PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

DANIEL PRÉVOT

Note sur le théorème dit de Poincaré et ses généralisations dites de Jordan concernant les probabilités associées à une classe d'événements

Philosophia Scientiæ, tome 2, n° 4 (1997), p. 91-94
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1997__2_4_91_0>

Note sur le théorème dit de Poincaré et ses généralisations dites de Jordan concernant les probabilités associées à une classe d'évènements

Daniel Prévot

U.F.R. de mathématiques et d'informatique
Université Nancy 2

Philosophia Scientiae, 2 (4), 1997, 91-94

A partir des axiomes de la théorie des probabilités, il est élémentaire de montrer que la probabilité de réalisation de l'un au moins de 2 évènements A ou B, résultats possibles d'une même expérience, est donnée par la formule connue depuis la fin du XVIIeme siècle : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dite "théorème des probabilités totales". Il est également facile de généraliser cette formule au cas de 3 puis de 4 évènements. La généralisation au cas de n évènements $A_1, A_2, ..., A_n$ peut être établie par récurrence.

Dans son *Cours de calcul des probabilités* publié en 1912, Henri POINCARÉ (1854 - 1912) y donne pages 58-59 sa démonstration de la solution bien connue :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$$

avec $S_k := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$

où $P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$ est la probabilité de la réalisation conjointe des k évènements $A_{i1}, ..., A_{ik}$ (en n'excluant pas que d'autres évènements aient pu se produire ou non). C'est, semble t'il, la première fois que cette formule apparaît dans un ouvrage d'enseignement des probabilités, et la tradition la désigne sous l'appelation de Théorème ou Identité de Poincaré (Cf. A. RENYI in «Fondations of Probability», Holden day, 1970). La méthode utilisée par Poincaré consiste à introduire un joueur fictif, à lui verser 1F pour toute réalisation d'évènement (A_i ou $A_i \cap A_j$ ou $A_i \cap A_j \cap A_k$ ou ...), 0F sinon, puis à évaluer l'espérance mathématique du gain du joueur qui est de pF pour un évènement de probabilité p. Ce procédé est à la base de la méthode actuelle dite des variables indicatrices que nous rappelons :

Pour tout évènement A on a : $E(1_A) = P(A)$ avec $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$ et $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$ d'où :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = E\left(1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = E\left(1 - 1_{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}}\right) = 1 - E\left(1_{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}}\right) =$$

$$1 - E\left(\prod_{i=1}^{n} 1_{\overline{A_i}}\right) = 1 - E\left(\prod_{i=1}^{n} \left(1 - 1_{A_i}\right)\right) =$$

$$1-E\left(1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} 1_{A_{i_1}}\times\ldots\times 1_{A_{i_k}}\right)\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} E\left(1_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}}\right)\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P\left(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k$$

où $S_k := \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P\left(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)$

On peut s'intéresser à la probabilité de réalisation de r évènements au moins (puis exactement, au plus) parmi $A_1, A_2, ..., A_n$. C'est ce qu'a fait Charles JORDAN (19xx - 19xx) de l'université de Budapest qui a publié en 1934 dans *Acta scientiarum mathematicarum* tome VII fasc. II, 20, XI, pages 103 à 111, Szeged-Hongrie, l'article intitulé «Le théorème de poincaré, généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes».

La méthode des variables indicatrices permet d'obtenir plus facilement les résultats. Pour celà, on considère les C_n^r évènements $B_j^{(r)} := A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_r}$ où $j\in\left\{1,\ldots,C_n^r\right\}$ est le rang du p-uplet $(i_1, ..., i_r)$ dans le classement lexicographique des p-uplets. La méthode précédente nous permet le calcul de la probabilité de réalisation de 1 évènement au moins des $B_j^{(r)}$, c'est à dire la probabilité de réalisation de r évènements au moins des A_i. On en déduit ensuite sans difficulté les probabilités de réalisation de r évènements exactement, puis au plus. Si on désigne par X le nombre aléatoire d'évènements A_i. réalisés, les résultats sont alors les suivants :

$$P(X\ge r)=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k C_{r+k-1}^{r-1} S_{r+k} \;;$$

$$P(X=r)=\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k C_{r+k}^{r} S_{r+k} \;;$$

$$P(X\le r)=1+\sum_{k=1}^{n-r}(-1)^k C_{r+k-1}^{r} S_{r+k} \;.$$

Une erreur homonymique m'a conduit à explorer l'oeuvre compléte de Camille JORDAN (1838 - 1922) publiée par Jean DIEUDONNÉ en 1961 chez Gauthier-Villars. J'y ai trouvé 4 pages constituant l'unique (?) contribution au calcul des probabilités de ce grand mathématicien à l'importante production en analyse et en algèbre. Il s'agit de 2 notes au C.R.A.S. (Compte Rendu de l'Académie des Sciences). Dans la première, datée du 9 décembre 1867 et intitulée «De queques formules de probabilité» , il établit en une page et demie ... le théorème de POINCARÉ, qui était alors âgé de 13 ans ... Dans la deuxième, datée du 28 mai 1873 et intitulée «Questions de probabilités» , il présente en deux pages et demie 2 petits problèmes dont le premier est le suivant : «Une droite de longueur l est partagée en m segments. Quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une quantité donnée a ?» . Il calcule d'abord «la probabilité B_r pour que r segments au moins soient > a» puis en déduit «la probabilité A_r pour qu'on ait juste r segments satisfaisant à ces conditions» . Il établit ainsi les formules que retrouvera plus de 60 ans plus tard Charles JORDAN qui ignorait ce travail de son illustre prédecesseur et à qui elles ont donc été attribuées par erreur. On notera qu'il n'a pu être établi de lien de parenté entre les deux familles.

Camille JORDAN qui avait été admis premier à Polytechnique en 1855, est nommé examinateur de cette même école en 1873, et en deviendra professeur (en titre) en 1876. Cette année là (1873), Henri POINCARÉ est admis premier à Polytechnique également, il aura ainsi Camille JORDAN comme professeur (en fonction) durant toute sa scolarité. Il n'est donc pas surprenant qu'il ait été informé par son auteur de la fameuse formule qu'on lui a par la suite attribuée par erreur.

En conclusion, il conviendrait sans doute de parler des formules de JORDAN (en pensant à Camille) en oubliant les théorèmes de POINCARÉ et de JORDAN (en pensant à Charles), et en laissant à POINCARÉ l'honneur d'avoir peut être inventé la méthode des variables indicatrices.

---

[1] Charles (Karoly) JORDAN: mathématicien-statisticien hongrois, Budapest le 16 décembre 1871 - Budapest le 24 décembre 1959. Docteur ès-sciences en 1895 et docteur ès-philosophie en 1914. On lui doit de nombreux articles en allemand, en anglais, en français et en italien dans de nombreuses revues sur divers sujets : probabilités, statistiques, calcul numérique, géométrie, analyse, métronomie, économie, démographie, ...