

# Sur la solution de Sundman du problème des trois corps

*Malte Henkel*

Université Henri Poincaré Nancy 1

**Résumé.** Contrairement à une opinion largement répandue, le problème des trois corps possède une solution analytique. Cette solution fut découverte en 1909 par Sundman. Nous présentons dans cet article les idées de base et l'histoire de cette solution.

**Zusammenfassung.** Entgegen einer weitverbreiteten Meinung ist das Dreikörperproblem analytisch lösbar. Diese Lösung wurde 1909 von Sundman 1909 gefunden. Die ihr zugrundeliegenden Ideen und ihre Geschichte werden in einfacher Form dargestellt.

# 1 Le problème des trois corps

L'étude du problème des trois corps a une longue histoire [Barrow-Green 1997, Diacu et Holmes 1996]. Comme beaucoup de problèmes qui ont suscité un grand intérêt, il se formule très facilement mais sa simplicité apparente cache une phénoménologie très riche. Considérons un ensemble de  $n$  particules ponctuelles qui exercent des forces gravitationnelles l'un sur l'autre. Admettons qu'elles ont les masses  $m_i$ , où  $i = 1, 2, \dots, n$  et que leurs positions sont décrites à l'aide des vecteurs  $\vec{r}_i(t)$  en fonction du temps  $t$ . Les équations newtoniennes du mouvement s'écrivent

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))^2} \cdot \frac{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|} ; \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle. Le problème des trois corps s'obtient comme cas spécial  $n = 3$  du problème général des  $n$  corps (1). En admettant des conditions initiales pour les positions  $\vec{r}_{i,0} := \vec{r}_i(0)$  et les vitesses  $\vec{v}_{i,0} := d\vec{r}_i/dt(0)$ , on s'intéresse à calculer les positions  $\vec{r}_i(t)$ , à partir des équations différentielles (1), pour tous les temps  $t$ . Ainsi posé, le problème est mathématiquement complètement défini et sa solution n'utilise que des techniques mathématiques relevant d'un cours de mécanique classique.<sup>1</sup>

Quelques solutions particulières sont bien connues. Euler (1765) traite le cas où les trois corps sont alignés. Lagrange (1772) résout le cas où les trois corps (dont un de masse négligeable) sont aux sommets d'un triangle équilatéral rigide. Finalement, dans la solution de Moore (1993) et de Chenciner et Montgomery (2001) trois corps de masse égale parcourent un huit. Pour des détails complémentaires, on peut consulter [Montgomery 2001].

De part sa difficulté technique considérable, le problème des trois corps suscite des commentaires souvent approximatifs et parfois erronés. Par exemple, on attribue très souvent à Poincaré la découverte d'un théorème affirmant l'insolubilité du problème des trois corps. Cette insolubilité, reliée à la divergence des séries que l'on utilisait pour résoudre

---

1. Des exemples physiques classiques du problème des  $n$  corps sont évidemment fournis par le mouvement des planètes autour du soleil, ou par le passage d'une comète dans le système solaire. Des exemples plus récentes considèrent les orbites des satellites artificiels, ou des planètes récemment découvertes autour d'autres étoiles que le soleil.

les équations (1), aurait stimulé Poincaré pour développer ses nouvelles méthodes de nature topologique en mécanique analytique [Abraham-Marsden 1978, xvii]. Sous cette forme simple, ces affirmations ne sont que partiellement vraies (et donc, en toute rigueur, complètement fausses). En effet, Sundman [1909] a donné, dans un sens très précis, une solution exacte et générale du problème des trois corps. Elle s'écrit à l'aide de séries convergentes pour toute valeur (réelle) du temps  $t$ .

On peut se demander pourquoi un tel résultat n'est connu que des spécialistes. Cette note, destinée à une audience non spécialisée dans les méthodes modernes de la mécanique analytique, présentera dans la section 2 un très bref résumé historique dans lequel nous tenterons de rectifier les erreurs de certains commentaires et d'en expliquer l'origine. Dans la section 3 nous présenterons un exposé des idées essentielles de la solution de Sundman, en suivant largement un article pédagogique de Saari [1990]. Des conclusions dans la section 4 termineront cette note. En particulier, nous soulignerons le fait que la solution de Sundman, malgré son intérêt théorique fondamental, n'est pas capable de fournir des renseignements pratiques sur le comportement physique du système. Quelques annexes d'intention pédagogique fournissent des compléments mathématiques d'une nature un peu plus technique.

## 2 Quelques remarques historiques

L'histoire du problème des trois corps, à la fin du 19<sup>e</sup> siècle et au début du 20<sup>e</sup> siècle, est étroitement liée à l'histoire du journal *Acta Mathematica*, fondé et rédigé par G. Mittag-Leffler à Stockholm. Pour plus de détails sur les relations entre Mittag-Leffler et Poincaré, on peut consulter [Nabonnand 1999a, 1999b]; pour une vision d'ensemble de l'histoire du problème des trois corps à la fin du 19<sup>e</sup> siècle, on peut consulter [Barrow-Green 1997] et [Diacu et Holmes 1996].

Mittag-Leffler a fait ses études en Allemagne, chez K. Weierstraß à Berlin, chez E. Schering à Göttingen, et en France, chez C. Hermite à Paris. A cette époque, caractérisée par des nationalismes gratuits et des tensions politiques franco-allemandes, les contacts et la connaissance réciproque des mathématiciens français et allemands étaient difficiles. Mittag-Leffler, reconnu en particulier pour ses résultats sur des fonctions méromorphes qui portent aujourd'hui son nom [Knopp 1971], fut nommé en 1881 professeur à Stockholm [Nabonnand 1999b, 71]. Vu la situation politique qui rendait délicate la publication des travaux des mathématiciens français dans les journaux allemands (et réciproquement), il tente

de tirer profit de ses bonnes relations avec les mathématiciens français et allemands pour créer un nouveau journal, nommé *Acta Mathematica*, qui publiera principalement des articles en français et en allemand, dans le but avoué d’offrir un forum international où des travaux d’importance peuvent être publiés et lus dans les deux pays sans heurter les sensibilités politiques. En mars 1882, il demande à Poincaré de “faire le succès”<sup>2</sup> du journal et de lui envoyer pour publication ses mémoires sur les fonctions fuchsienues dont des énoncés de résultats furent déjà publiés dans les *Comptes Rendus*. Poincaré accepte et son travail [Poincaré 1882] inaugure le premier volume des *Acta* en 1882. Il sera suivi d’une série de neuf autres œuvres dans les 10 premiers volumes des *Acta*. L’entreprise de Mittag-Leffler est soutenue par ses collègues scientifiques et le journal acquiert rapidement une bonne réputation internationale, [Nabonnand 1999b, 92]. Cependant, la situation financière du journal reste délicate, et les *Acta Mathematica* ne peuvent démarrer que grâce aux contributions de la fortune personnelle de Mittag-Leffler et des subventions du parlement suédois (en 1895, la réduction de la subvention par le parlement de Stockholm jettera les *Acta Mathematica* dans une grave crise financière<sup>3</sup>).

Pour toutes ces raisons, Mittag-Leffler cherche à augmenter le prestige de son journal dès son lancement. Une telle opportunité se présente à l’occasion du 60e anniversaire du roi Oscar II de Suède qui, ayant étudié les mathématiques lui-même, prend un intérêt personnel dans les progrès des mathématiques, et accepte de financer un prix pour la solution d’un problème mathématique important. L’histoire et les événements autour du prix du roi Oscar II ont été décrits en détail ailleurs [Andersson 1994, Barrow-Green 1994, Barrow-Green 1997, Diacu 1996, Diacu et Holmes 1996, Nabonnand 1999a] et nous nous concentrons ici sur les aspects en lien direct avec la solution du problème par Sundman [1909, 1913] une trentaine d’années plus tard.

Le prix est annoncé, en français et en allemand, dans le volume 7 des *Acta* (et également dans de nombreux journaux internationaux [Nabonnand 1999b]) et quatre questions sont proposées. Voici la première :

1. Étant donné un système [ . . . ] de points matériels qui s’attirent mutuellement suivant la loi de Newton, on propose, sous la supposition qu’un choc de deux points n’ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelques fonctions connues du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.

---

2. Lettre de Mittag-Leffler à Poincaré du 29 mars 1882

3. Lettre de Mittag-Leffler à Poincaré du 20 avril 1895.

[...] la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde [...] Lejeune-Dirichlet a communiqué peu de temps avant sa mort à un géomètre [...] qu'il avait découvert une méthode de l'intégration des équations différentielles [...] [et] il était parvenu à démontrer d'une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement nous ne connaissons rien sur cette méthode [...] On peut pourtant supposer que cette méthode était basée [...] sur le développement d'une idée fondamentale et simple [...] [Mittag-Leffler 1885]

La suite est connue : Poincaré envoie<sup>4</sup> le 17 mai 1888 son mémoire célèbre [Poincaré 1890],<sup>5</sup> inscrit sous la devise *Nunquam praescriptos transibit sidera fines*, destiné au concours pour le prix du roi Oscar II. Après délibération et de multiples voyages de Mittag-Leffler, le comité formé de Mittag-Leffler, Hermite et Weierstraß [Nabonnand 1999b, 178-181] décide de lui octroyer le prix, qui consiste en une médaille d'or et la somme de 2500 couronnes.<sup>6</sup> Selon le règlement, le mémoire gagnant doit être publié dans les *Acta Mathematica*. En préparant cette publication, Poincaré fournit sur la demande de Mittag-Leffler des notes explicatives sur son mémoire (ce qui le rallonge d'une centaine de pages). En juillet 1889, suite à une question de l'éditeur associé des *Acta*, E. Phragmén, Poincaré découvre une erreur importante dans son mémoire.<sup>7</sup> Une grande partie des résultats que Poincaré a cru établir, entre autres sur la stabilité du système planétaire, ne sont plus valables. Travaillant sur les corrections nécessaires, il découvre ce qu'on appelle aujourd'hui les *points homoclines* et met en évidence le premier exemple d'un système au comportement chaotique. Au moment de la découverte de l'erreur, le volume contenant le mémoire erroné est imprimé et quelques exemplaires sont déjà sortis de l'imprimerie. Afin d'éviter un scandale, Mittag-Leffler décide<sup>8</sup> de rappeler le volume complet, de le détruire et de l'imprimer à nouveau. Poincaré doit assurer le coût de cette seconde impression, d'un montant de 3585 couronnes et 63 øre. Finalement, son mémoire du prix du roi Oscar II lui servira de base pour son traité sur les nouvelles

---

4. Tout laisse croire que les quatre questions avaient été rédigées de manière à pouvoir intéresser Poincaré. En effet, Mittag-Leffler lui rappelle en juillet 1887 que le délai final pour envoyer un manuscrit pour le prix est le 1<sup>er</sup> juin 1888 et ajoute : "Si vous veuillez envoyer quelque chose c'est guerre probable que quelqu'un vous dépassera."

5. Cet article ne traite que du problème *restreint* des trois corps, c.à.d. les corps sont admis à ne se déplacer que dans un plan et  $m_3 \ll m_1, m_2$ .

6. Pour comparaison, le salaire annuel de Mittag-Leffler à Stockholm en 1881 était de 7000 couronnes. En 1894, 1 couronne était équivalente à 1,40 francs français.

7. Lettres de Poincaré à Mittag-Leffler du 16 juillet et du 1<sup>er</sup> décembre 1889.

8. Lettre de Mittag-Leffler à Poincaré du 5 décembre 1889.

méthodes de la mécanique céleste [Andersson 1994, Barrow-Green 1994, 1997, Diacu et Holmes 1996, Nabonnand 1999b].

Ajoutons ici quelques commentaires :

1. On lit souvent dans les articles de vulgarisation que le problème des trois corps n'est pas résoluble. Formellement, un **système algébriquement intégrable**<sup>9</sup> se caractérise par l'existence de certaines quantités  $I_k = I_k(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t))$ , appelées **intégrales premières**, qui restent constantes tout au long de l'évolution du système. Par conséquent, elles ne dépendent que des valeurs initiales des positions  $\vec{r}_{i,0}$  et des vitesses  $\vec{v}_{i,0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , c'est à dire

$$I_k = I_k(\vec{r}_{1,0}, \dots, \vec{r}_{n,0}, \vec{v}_{1,0}, \dots, \vec{v}_{n,0}) \quad (2)$$

Si l'on connaît autant d'intégrales premières  $I_k$  que de variables indépendantes (on en a  $6n$  pour le problème des  $n$  corps) et si les  $I_k$  sont des fonctions suffisamment simples (c.à.d. algébriques) des  $\vec{r}_{i,0}$  et  $\vec{v}_{i,0}$ , le problème de résoudre les équations différentielles (1) se réduit à trouver la solution d'un système d'équations algébriques. Ceci est un problème considérablement plus simple que celui de résoudre les équations (1) directement.

On connaît 10 intégrales premières indépendantes pour le problème des  $n$  corps. Elles peuvent s'écrire comme :

- (i) les coordonnées  $\vec{R}$  du centre de masses du système,
- (ii) les composantes de la quantité de mouvement totale  $\vec{P}$ ,
- (iii) les composantes du moment cinétique du système  $\vec{L}$  et
- (iv) l'énergie totale  $E$ .

Les équations (1) sont des équations différentielles du second ordre, on a donc  $2 \cdot 3n = 6n$  variables indépendantes. On peut toujours éliminer  $12 = 10 + 2$  variables du problème, grâce aux 10 intégrales premières et 2 par deux symétries découvertes par Jacobi en 1843.<sup>10</sup> En somme, on reste avec un système d'équations différentielles à  $6n - 12 = 6(n - 2)$  variables. Il est clair que le problème des 2 corps est intégrable mais il faudrait trouver d'autres intégrales premières pour rendre les cas  $n > 2$  intégrables. Or, ceci est impossible : Bruns a démontré en 1887 que toute intégrale première qui est une fonction *algébrique* des positions  $\vec{r}_i(t)$  et des vitesses

9. La terminologie technique définie dans cet article sera mise en gras.

10. Une variable s'élimine en considérant une des positions ou des vitesses comme une variable indépendante (au lieu du temps  $t$ ) et l'autre s'élimine à l'aide de la technique d'"*élimination des nœuds*" qu'on trouvera dans les livres sur la mécanique céleste.

$d\vec{r}_i(t)/dt$  est une fonction des dix intégrales déjà connues [Bruns 1887]. Poincaré [1890] a généralisé ce théorème aux fonctions *uniformes* (voir annexe A) des positions et des vitesses.<sup>11</sup> La non-existence d'autres intégrales premières établit la non-intégrabilité du problème des  $n \geq 3$  corps. Pourtant, ceci n'implique pas qu'une solution exprimable à l'aide de séries n'existe pas. Le théorème de Bruns et Poincaré montre seulement que certaines méthodes algébriques sont insuffisantes pour résoudre le problème.

2. Il est bien connu qu'il existe des séries perturbatives capables de représenter les solutions du problème avec une très grande précision. Pour simplifier considérons le cas  $n = 3$ . Imaginons qu'un des trois corps est le soleil et les deux autres des planètes. En première approximation, on néglige les forces gravitationnelles entre les deux planètes, parce que leur masse est beaucoup plus petite que celle du soleil.<sup>12</sup> Dans cette approximation, l'équation (1) se décompose en deux problèmes à deux corps et s'intègre. Ensuite, on rajoute les forces entre les planètes en les traitant comme une petite perturbation de la solution approximative obtenue auparavant. On trouve une meilleure approximation "proche" de la première. En répétant cette procédure, on obtient des expressions pour les  $\vec{r}_i(t)$  sous forme d'une série. Le cas des mouvements périodiques présente des difficultés techniques qui furent résolues à la fin du 19e siècle par l'utilisation des séries de Lindstedt et Gylden.<sup>13</sup> Poincaré [1890] démontre la divergence générale des séries de Lindstedt, mais souligne aussi que

[...] les considérations qui précèdent n'enlèvent rien au mérite pratique des développements de M. Lindstedt. Ils ne convergent pas; donc ils ne peuvent donner une approximation indéfinie; mais ils peuvent donner assez rapidement une approximation très grande et très suffisante pour les besoins de la pratique.

Je serais désolé d'avoir jeté quelque discrédit sur ces séries [...] parce que je regarde la méthode de M. Lindstedt comme l'une des meilleures qui soit connues. [Poincaré cité dans Nabonnand 1999b, 193 note 4]

---

11. Painlevé a généralisé ceci en 1897/1900 en démontrant qu'il n'existe aucune intégrale  $I_k$  algébriquement indépendante qui soit une fonction algébrique/uniforme des vitesses. Aujourd'hui, des théorèmes comme celui de Ziglin [1983] fournissent des conditions nécessaires pour l'intégrabilité. On peut en déduire que le problème des trois corps, au voisinage de la solution spéciale de Lagrange (1772), ne possède pas de système complet d'intégrales premières qui soient des fonctions méromorphes des positions et des vitesses [Tsygintsev 2000].

12. Par exemple, la masse du soleil est environ mille fois celle de la planète la plus grande, Jupiter.

13. Un exemple simplifié de la méthode de Lindstedt sera exposé en annexe C.

3. Le développement recherché pour le prix du roi Oscar II n'est pas une série du type perturbatif. On y cherche un développement convergent des coordonnées  $\vec{r}_i(t)$  sous la forme  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} f(t)^{\nu}$ . Il semble connu depuis longtemps que les solutions devraient être de cette forme, comme il apparaît dans une lettre de Weierstraß à Mittag-Leffler de 1883 :

Angenommen nun, es gehe die Bewegung der Art vor sich, daß niemals zwei Punkte zusammentreffen, so sind  $[\vec{r}_i, i = 1, \dots, n]$  eindeutige analytische Funktionen von  $t$ , nicht bloß für reelle Werte dieser Größe, sondern auch für alle komplexen, in denen die zweite Koordinate (der Faktor von  $i$ ) dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt. [...] Man wird schwerlich *a priori* die Bedingungen ermitteln können, die erfüllt sein müssen, damit niemals zwei Punkte zusammentreffen können, man wird vielmehr dieselben als erfüllt voraussetzen müssen [...] Poincaré hat [...] [dieses] Theorem ebenfalls hergeleitet, wenigstens unter Voraussetzung des Newtonschen Gesetzes und daraus die Folgerung gezogen, es sei möglich, die Koordinaten aller Punkte in konvergierende Reihen der Form  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varphi(t)^{\nu}$  zu entwickeln, wo  $\varphi(t)$  eine bestimmte Funktion von  $t$  ist. Dies ist leicht einzusehen. [...] Aber man erhält auf diese Weise nicht Aufschluß darüber, ob die gemachte Voraussetzung erfüllt ist oder nicht und es ist auch die Form, in der sich die Ausdrücke der Koordinaten darstellen, nicht der Natur der zu beschreibenden Bewegungen angemessen. [Weierstraß cité dans Nabonnand 1999b, 119]<sup>14</sup>

Après avoir reçu de Mittag-Leffler une copie de cette lettre, Poincaré remarque qu'en effet la forme  $\varphi(t) = \tanh(\alpha t/2)$  n'est utilisable que dans le cas où il n'y a pas de collision, mais dans ses propres études il travaille avec la fonction  $\varphi(t) = \tanh(\alpha s(t)/2)$ , où  $s(t)$  est une fonction monotone de  $t$  encore à déterminer. Selon Poincaré :<sup>15</sup>

Les solutions de ce problème [de détermination de  $s(t)$ ] sont en nombre infini [...] Il est clair que dans chaque cas particulier, il faut choisir la plus *zweckmäßig*.<sup>16</sup> Or je ne crois pas que dans le cas de la Mécanique Céleste celle que j'ai donnée soit la plus *zweckmäßig*, je crois qu'il y a mieux à trouver.

Il apparaît que la possibilité des collisions entre les corps est l'obstacle principal pour d'établir une solution analytique du problème.

4. En 1909, Sundman [1909] démontre qu'une solution sous forme de séries convergentes pour tout temps  $t$  existe pour le problème des trois corps. Voici l'énoncé de son théorème :

Si les constantes des aires dans le mouvement des trois corps par rapport à leur centre commun de gravité ne sont pas toutes nulles, on peut trouver une

14. L'orthographe de l'allemand est mis à jour.

15. Lettre de Poincaré à Mittag-Leffler du 22 mai 1883.

16. utile, pratique ; en allemand dans l'original.



variable  $\tau$  telle que les coordonnées des corps, leurs distances mutuelles et le temps soient développables en séries convergentes suivant les puissances de  $\tau$ , qui représentent le mouvement pour toutes les valeurs réelles du temps, et cela quels que soient les chocs qui se produisent entre les corps. [Sundman 1909, 3]

Sur l'invitation de Mittag-Leffler, Sundman [1913] publie une exposition d'ensemble de ses travaux dans les *Acta Mathematica*. Constatons qu'aucune trace de ce résultat ne se trouve dans la correspondance entre Mittag-Leffler et Poincaré. Le travail de Sundman [1907, 1909, 1913] fournit pourtant la solution recherchée par la question 1, posée par Weierstraß pour le prix du roi Oscar II une trentaine d'années auparavant, au moins pour le cas  $n = 3$ .<sup>17</sup>

Nous verrons dans la section prochaine dans quelle mesure les idées de Weierstraß et de Poincaré sont proches de celles de Sundman.

### 3 La théorie de Sundman

Nous présentons les idées principales de la solution de Sundman du problème des trois corps.<sup>18</sup> Nous allons nous servir du problème des deux corps afin d'illustrer les idées et nous mentionnons les généralisations nécessaires pour le problème des trois corps.<sup>19</sup>

Il est bien connu que dans le problème des deux corps, le mouvement est dans le plan perpendiculaire à la direction du **moment cinétique**<sup>20</sup>  $\vec{L}$ . Comme  $\vec{L}$  est conservé, son orientation et donc aussi le plan du mouvement des deux corps sont fixés. Il est pratique d'utiliser des variables complexes  $z = x + iy$  afin de décrire le mouvement dans le plan (voir annexe A pour la terminologie des nombres complexes).

Afin d'en donner un exemple simple, considérons le mouvement d'une planète autour du soleil. Dans la figure 1, nous montrons les orbites de Mars et de Jupiter, vues depuis la terre. Leur mouvement apparent

---

17. Sundman a trouvé la solution pour le cas  $n = 3$ . Presque un siècle plus tard, et à l'aide de techniques différentes, Wang [1991] a pu obtenir un résultat analogue pour toute valeur de  $n$ .

18. Cette section est inspirée de l'article pédagogique de Saari [1990].

19. Pour une présentation mathématiquement complète, dans une notation moderne, voir [Abraham et Marsden 1978, Siegel et Moser 1971].

20. Pour une particule à la position  $\vec{r}$ , de vitesse  $\vec{v}$  et de masse  $m$ , le vecteur du moment cinétique s'obtient comme  $\vec{L} = m\vec{v} \wedge \vec{r}$ , où  $\wedge$  est le produit vectoriel. Pour un système de  $n$  particules, chacune avec un moment cinétique  $\vec{L}_i$ , où  $i = 1, 2, \dots, n$ , le moment cinétique total du système est  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$ .

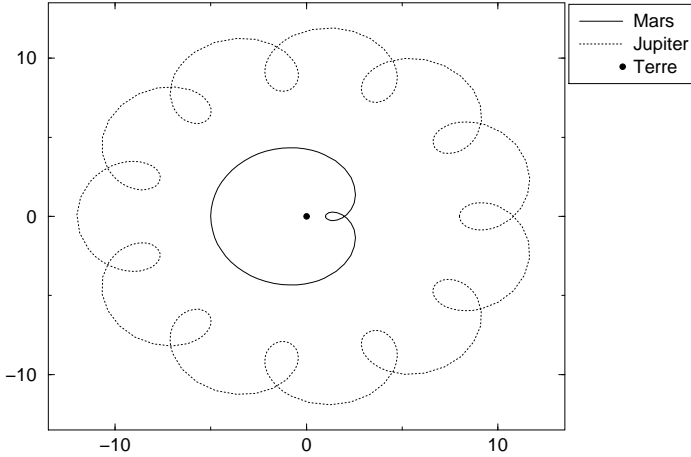


FIGURE 1 – Mouvement de Mars (orbite intérieure) et de Jupiter (orbite extérieure) vus depuis la terre (au centre).

semble très compliqué et il pourrait sembler difficile à décrire et comprendre d'un point de vue physique une telle orbite. Bien entendu, nous savons aujourd'hui que cette difficulté n'est qu'apparente et qu'en réalité, les planètes sont en orbite autour du soleil. Ces orbites sont, en première approximation, des cercles, dont les rayons et les périodes sont rassemblés dans le tableau :

planète	rayon	période
Terre	2	1
Mars	3	2
Jupiter	10	12

A l'aide des variables complexes, nous pouvons exprimer les orbites circulaires des planètes, vues depuis le soleil, sous la forme

$$z_T(t) = 2 e^{2\pi i t} \ ; \ z_M(t) = 3 e^{\pi i t} \ ; \ z_J(t) = 10 e^{\pi i t/6} \quad (3)$$

Le mouvement relatif à la terre s'obtient par un simple changement de repère. Par exemple, pour l'orbite apparente de Mars, on a

$$\begin{aligned} z(t) &= z_M(t) - z_T(t) \\ &= 3 e^{\pi i t} - 2 e^{2\pi i t} \\ &= 2 + e^{\pi i t} (3 - 4 \cos(\pi t)) \end{aligned} \quad (4)$$

et géométriquement, l'orbite est un limaçon. De même, pour Jupiter, on obtient un limaçon relatif à un cercle tournant

$$\begin{aligned}\tilde{z}(t) &= z_J(t) - z_T(t) \\ &= 2e^{-5\pi it/3} + e^{\pi it/6} \left( 10 - 4 \cos \left( \frac{11\pi}{6} t \right) \right)\end{aligned}\quad (5)$$

Une telle description géométrique est déjà utilisée par Ptolémée et les astronomes de son école. Dans notre terminologie, il admet que les orbites apparentes sont de la forme

$$z_{\text{apparent}}(t) = a_1 e^{b_1 \pi it} + a_2 e^{b_2 \pi it} \quad (6)$$

où les  $a_1, a_2, b_1, b_2$  sont des constantes à déterminer. Le premier terme décrit le mouvement d'une planète selon le "défèrent" et le second décrit le mouvement additionnel selon "l'épicycle". Plus systématiquement, le travail des astronomes avant Copernic revient à chercher une orbite planétaire sous la forme

$$z_{\text{apparent}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{b_j \pi it} \quad (7)$$

et de trouver les  $a_j$  et  $b_j$ , c.à.d. d'effectuer une analyse de Fourier d'une orbite planétaire. Il est clair qu'en incluant suffisamment de termes, on peut arriver à un très bon accord avec les observations. Bien que ce jugement soit complètement récuratif et anhistorique, on ne peut s'empêcher de comparer la simplicité des expressions lorsque l'on choisit comme origine du repère le soleil (3) et la complication, entièrement artificielle, d'expressions comme celles qui apparaissent dans (6). Un "bon" choix de variables permet de simplifier considérablement l'analyse des orbites apparemment compliquées de la figure 1.

De même, pour le problème des trois corps, c'est un nouveau choix de variables qui va permettre à Sundman de contourner un obstacle majeur à la compréhension de ce problème. La théorie de Sundman utilise le fait (voir annexe A) que la valeur du rayon de convergence d'une série est liée aux singularités des fonctions complexes. Or, dans le cadre du problème des trois corps, l'interprétation de telles singularités est particulièrement simple : En effet Painlevé a démontré en 1895 que pour  $n = 3$  toute singularité des fonctions  $\vec{r}_i(t)$  par rapport à  $t$  correspond soit à une collision entre deux corps soit à une collision entre les trois

corps.<sup>21</sup> Afin d'établir l'existence d'une solution sous forme d'une série convergente, Sundman [1907] part de ce théorème et progresse en deux étapes :

1. Éliminer les collisions *binaires* entre deux particules.
2. Exclure les collisions *ternaires* entre toutes les trois particules.

Dans le cas des *collisions binaires*, on peut se restreindre au problème à deux corps.<sup>22</sup> En effet, dans ce cas l'orbite a la forme d'une ellipse qui s'écrit en coordonnées polaires sous la forme  $r(\theta) = a/(1 - e \cos \theta) \simeq a(1 + e \cos \theta)$  où  $a$  est le **demi-grand axe** et  $e$  est l'**excentricité** de l'orbite. Dans le cas  $r = 0$  et lorsque l'excentricité  $e$  tend vers 1, la variable angulaire  $\theta$  passe d'une valeur proche de 0 à une valeur proche de  $2\pi$ . Pour obtenir une solution analytique, cette singularité en  $\theta$  doit être éliminée. Pour cela, on décrit le mouvement dans le plan à l'aide d'une variable complexe  $z = z(t) = x + iy$ . L'équation du mouvement s'écrit alors sous la forme

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{z}{r^3}, \quad r = |z| \quad (8)$$

On obtient une régularisation du problème par le changement de variables [Sundman 1909, éq. (11)]

$$w = w(s) = z(t)^{1/2}, \quad ds = \frac{dt}{r(t)} \quad (9)$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2 w(s)}{ds^2} - \frac{h}{2} w(s) = 0 \quad (10)$$

où la constante  $h$  correspond à l'énergie totale.<sup>23</sup>

La solution de l'équation (10) est pour  $h \neq 0$  :

$$w(s) = w_0 \cosh\left(\sqrt{h/2} s\right) + w_1 \sinh\left(\sqrt{h/2} s\right)$$

où  $w_{0,1}$  sont des constantes. Elle est sans singularité et se développe en série convergente en  $s$  pour tout  $|s| < \infty$ .

---

21. Pour  $n \geq 5$ , des singularités qui ne proviennent pas de collisions simples peuvent apparaître. Pour  $n = 4$ , on ne sait pas s'il existe d'autres singularités que des collisions ou non.

22. Lors d'une collision binaire, le 3e corps est loin des deux autres qui se rencontrent. Au voisinage de la collision, son influence peut donc être négligée.

23. Les calculs détaillés sont exposés dans l'annexe B. Nous montrerons que ce changement de variables est très naturel d'un point de vue physique.

Pour le problème des trois corps, l'idée reste la même mais le temps  $t$  est remplacé par une nouvelle variable  $\omega$  [Sundman 1909, 1913]

$$dt = \left(1 - e^{-r_0/\ell}\right) \left(1 - e^{-r_1/\ell}\right) \left(1 - e^{-r_2/\ell}\right) d\omega \quad (11)$$

où  $r_{0,1,2}$  sont les distances entre les trois corps et  $\ell$  est une constante.

Le cas des *collisions ternaires* semble être résolu par le fait qu'une collision entre les trois particules n'est possible que si le moment cinétique  $\vec{L}$  s'annule.<sup>24</sup> En effet, la condition  $\vec{L} \neq \vec{0}$  est facile à contrôler à partir des conditions initiales<sup>25</sup> et donc élimine toute singularité en  $\vec{r}_i(t)$  pour toute valeur réelle de  $t$ . Cependant, un examen plus précis révèle une complication technique dont nous allons discuter brièvement, avant de revenir à la solution de Sundman.

Pour que le rayon de convergence du développement en série du rayon vecteur  $\vec{r}_i(t)$  soit non nul, il est nécessaire qu'il n'y ait pas de singularité au voisinage de l'axe réel. Or ceci n'est pas trivial à établir même dans le cas  $n = 2$ . Dans ce cas, si l'excentricité  $e < 1$ , l'équation de l'orbite s'écrit (équation de Kepler)

$$r(v) = a(1 - e \cos v) \quad , \quad t = v - e \sin v \quad (12)$$

Bien que cette solution soit régulière pour les temps réels, la fonction  $r(t)$  a des singularités complexes aux points

$$v_k = 2\pi k + i \operatorname{arcosh}(1/e) \quad (13)$$

(où  $k$  est un entier arbitraire) qui sont proches de l'axe réel pour  $e$  suffisamment proche de 1. Mais comme la valeur de  $e$  dépend de celle du moment cinétique  $\vec{L}$  du problème des deux corps, on peut montrer lorsque  $\vec{L} \neq \vec{0}$ ,

$$r > r_{\min} > 0 \quad (14)$$

où la valeur de  $r_{\min}$  dépend de  $\vec{L}$ .

24. Cette proposition semble avoir déjà été établi par Weierstraß, mais Sundman [1907] fut le premier à publier la démonstration, voir aussi [Siegel et Moser 1971].

25. Si une collision ternaire se réalise, on a  $\vec{L} = \vec{0}$ . Dans ce cas et au voisinage d'une collision, Sundman trouve "*que les corps se meuvent de telle manière [ . . . ] [qu'ils] ou bien forment de plus en plus un triangle équilatéral ou bien se rangent de plus en plus en ligne droite.*" [Sundman 1907].

Ce type de configuration s'appelle *configuration centrale* et est aussi présent dans le cadre du problème à  $n$  corps.

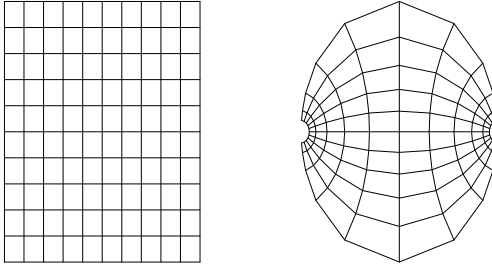


FIGURE 2 – Transformation conforme de la variable complexe  $\omega$  (à gauche) vers le plan complexe  $\tau = \tanh(\pi\omega/4)$  (à droite).

Sundman [1907] a pu démontrer un résultat analogue pour le problème des trois corps, c.à.d. que si  $\vec{L} \neq \vec{0}$ , on a

$$|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| > C(\vec{L}) > 0 \quad (15)$$

où  $C(\vec{L})$  est une constante. Ayant ainsi établi que pour  $\vec{L} \neq \vec{0}$ , il existe une borne inférieure pour les distances entre les corps, Sundman considère des temps formellement complexes et montre que le développement en série des rayons vecteurs ne présente aucune singularité dans un ruban  $|\text{Im } \omega| < B(L)$  où  $B(L)$  est une constante connue dépendant du moment cinétique  $\vec{L}$  et  $\omega$  est défini par l'éq. (11). Il suffit alors d'utiliser les transformations conformes considérées par Weierstraß et Poincaré

$$\tau = \tanh(\pi\omega/4B) \quad (16)$$

qui projette le ruban  $|\text{Im } \omega| < B$  sur l'intérieur du cercle  $|\tau| < 1$  (voir figure 2 pour le cas  $B = 1$ ). Dans la partie gauche, un morceau du plan complexe en  $\omega$  est présenté. En exprimant les rayons vecteurs  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\tau)$  en fonctions de  $t(\tau)$ , il n'existe aucune singularité pour  $|\tau| < 1$ . Comme  $\tau = \pm 1$  correspond à  $t = \pm\infty$ , on a une représentation des positions sous forme d'une série uniformément convergente pour toute valeur  $|t| < \infty$ . Le problème des trois corps a donc trouvé sa solution sous la forme initialement conjecturée par Weierstraß.

## 4 Remarques finales

La solution de Sundman ne fait appel qu'aux techniques d'analyse standard des fonctions complexes, déjà connues à son époque. Dans ce sens, elle confirme l'attente de Weierstraß, formulée lors de l'annonce du prix du roi Oscar II, que la solution devrait être basée sur des idées simples. On peut voir aussi que par rapport à Weierstraß et Poincaré, Sundman ajoute deux nouvelles idées : (i) la régularisation des collisions binaires à l'aide de son changement de variables (11) ce qui contourne la difficulté de caractériser le cas des collisions binaires et (ii) sa démonstration de séparation minimale des trois corps lorsque  $\vec{L} \neq \vec{0}$ . Pourtant, la forme même de cette solution ne fournit aucune information sur le comportement du système. Au contraire, le théorème de Sundman met en évidence que la propriété d'analyticité ne peut pas servir à caractériser l'une ou l'autre propriété qualitative d'un système avec trois corps. En particulier, aucun renseignement sur la stabilité pour des temps très longs n'est fourni. De plus, ces séries sont inutiles pour des calculs numériques. Certes, elles convergent, mais la vitesse de convergence est tellement faible qu'un calcul purement numérique, utilisant des techniques de résolution directe des équations de mouvement (1) sans faire appel aux développements des solutions en séries, est plus fiable.<sup>26</sup> Weierstraß et Poincaré, ont-ils pressenti ce comportement en constatant que la variable  $\tau$  était "*nicht der Natur der zu beschreibenden Bewegung angemessen*"<sup>27</sup> et de ne pas être "*zweckmäßig*" ?

Initialement, et surtout après la publication, de son article dans les *Acta* [Sundman 1913], le travail de Sundman fut reçu avec grand intérêt,<sup>28</sup> mais il paraît avoir été très vite oublié [Barrow-Green 1997]. Il n'est pas entièrement évident que cet oubli soit dû au succès énorme des méthodes qualitatives de Poincaré pour l'étude des systèmes dynamiques, ni que quelques unes des idées contenues dans les travaux de Sundman puissent encore aujourd'hui stimuler de nouvelles directions de recherche.<sup>29</sup> Siegel et Moser [1971] consacrent tout un chapitre de

---

26. Ceci vient du fait que le premier changement de variable (11), de la forme  $\omega \sim t^{1/3}$ , ralentit la dynamique. Enfin, le second changement illustré en figure 2 concentre toute la dynamique au voisinage de  $\tau \simeq \pm 1$ .

27. pas conforme à la nature du mouvement à décrire.

28. En 1913, Sundman recevait le prix Pontécoulant de l'Académie des Sciences, dont la valeur a été doublée à cette occasion [Barrow-Green 1997].

29. Dans le contexte de la mécanique quantique, l'intégrabilité du cas  $n = 2$  mène à une symétrie dynamique, que Pauli en 1927 a utilisé dans son traitement de l'atome d'hydrogène. Existe-t-il une trace de la solution de Sundman en mécanique quantique, en tenant compte de la non-intégrabilité du cas  $n = 3$  ?

leur traité de la mécanique céleste aux travaux de Sundman [1907, 1909, 1913] et soulignent leur importance. En revanche, Abraham et Marsden [1978] ne mentionnent qu'en passant les “œuvres classiques de Sundman (1913)”.

Notons encore que la solution de Sundman est constructive. En relation avec le débat sur l'*intuitionisme* de Brouwer [Diacu 1996], il n'est pas sans intérêt de remarquer que même une approche entièrement constructive ne donne pas toujours des résultats directement utiles. Cet exemple<sup>30</sup> est une illustration excellente de la difficulté à définir des notions mathématiques d'une telle manière que des résultats profonds peuvent être obtenus.

## Remerciements/Agradecimentos

Je remercie P. Nabonnand pour ses multiples commentaires et sa critique détaillée d'une première version de cet article et T. Gourieux pour une lecture critique de ce travail.

Agradeço ao Complexo Interdisciplinar da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa pela sua hospitalidade, onde este trabalho foi escrito.

## Annexe A. Sur les fonctions complexes

Nous rappelons quelques faits élémentaires sur les fonctions analytiques  $f(z)$  d'une variable complexe  $z$  [Knopp 1976]. Un **nombre complexe**  $z = x + iy$  est caractérisé à l'aide de deux nombres réels  $x, y$ . On peut le représenter comme étant un point  $(x, y)$  dans un plan, voir figure 3a.  $z$  est réel si  $y = 0$ . On appelle  $x = \operatorname{Re} z$  la **partie réelle** de  $z$  et  $y = \operatorname{Im} z$  la **partie imaginaire** de  $z$ . L'**unité imaginaire**  $i$  satisfait à la condition  $i^2 = -1$ . Le nombre  $\bar{z} = x - iy$  s'appelle le **conjugué complexe** de  $z$ . Alternativement, on peut écrire en **coordonnées polaires**  $z = \rho e^{i\theta}$  ou  $\theta$  est l'angle indiqué dans la figure 3 et  $\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$  est la longueur de la ligne entre l'origine  $(0, 0)$  et le point  $z$ . Une **fonction uniforme**  $f$  est définie en associant à chaque nombre complexe  $z$  *un seul* autre nombre complexe  $f(z)$ . Des Exemples de fonctions uniformes sont

---

30. La solution satisfait à toutes les demandes de rigueur mathématique, selon les standards établies par Weierstraß et pourtant ce sont les méthodes qualitatives de Poincaré qui nous renseignent sur le comportement, éventuellement chaotique, du problème des trois corps.



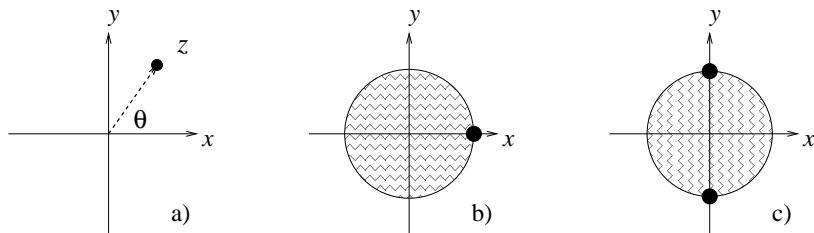


FIGURE 3 – (a) La variable complexe  $z = x + iy$  et les cercles de convergence et les singularités des fonctions (b)  $f_1(z) = 1/(1 - z)$  et (c)  $f_2(z) = 1/(1 + z^2)$ . Les deux séries pour  $f_1$  et  $f_2$  autour de  $z_0 = 0$  convergent à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$ .

les **fonctions algébriques** comme  $f(z) = 1 + z$  ou  $(2 + z)/(1 + z^2)$  ou les **fonctions entières** (c.à.d. analytiques dans le plan complexe entier, sauf à l'infini  $z = \infty$ ) comme  $e^z$ ,  $\cos z$  ou  $\sin z$ . La relation d'Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{A1}$$

montre que ces fonctions ne sont pas **algébriquement indépendantes**. Il existent aussi des **fonctions multiformes**, comme  $f(z) = \sqrt{z}$ , où à chaque valeur de  $z$  correspondent plusieurs branches de  $f(z)$  avec des valeurs différentes.

Comme on le fait pour des fonctions réelles, on peut introduire la notion de la **dérivée**  $f'(z) = df(z)/dz$  d'une fonction complexe. On dit que  $f$  est **analytique** dans un domaine  $D$  du plan complexe si pour tout  $z, z_0 \in D$ ,  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$  existe. Si  $f$  est analytique dans un domaine autour d'un point  $z_0$ , il existe un nombre maximal  $\rho > 0$  et des constantes  $f_n$  tels que  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$  s'écrit sous forme d'une série *uniformément* convergente pour  $|z - z_0| < \rho$ .  $\rho$  s'appelle **rayon de convergence**. De plus, sur le cercle  $|z - z_0| = \rho$  il existe une singularité où  $f$  n'est plus analytique. Un résultat profond de la théorie des fonctions complexes est qu'on peut caractériser une fonction analytique par le lieu et la nature de ses singularités, voir [Knopp 1971].

Nous ne donnons ici que deux exemples illustratifs. Considérons les fonctions (qui fournissent des exemples des **fonctions méromorphes**)

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - z} \ ; \ f_2(z) = \frac{1}{1 + z^2} \tag{A2}$$

Si  $|z| < 1$ , on peut représenter ces deux fonctions à l'aide des séries convergentes autour du point  $z_0 = 0$

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} ; f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} z^{2\nu} \quad (\text{A3})$$

À l'intérieur du cercle  $|z| = 1$  indiqué dans la figure 3, les séries convergent uniformément. Le domaine de convergence, qui est l'ensemble des  $z$  complexes tels que  $|z| < 1$ , est limité par la présence d'une ou plusieurs singularités sur le cercle  $|z| = 1$ . Pour la fonction  $f_1$ , la singularité  $z = 1$  est sur l'axe réel. En revanche, les singularités de la fonction  $f_2$  sont en  $z = \pm i$ , hors de l'axe réel. Même si  $f_2(z)$  n'a aucune singularité apparente pour toute valeur réelle de  $z$ , ses singularités complexes empêchent la série associée de converger pour  $|z| > 1$ .

## Annexe B. Sur les collisions binaires

La notion de collision binaire dans le problème des deux corps est présentée de manière élémentaire. De part la conservation du vecteur du moment cinétique  $\vec{L}$ , le mouvement des deux corps est situé dans le plan perpendiculaire à  $\vec{L}$ . Les positions dans ce plan seront définies par les coordonnées  $(x, y)$  et la distance entre les deux corps par le module  $r = |z|$  du nombre complexe  $z = x + iy$ . Après un changement de coordonnées, l'équation du mouvement s'écrit

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{z}{r^3} \quad (\text{B1})$$

La propriété de *conservation de l'énergie* s'établit ainsi : pour  $z$  et son conjugué complexe  $\bar{z}$  on a  $d^2 z/dt^2 = -z/r^3$  et  $d^2 \bar{z}/dt^2 = -\bar{z}/r^3$ . En multipliant la première par  $d\bar{z}/dt$  et la seconde par  $dz/dt$ , la somme des deux équations donne

$$\frac{d\bar{z}}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = -\frac{1}{r^3} \left( z \frac{d\bar{z}}{dt} + \bar{z} \frac{dz}{dt} \right) \quad (\text{B2})$$

Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{z}}{dt} \right) = 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{z\bar{z}}} \right) \quad (\text{B3})$$

Par intégration, on trouve

$$\left| \frac{dz}{dt} \right|^2 = 2 \left( \frac{1}{r} + h \right) \quad (\text{B4})$$

où la constante  $h$  est l'énergie totale du mouvement.

L'équation (10) se déduit par changement de variables : Dans la suite, nous écrivons  $\dot{z} = dz/dt$  et  $z' = dz/ds$  et de même pour  $r$  et  $w$ . En appliquant le changement de variables (9) on obtient  $\dot{z} = r^{-1}z'$  et  $z' = 2ww'$ . De plus,  $r = |w|^2$  et la conservation de l'énergie (B4) s'écrit dans les nouvelles variables sous la forme

$$2|w'|^2 = 1 + hr \quad (\text{B5})$$

À l'aide des relations  $\ddot{z} = r^{-3}[rw'' - r'z']$  et  $\bar{w}^{-1} = w/r$ , l'équation du mouvement (B1) s'écrit sous la forme

$$2w'' - (2|w'|^2 - 1) \frac{w}{r} = 0 \quad (\text{B6})$$

L'équation (10) se déduit immédiatement de (B5) et (B6).

Dans la suite de cette annexe, nous discutons la régularisation du mouvement à travers une collision binaire. On peut toujours admettre<sup>31</sup> que le mouvement est situé sur l'axe réel. La distance entre les deux corps est décrite par l'équation du mouvement  $d^2x/dt^2 = -x^{-2}$ . D'abord on s'intéresse à trouver la fonction inverse  $t = t(x)$  qui satisfait l'équation

$$x = (2 + 2hx) \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 \quad (\text{B7})$$

En intégrant directement, on obtient

$$t - t_0 = \int dx \sqrt{\frac{x}{2 + 2hx}} \quad (\text{B8})$$

où  $t_0$  est une constante. L'intégrale se calcule, pour  $h \neq 0$ , à l'aide d'un changement de variables  $x = h^{-1} \sinh^2(u/2)$  et la solution finale s'écrit (sous forme paramétrique)

$$(2h)^{3/2} (t - t_0) = \sinh(u) - u \quad , \quad 2hx = \cosh(u) - 1 \quad (\text{B9})$$

---

31. À l'aide d'un changement de variables qui laisse invariant les équations de mouvement.

Lors d'une collision,  $x$  tend vers 0. Au voisinage de 0, après l'équation (B9), on a  $x \sim u^2$ . De même,  $\sinh(u) - u \sim u^3 \sim t - t_0$ . On a au voisinage d'une collision

$$x \sim (t - t_0)^{2/3} \quad (\text{B10})$$

où l'on identifie  $t_0$  comme étant l'instant de la collision.

La série  $t - t_0 = u^3 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} u^{2\nu}$  est convergente pour tout  $|u| < \infty$  et monotone en  $u$  pour tout  $u$  réel.<sup>32</sup> On en déduit donc que la fonction inverse  $u = u(t - t_0)$  existe et se développe formellement en série  $u = (t - t_0)^{1/3} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} (t - t_0)^{2\nu/3}$  où les  $b_{\nu}$  s'obtiennent à partir des  $a_{\nu}$ . En injectant ceci dans l'expression de  $x(u)$  donnée par l'équation (B9), on peut trouver des coefficients  $B_{\nu}$  tels que

$$x = x(t - t_0) = (t - t_0)^{2/3} \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} h^{\nu} (t - t_0)^{2\nu/3} \quad (\text{B11})$$

Une telle série a un rayon de convergence non nul si la fonction complexe qu'elle représente est dérivable. Considérons alors la fonction complexe  $x = x(\tau)$  où  $\tau = (2h)^{-1}(\sinh(u) - u)^{2/3}$ . Cette fonction est définie si la fonction  $\tau = \tau(u)$  a une fonction inverse  $u = u(\tau)$ . Pour ceci il faut que la dérivée  $d\tau/du$  ne s'annule pas. Or,  $d\tau/du = 0$  si  $u = u_k = 2\pi i k$  où  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  est un nombre entier arbitraire. Dans la suite, nous écrivons  $\tau_k = \tau(u_k) = (\sinh(u_{\pm k}) - u_{\pm k})/(2h)$ . Donc la dérivée

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{du} \frac{du}{d\tau} = \frac{dx}{du} \left( \frac{d\tau}{du} \right)^{-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sinh(u) [\sinh(u) - u]^{1/3}}{\cosh(u) - 1} \quad (\text{B12})$$

existe si  $u \neq u_k$ . Autour de  $u_0 = 0$ , elle existe aussi, parce que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{dx}{d\tau} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3}{2} u \left( \frac{u^3}{6} \right)^{1/3} \left( \frac{u^2}{2} \right)^{-1} = \frac{3}{\sqrt[3]{6}} \quad (\text{B13})$$

est une constante finie. Comme  $u = 0$  correspond à  $\tau = 0$  et donc à  $t = t_0$ , la fonction  $x(\tau)$  est dérivable au voisinage de la collision binaire et n'a aucune singularité dans le domaine  $|\tau| < |\tau_{\pm 1}|$ . La série formelle (B11) a donc un rayon de convergence  $\rho \geq |\tau_{\pm 1}| > 0$  et représente une fonction analytique.

Si  $u = u_k$ , on a  $x = 0$  à l'instant  $t$  donné par  $\tau = \tau_k$ . Par conséquent, les  $u_k$  caractérisent une suite de (pseudo)collisions. Le passage de  $t$  à

32. Ici,  $a_{\nu} = (2h)^{-3/2}/((2\nu + 3)!)$ .

$\tau$  nous a permis de régulariser les équations afin de pouvoir continuer analytiquement le mouvement au-delà la collision en  $t = t_0$ . La non-analyticité apparente à  $\tau = \tau_k$  pour  $k \neq 0$  indique simplement que le choix de  $\tau$  n'est pas encore optimal et devrait être remplacé par la variable  $s$  définie par Sundman.<sup>33</sup>

Notons qu'on a aussi une analyticité de  $x$  en fonction de  $h$ .

## Annexe C. Un exemple de série de Lindstedt

Nous exposons brièvement la méthode perturbative de Lindstedt, en suivant [Rand et Armbruster 1987]. A titre d'exemple, et dans un souci de simplicité technique, nous considérons l'**oscillateur de van der Pol**, défini par l'équation différentielle non linéaire

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} = 0 \quad (C1)$$

où  $x = x(t)$  est la fonction à déterminer en fonction du paramètre  $\varepsilon$ .<sup>34</sup> Pour simplifier l'exposé, nous poserons comme **conditions initiales**  $x(0) = \Xi_0$  et  $dx/dt(0) = 0$ , où  $\Xi_0$  est une constante. On sait que pour toute valeur de  $\varepsilon$ , il existe une solution périodique, appelée **cycle limite** et que  $x(t)$  va toujours évoluer vers le cycle limite lorsque  $t$  tend vers l'infini. Comme seul le cas  $\varepsilon = 0$  est facilement soluble, on se propose de résoudre le cas général sous forme d'une **série perturbative**

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (C2)$$

et d'utiliser un changement de variable temporelle  $\tau = \omega t$  proposé par Lindstedt où

$$\omega = 1 + k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (C3)$$

En écrivant  $f'(\tau)$  pour la dérivée par rapport à  $\tau$  de la fonction  $f(\tau)$ , on obtient le système d'équations, jusqu'aux termes du second ordre en  $\varepsilon$  inclus

$$\begin{aligned} x_0'' + x_0 &= 0 \\ x_1'' + x_1 &= x_0'(1 - x_0^2) - 2k_1 x_0 \\ x_2'' + x_2 &= x_1'(1 - x_0^2) - 2x_0 x_0' x_1 - 2k_1 x_1'' - (2k_2 + k_1^2) x_0'' \\ &\quad + k_1(1 - x_0^2) x_0' \end{aligned} \quad (C4)$$

33. Pour le rapport avec les variables (9) utilisées par Sundman, on a au voisinage d'une collision  $x(t) \sim (t - t_0)^{2/3}$  et  $u \sim (t - t_0)^{1/3}$ , donc  $du = \frac{1}{3}(t - t_0)^{-2/3} dt$ . On retrouve ainsi une propriété de la régularisation de Sundman dans (9).

34. Si  $\varepsilon = 0$ , on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique.

qui peut être résolu par récurrence. Les conditions initiales  $\Xi_0 = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots$  se développent de la même manière et on tient comme conditions initiales à l'instant  $t = 0$

$$x_i(0) = X_i, \quad x_i'(0) = 0; \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C5})$$

On déduit des équations (C4), (C5) que  $x_0(\tau) = X_0 \cos \tau$  et

$$x_1'' + x_1 = \left[ \frac{1}{4} X_0^3 - X_0 \right] \sin \tau + 2k_1 X_0 \cos \tau + \frac{1}{4} X_0^3 \sin(3\tau) \quad (\text{C6})$$

La résolution de (C6) peut conduire à l'apparition de termes dits séculaires de la forme  $\tau \sin \tau$  ou  $\tau \cos \tau$ . De tels termes croissent indéfiniment avec le temps et rendent les développements non-convergeants. Pour les éliminer, il faut que les coefficients de  $\sin \tau$  et  $\cos \tau$  dans l'équation (C6) s'annulent, d'où  $X_0 = 2$  et  $k_1 = 0$ . Par récurrence, on obtient

$$x_1(\tau) = -\frac{1}{4} \sin(3\tau) + \frac{3}{4} \cos(3\tau) + X_1 \cos \tau \quad (\text{C7})$$

$$\begin{aligned} x_2'' + x_2 &= \left[ 4k_2 + \frac{1}{4} \right] \cos \tau + 2X_1 \sin \tau - \frac{3}{2} \cos(3\tau) \\ &\quad + 3X_1 \sin(3\tau) + \frac{5}{4} \cos(5\tau) \end{aligned}$$

L'élimination des termes séculaires amène à poser<sup>35</sup>  $X_1 = 0$ ,  $k_2 = -\frac{1}{16}$ . Notons encore que l'amplitude et la fréquence  $\omega$  de la solution périodique sont complètement fixées par la non linéarité de l'équation (C1) et ne dépendent pas des conditions initiales. À partir des expressions explicites on voit aussi qu'on obtient le cycle limite sous forme d'une **série trigonométrique** dont nous avons trouvé les premiers termes

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon}{4} [3 \cos(3\omega t) - \sin(3\omega t)] + \dots, \quad (\text{C8}) \\ \omega &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + \dots \end{aligned}$$

## Références

ABRAHAM, R. ET MARSDEN, J.E.

1978 *Foundations of Mechanics*, 2e édition, Benjamin (Reading, Mass.)

---

35. Le fait que  $k_2 \neq 0$  démontre que  $\omega \neq 1$  est nécessaire.

ANDERSSON, K.G.

1994 Poincaré's discovery of homoclinic points, *Archive Hist. Exact Sciences* 48, 133–147

BARROW-GREEN, J.

1994 Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three-body problem, *Archive Hist. Exact Sciences* 48, 107–131

1997 *Poincaré and the Three-Body Problem*, American and London Mathematical Societies (London)

BRUNS, E.H.

1887 Über die Integrale des Vielkörperproblems, *Acta Mathematica* 11, 25–96

DIACU, F.N.

1996 The Solution of the  $n$ -Body Problem, *Math. Intelligencer* 18, No. 3, 66–70

DIACU, F.N. ET P. HOLMES, P.

1996 *Celestial Encounters – the Origins of Chaos and Stability*, Princeton University Press (Princeton)

KNOPP, K.

1976 *Funktionentheorie I*, 13. Auflage, Walter de Gruyter (Berlin)

1971 *Funktionentheorie II*, 12. Auflage, Walter de Gruyter (Berlin)

MITTAG-LEFFLER, G.

1885 Communication sur un prix de mathématiques fondé par le roi Oscar II, *Acta Mathematica* 7, I–VI (1885/86)

MONTGOMERY, R.

2001 A New Solution to the Three-Body Problem, *Notices of the American Mathematical Society*, 48, 471–481

NABONNAND, P.

1999a The Poincaré–Mittag-Leffler Relationship, *Math. Intelligencer* 21, No. 2, 58–64

1999b *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*, Birkhäuser (Basel)

POINCARÉ, H.

1882 Sur les groupes fuchsien, *Acta Mathematica*, 1, 1–62 (1882); Œuvres 2, 108–168

1890 Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica* 13, 1–270 (1890)

RAND, R.H. ET ARMBRUSTER, D.

1987 *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Springer (Heidelberg), ch. 1

SAARI, D.G.

1990 A visit to the newtonian  $N$ -body problem via elementary complex variables, *Am. Math. Monthly* 97, 105–119

SIEGEL, C.L. ET MOSER, J.K.

1971 *Lectures on Celestial Mechanics (Vorlesungen über Himmelsmechanik)*, Springer (Heidelberg 1956/71).

SUNDMAN, K.F.

1907 Recherches sur le problème des trois corps, *Acta Societatis Scientiarium Fennicae* 34, No 6

1909 Nouvelles recherches sur le problème des trois corps, *Acta Societatis Scientiarium Fennicae*, 35, No 9

1913 Mémoire sur le problème des trois corps, *Acta Mathematica* 36, 105–179

TSYGVINTSEV, A.

2000 La non-intégrabilité méromorphe du problème plan des trois corps, *C.R. Acad. Sci. Paris (Série I)* 331, 241–244

WANG, Q.D.

1991 The global solution of the  $n$ -body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 50, 73–88

ZIGLIN, S.L.

1983 Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian Mechanics, *Funct. Anal. Appl.* 16, 181–189 et 17, 6–17