *La Valeur de la science,* Poincaré introduit une distinction entre le fait brut et le fait scientifique grâce à une différentiation graduelle qui témoigne que l'empirisme logique n'avait pas tort de considérer Poincaré comme précurseur. Il ébauche en effet une problématique des énoncés protocolaires et du passage du langage ordinaire au langage scientifique.

Illustés par un exemple, les expressions *fait brut* et *fait scientifique* désignent, au premier échelon, respectivement «l'impression [individuelle] d' [une relative] obscurité que ressent le témoin d'une éclipse, et l'affirmation : il fait noir, que cette impression lui arrache.» [Poincaré, VS, 157] Cette dernière constatation présuppose en tant que "classification commode" une compétence symbolique qui constitue le prix d'une articulation objective de la nature.

La relation entre convention et observabilité apparaît dans l'œuvre de Poincaré partout où il nous expose sa célèbre reconstruction, dite "psychologique", de l'espace géométrique par rapport à l'espace représentatif ou sensible. Selon Poincaré, les sensations sont des données singulières — qu'on subit — sans constituer pour autant des éléments individuels. La succession de sensations — et *a fortiori* un agrégat de sensations — n'est pas par elle-même une sensation, mais une observation obtenue par classification, c'est-à-dire — comme le formule Poincaré — «le résultat d'une habitude» [Poincaré, SH, 81]. L'observation présuppose des sensations sans être elle-même une sensation. Ceci nous rappelle la thèse de Ryle. Poincaré introduit la distinction en question non pas comme distinction entre sensation et observation ou perception, mais entre sensation et jugement comme il l'écrit au Directeur de *Mind* :

> J'ignore si la perception est une sensation ou un jugement, et je crois voir que le philosophes qui emploient ce mot, l'entendent les uns dans le premier sens, les autres dans le second. C'est pourquoi j'évite de l'employer [Poincaré, 1906, 142]

Nous maintenons que l'objectivité, c'est-à-dire le passage de la sensation à l'objet observable doit être possible ou plutôt compréhensible grâce à la médiatisation d'une classification qui donne pour ainsi dire la perspective. C'est pour cette raison que j'hésite à considérer comme un dualisme la théorie de la connaissance de Poincaré.

Pour conclure ce premier point, je dirais d'une classification ou d'un énoncé protocolaire qu'ils sont conventionnels dans la mesure où le contenu observationnel dépend d'une structure classificatoire et devient donc tributaire de l'usage langagier.

Comment la perception est-elle liée à l'intuition ? Nous allons étudier cette question à l'exemple de la géométrie. — Poincaré et Helmholtz précisent leur propre fondement de la géométrie par rapport à celui de Kant. Pour démontrer le bien fondé des géométries non-euclidiennes, il leur a fallu établir que les axiomes d'Euclide ne sont pas *a priori* et que les axiomes des géométries non-euclidiennes partagent avec ceux de la géométrie euclidienne un caractère intuitif. A cette fin il nous faut modifier le concept de l'intuition. C'est à Helmholtz que revient le mérite d'en avoir eu l'idée, et à Poincaré celui d'utiliser ensuite dans ses descriptions des mondes non-euclidiens. Pour justifier son modèle "intuitif" Helmholtz introduit la terminologie suivante : le mot français "perception" désigne une capacité cognitive qui «ne contient rien de ce qui ne ressort pas immédiatement des sensations». Il réserve le terme *Anschauung* pour désigner une *Empfindungen begleitende Wahrnehmung* dont le contenu transcende celui des sensations présentes. Le terme *Vorstellung* désigne l'image mnémique d'objets visuels dont nous n'avons pas actuellement une sensation effective [Cf. Helmholtz 1896, 609]. Ces définitions le conduisent à un concept de l'intuition qui supplante celui promu par Kant et lui permet de démontrer le caractère intuitif des géométries non-euclidiennes :

> Ich habe [...] eine Definition dessen aufgestellt, was wir als *anschaulich vorstellbar* anerkennen müßten, die dahin lautet, daß dazu erforderlich sei die vollständige Vorstellbarkeit derjenigen Sinneseindrücke, welche das betreffende Objekt in uns nach den bekannten Gesetzen unserer Sinnesorgane unter allen denkbaren Bedingungen der Beobachtung erregen, und wodurch es sich von anderen ähnlichen Objekten unterscheiden würde. [Helmholtz 1878a, 65]

Cette modification du concept kantien a une conséquence importante : la "représentabilité intuitive" n'est plus une source indépendante et directe de notre connaissance. Elle se rapporte plutôt à une certaine manière d'employer des signes. Ces signes sont utilisés d'une manière intuitive s'ils se rapportent *en principe* à des constructions sensibles.

Rappelons que, selon Helmholtz, les sensations sont des signes qui n'ont avec les objets qui les ont suscitées d'autre élément commun que la simultanéité. Les sensations en tant que système de signes constituent un langage dont l'organisation nous est donnée physiologiquement ; c'est un système dénoté par les objets extérieurs, mais dont il nous faut apprendre la signification. Cet apprentissage se fait grâce à une expérience semblable à celle de l'apprentissage du langage maternel [Cf. Helmholtz 1869, 180]. Selon Helmholtz, les données nous restent étrangères aussi longtemps que l'entendement n'est pas en mesure d'inverser la direction de la dénotation, c'est-à-dire qu'il est capable d'interpréter les sensations de telle sorte qu'elles reflètent bien en tant que signes le monde extérieur, mais uniquement par rapport aux *relations* entre les objets. L'objet de la perception ainsi conçue n'est jamais celui qui est à l'origine des sensations[1], mais un élément de structure. La capacité intuitive est donc l'interface de l'objet de la pensée et de sa représentation. Elle remplace l'ancien objet mental et constitue un premier élément en direction d'une théorie non représentationelle des réalités.

Au sujet de la géométrie fondée sur le concept de groupe[2], les deux positions de Poincaré et de Helmholtz divergent sur un point : La pratique de la libre mobilité d'un corps pratiquement solide suggère à Poincaré l'axiome suivant :

> Pour que la mesure soit possible, il faut que les figures soient susceptibles de certains mouvements, et qu'il y ait une certaine chose qui ne sera pas altérée par ces mouvements et que nous appellerons la forme [Poincaré 1899, 259]
>
> Notre corps est notre premier instrument de mesure [Poincaré, DP, 100]

Poincaré appelle sa propre position "pragmatique", le mot étant pris dans une connotation peircienne. Par contre, Helmholtz dirait :

> Vous savez bien ce que c'est la forme; eh bien ! pour que la mesure soit possible, il faut que les figures puissent subir certains mouvements qui n'altéreront pas cette forme. [Poincaré 1899, 259]

---

1 Voir par contre [Bouveresse 1996, 65].

2 Pour plus de détails cf. l'article de Heinzmann/Nabonnand intitulé “Poincaré : the genesis of Geometry”, à paraître.

Selon Poincaré, l'expérience commune conduite avec notre corps comme instrument de mesure dans l'espace représentatif n'est que la *ratio cognoscendi* d'un groupe qui, lui, a la fonction d'une norme de l'entendement par rapport à une articulation scientifique du monde. Dans la mesure où Poincaré renonce à une théorie d'abstraction, qui fixe la congruence des figures géométriques, et la remplace par un principe d'homogénéité concernant les mouvements, les illusions, mêmes celles de Kolers concernant directement le mouvement, n'ont pratiquement aucune influence sur sa construction ; l'objet de la perception l'intéresse moins que la sensation que cet objet provoque. La géométrie se développe à partir du concept général de groupe dans un processus *qui définit à la fois l'instrument parfait, c.-à-d. les propriétés du groupe, et l'espace physique*. Le schème de constitution des objets s'accorde avec une norme et celle-ci n'est pas indépendante de la situation pragmatique, de la situation d'action : le corps solide est l'exemplification langagière d'une action, c'est-à-dire l'articulation de la construction du schème d'un instrument parfait (langage intuitif), et le corps solide est en même temps la norme conventionnelle guidant cette action. Dans cette perspective, le langage est théorétique. (L'expression "définition déguisée" caractérise une définition explicite, déguisée en axiome intuitif au sens pré-helmholtzien.) Notre situation anthropologique nous a donné l'habitude d'interpréter la succession de nos sensations d'une certaine manière et non d'une autre. Sous l'aspect d'une reconstruction génétique, cette manière est primitive parce que notre corps comme instrument est la *ratio cognoscendi* du concept général de groupe. En fait, l'expérience ne peut rien contre la géométrie euclidienne parce qu' elle est le moteur du jeu qui nous permet de jouer, de saisir des analogies, c'est-à-dire d'appréhender plusieurs modèles d'une même structure ou d'accomplir un changement de structure par un changement imaginé dans la succession de nos sensations.

Ces réflexions suffisent pour montrer que Poincaré n'est point réaliste.

4. Raisonnement et symbolisme

Résumons d'abord la situation : les logiques formelles, qui se confinent dans l'analyse de la syntaxe et de la sémantique, ne reflètent pas la pratique du raisonnement mathématique. Nous cherchons les principes d'un raisonnement informel qui lie les prémisses à la conclusion.

L'insuffisance de la définition kantienne de l'analyticité s'avère particulièrement évidente si, non contente de porter sur les prédicats unaires (e.g. la syllogistique), la logique traite également des relations. Dans ce cas, loin d'être analytique au sens de Kant, elle reste néanmoins déductive. Telle est l'origine du dilemme — mentionné plus haut par Poincaré — que Peirce avait déjà formulé neuf années plus tôt[3] :

> It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purley deductive in is nature ... while on the other hand, it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science. [Peirce, 3.363; 1885]

Peirce présente lui-même la solution de ce paradoxe comme sa *first real discovery*. Elle consiste dans une distinction de deux sortes de raisonnements explicatifs, à savoir les inférences corollarielles et les inférences théorématiques. Le raisonnement théorématique est un raisonnement pragmatique où le rapport des signes aux objets est restitué dans ses droits par la sémiotique. En revanche, le raisonnement corollariel qui n'est réalisé en mathématiques que dans quelques cas limites, est un raisonnement *plutôt* conceptuel. Mais chacun d'eux procède par *construction*, implicitement quand la construction est *simple*, explicitement quand elle est *complexe*.

En quoi une construction simple diffère-t-elle d'une construction complexe ?

Sous sa forme la plus différenciée, un raisonnement théorématique se décompose en six phases, dont nous mentionnerons les deux phases centrales : d'une part le lien entre la prémisse en tant que concept du 2^{e} ordre (qui est un signe général) et la construction individuelle d'un diagramme. Le diagramme saisit dans une forme iconique le fait exprimé dans la prémisse. Il peut être continu (figures géométriques), discret (formules algébriques) ou bien mixte. D'autre part l'expérimentation avec le diagramme entraînant éventuellement sa modification.

Se pose alors une question intermédiaire : Comment un objet singulier, un diagramme, peut-il dénoter un objet général, le symbole ?

Pour répondre à cette question, Peirce a recours à la fonction iconique du signe. J'ignore, si l'on trouve dans l'œuvre de Peirce un exposé vraiment convaincant de cette fonction iconique. Mais voici l'armorce d'une solution fondée sur un texte des *News Elements in Mathematics* (vol IV, p. 318) : le caractère distinctif d'une icône consiste dans le fait de *montrer* une qualité au lieu de la *représenter*. En tant qu'*interprétant* iconique le diagramme montre la structure

---

3 Cf pour la suite [Heinzmann 1994] et [Heinzmann 1995]

intrinsèque d'une exécution d'une action. En recourant au cadre dialogique, on peut dire qu'il y a présence d'une icône si l'exécution d'une action est considérée sous la perspective de l'interprète en tant que représentation sensible d'une qualité. La représentation d'une qualité est une *pure possibilité* et se distingue d'une réalisation d'un cas général. Le diagramme, devenu *schème individuel*, peut être appelé *intuitif* dans la mesure où les aspects sémiotiques qui interviennent dans sa constitution — bien qu'ils portent un caractère réflexif — sont toujours des aspects *accompagnant* une exécution d'une action : ils *présentent* sensiblement cette exécution ou ils *représentent* grâce à cette présentation sensible. En d'autres termes, *recourir à l'intuition* signifie retourner à l'origine pragmatique de la signification du signe. Puisque le raisonnement mathématique en tant que raisonnement théorématique est intuitivement bien fondé, la thèse peircienne selon laquelle les mathématiques n'ont rien à apprendre de la logique, n'est pas un *addendum* arbitraire dans le jardin de la théorie peircienne.

Comment conclure du diagramme — considéré comme prémisse — à la conclusion ? La démarche envisagée est l'expérimentation. Celle-ci comporte un aspect qui nous rappelle le caractère essentiel du raisonnement mathématique selon Poincaré, à savoir qu'il est un raisonnement condensé d'un niveau d'abstraction supérieur. Les diagrammes jouent donc dans le système de Peirce le même rôle que l'architecture mathématique chez Poincaré : ils sont le "moyen terme" qui lie les prémisses aux conclusions. Et de leur complexité, une fois choisi le *tertium comparationis*, résulte la complexité du raisonnement : si, sous toutes les perspectives possibles, les interprétations du diagramme restent invariantes par rapport aux expérimentations, la déduction est corollarielle, sinon, théorématique.

5. Exemples de raisonnements esthétiques

La prise en compte d'un exemple mathématique va maintenant nous montrer comment le raisonnement de Poincaré correspond au schéma indiqué par Peirce, schéma dont l'interprétation s'inscrivait elle-même dans la perspective des travaux de Poincaré et de Helmholtz. En fait, le raisonnement de Poincaré est un raisonnement théorématique enrichi d'une perspective esthétique.

> On peut s'étonner, dit Poincaré, de voir invoquer la sensibilité à propos de démonstrations mathématiques qui, semble-t-il, ne peuvent intéresser que l'intelligence. Ce serait oublier le sentiment de la beauté mathématique [...] .C'est un vrai sentiment esthétique que tous les vrais mathématiciens connaissent et c'est bien là de la sensibilité. [Poincaré, SM, 57]

Nous avons déjà appris que, selon Poincaré, la valeur esthétique d'une théorie augmente au fur à mesure que différents modèles physiques d'un même raisonnement améliore l'harmonie de la théorie. Or, selon les propres termes de Poincaré, toutes les voies où il s'était engagé le conduisaient successivement à l'*Analysis Situs* [Cf. Poincaré 1921, 323]. On devrait donc chercher de préférence la beauté dans cette discipline. Ainsi, l'exemple suivant est extrait d'un mémoire en topologie. Il montre que Poincaré utilise dans le même raisonnement, voire dans le même signe, plusieurs plans de contenu.

Je tire mes exemples d'enchevêtrements de signes ayant des contenus différents de la riche documentation que M. Alain Herreman a rassemblée dans sa thèse, soutenue en décembre 96, sur *L'histoire sémiotique du concept d'homologie*. Considérons la phrase suivante :

> De plus, le polyèdre étant d'un seul tenant, une seule des combinaisons linéaires $\sum \lambda_i a_i^p$ pourra être fermée, c'est le polyèdre lui-même dans son entier, représenté par la formule $\sum a_i^p$. [Poincaré, Œuvres VI, 302]

Il nous suffit de savoir que les a_i^p désignent des variétés de dimension p, dont le concept fut introduit d'une manière algébrique, et que les λ_i sont des coefficients entiers. La combinaison linéaire de ces variétés possède un contenu géométrique, si le coefficient λ est égal à 1 : on obtient un polyèdre généralisé. Je propose l'interprétation suivante :

L'image géométrique que la somme de la longueur des arêtes d'un polyèdre ordinaire s'annule *exemplifie* d'une manière sélective le contenu arithmétique $\sum a_i = 0$ [Poincaré, Œuvres VI, 282]. Ce contenu arithmétique dénote d'une part la propriété géométrique "être fermée" relative aux contours d'arêtes du polyèdre ordinaire et elle est, d'autre part, mise en correspondance avec la propriété "être égal à 0" relative aux combinaisons linéaires d'entiers de variétés [Herreman 1996, 112]. En d'autres termes, Poincaré associe «à cette annulation des combinaisons linéaires [à coefficient] d'entiers associés aux contours fermés» la congruence algébrique $\sum \lambda_i a_i^p \equiv 0$ qui sert à désigner la fermeture d'une variété $\sum \lambda_i a_i^p$ [cf. ibid.]. Au lieu de parler d'associations, nous allons maintenant dire que la formule $\sum a_i = 0$, exemplifiée par la fermeture du polyèdre ordinaire, exemplifie à son tour le signe $\sum \lambda_i a_i^p \equiv 0$. La formule $\sum a_i = 0$ exemplifie en tant que cas particulier et en tant que figure algébrique la formule $\sum \lambda_i a_i^p \equiv 0$, qui dénote — ceci est le résultat d'une autre démonstration — à la fois le polyèdre généralisé $\sum a_i^p$ où $\lambda = 1$ ("le polyèdre dans son entier") et, implicitement (pour $p = 1$), le polyèdre ordinaire.

Le changement de plan de contenu qui accompagne le passage des combinaisons linéaires à coefficients 1 ayant un contenu géométrique à des combinaisons linéaires à coefficients entiers apparaît explicitement chez Poincaré lui-même sous forme de déductions : M. Herreman nous donne des exemples où Poincaré commence par établir une congruence pour des coefficients égaux à 1 et relevant du plan du contenu géométrique. La formule (notation) en question est donc "justifiée" par exemplification. Il introduit ensuite en hypothèse une congruence concernant une combinaison linéaire à coefficients entiers. Cette combinaison est considérée sur le seul plan de l'expression. On opère alors dans l'expression hypothétique une substitution effectuée au plan algébrique grâce à la congruence établie au plan du contenu géométrique. Ainsi, la démonstration fait intervenir et mêle des relations relevant du plan géométrique et du plan algébrique. Les notations algébriques dénotent un contenu algébrique exemplifié à son tour par des contenus arithmétiques et géométriques qui jouent dans le raisonnement le rôle de ponts métaphoriques. L'étude du maniement sémiotique des contenus géométriques et arithmétiques nous livre les éléments "locaux" qui distinguent un raisonnement mathématique d'un raisonnement logique.

Cette ambiguïté sémiotique chez Poincaré fut critiquée par ses successeurs pour son manque apparent de rigueur. Au cours de la formalisation progressive qui s'empare des mathématiques après la première guerre mondiale, des mathématiciens comme Alexandroff ou Dieudonné[4] désapprouvent de plus en plus ce que l'on pourrait appeler selon Goodman l'aspect esthétique, en somme traditionnel, des mathématiques. Cet aspect ne concerne évidemment pas le raisonnement mathématique dans sa totalité mais prédomine seulement dans certaines de ses phases. Les symptômes identifiés sont ceux de la saturation et de l'exemplificationalité : la fonction symbolique des signes mathématiques peut être multiple, c'est-à-dire qu'elle peut concerner plusieurs plans de contenu, ou exemplificatrice, c'est-à-dire elle peut être échantillon d'une étiquette

[4] Cf [Herreman 1996, 72] et [Dieudonné 1989, 15sq.].

qui le dénote d'une manière directe — comme $\sum a_i = 0$ dénote la fermeture d'une polyèdre ordinaire — ou indirecte *via* une chaîne de dénotation et d'exemplification : $\sum \lambda_i a_i^p \equiv 0$ dénote le polyèdre généralisé $\sum a_i^p$, celui-ci dénote (pour p = 1) le polyèdre ordinaire qui exemplifie $\sum a_i = 0$, exemplifiant à son tour $\sum \lambda_i a_i^p \equiv 0$. En fait, la rigueur esthétique étant peut-être moins transparente que celle de la logique, elle dépasse de toute façon la sensibilité d'un esprit purement analytique.

Lorsque l'on dit que Poincaré a trouvé un bon résultat mathématique tout en indiquant une démonstration fausse, n'est-ce pas là une conséquence d'un malentendu anachronique ? N'est-il pas pensable de remplacer le critère de la démonstration sans lacunes par le critère de la densité d'exemplifications qui n'est évidemment pas vérifiable par la lecture d'un seul article ? Malheureusement, je n'ai pas eu le temps de vérifier cette hypothèse. Il faudrait chercher un résultat jugé correct, mais fondé par exemple sur une extension non probante dans le contexte donné, mais finalement justifiée par rapport à la densité des exemplifications dans différents plans de contenu. Parler — comme Hans Hahn le fait en 1933 — d'une crise de l'intuition, méconnaît la fonction symbolique de l'intuition. Si on la conçoit comme relation dénotative, la crise est en effet inévitable, puisqu'une courbe continue non-différentiable, par exemple, se soustrait d'une intuition géométrique. Mais il y a là un cas d'échec de traduction de la notion intuitive de courbe, et non un cas d'échec d'exemplification [Cf. Volkert 1986, 256].

La transparence dénotative du formalisme logique et l'opacité exemplifiante d'un raisonnement esthétique dont *la valeur* esthétique n'est accessible qu'au praticien, ne sont-elles pas finalement les deux faces de la même médaille : la première étant claire *en théorie*, la deuxième *en pratique ?*

Bibliographie

Agazzi, Evandro

1986 La logique et le problème de la rigueur, *in* : J. Vuillemin (éd.), *Mérites et limites des méthodes logiques en philosophie*, Paris : Vrin, 17-41.

Bouveresse, Jacques

1996 *Langage, perception et réalité*, tome 1, La perception et le jugement, Nîmes : Chambon.

Dieudonné, Jean

1989 *A History of Algebraic and Differential Topology*, Boston/Basel : Birkhäuser.

Heinzmann, Gerhard

1994 Mathematical Reasoning and Pragmatism in Peirce, *in* : D. Prawitz & D. Westerstahl (éds.), *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, Dordrecht/Boston/London : Kluwer, 297-310.

1995 *Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht.

Helmholtz, Hermann von

1869 Über das Ziel und die Fortschritte der Naturwissenschaft, *in :* H. Hörz/S. Wollgast (éds), *H.v. Helmholtz, Philosophische Vorträge und Aufsätze*, Berlin : Akademie-Verlag, 1971, 153-185.

1878 Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. Antwort gegen Herrn Professor Land, *in :* Helmholtz, *Über Geometrie*, Darmstadt : Wissenschaftl. Buchgesellschaft, 1968, 61-81.

1896 *Handbuch der Physiologischen Optik*, 2. umgearbeitete Auflage, Hamburg/Leipzig : Voss.

Herreman, Alain

1996 *L'histoire sémiotique du concept d'homologie*, Thèse de doctorat, Université Paris VII.

Mertens, Herbert

1990 *Moderne Sprache Mathematik*, Frankfurt : Suhrkamp.

Peirce, Charles Sanders

1933-58 *Collected Papers* (ed. Ch. Hartshorne/P. Weiss), Volume I-VI, Cambridge Mass : Belknap Press, (cités selon volume et paragraphe : e.g. 5.176 signifie Vol. 5, § 176).

1976 *The New Elements of Mathematics*, vol. I-V (ed. C. EISELE), The Hague / Paris / Atlantic Highlands : Mouton/Humanities Press (cités selon volume et page : e.g. IV. 176 signifie Vol. IV, p. 176).

Poincaré, Henri

1899 Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell, *Revue de métaphysique et de morale* 7, 251-279

(SH) 1902 *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, 1968.

(VS) 1905 *La valeur de la science*, Paris : Flammarion, 1970.

1906 Letter to M.G.F. Stout, *Mind*, n.s. 15, 141-143.

(SM) 1908 *Science et méthode*, Paris : Flammarion.

1913 *Dernières pensées*, Paris : Flammarion, 1963.

1916-56 *Œuvres*, publiées sous les auspices de l'Academie des Sciences, tome 1-11, (Gauthier-Villars), Paris.

1921 Analyse des travaux scientifiques de H. P. faite par lui-même, *Acta mathematica* 38, 3-35, citée selon la réédition *in* : F. E. Browder (éd.), *The Mathematical Heritage of H. P.*, II, Proc. Symp. in Pure Math. 39, 1983 , 257-357.

Volkert, Klaus Thomas

1986 *Die Krise der Anschauung*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht.