

Le pragmatisme peircéen, la théorie des catégories et le programme de Thiel *

Ralf Krömer

Université de Hanovre

Résumé : La théorie des catégories vaut tant par ses applications mathématiques que par les débats philosophiques qu'elle suscite. Elle sert à *exprimer* en topologie algébrique, à *déduire* en algèbre homologique et, en tant qu'alternative à la théorie des ensembles, à *construire des objets* en géométrie algébrique dans la conception de Grothendieck. La théorie des catégories est une discipline fondamentale en le sens de Christian Thiel, car elle traite d'opérations typiques de la mathématique de structures. Cette thèse est défendue à l'aide d'une interprétation particulière du pragmatisme peircéen d'après laquelle la justification de la connaissance mathématique ne se fait pas par la réduction à des objets de base mais plutôt, à chaque niveau, par rapport au sens commun technique (les théories de niveau ultérieur ont pour objets les théories des objets originaux).

Abstract: Category theory is important by its mathematical applications and by the philosophical debates it causes. It is used to *express* in algebraic topology, to *deduce* in homological algebra and, as an alternative to the theory of sets, to *construct objects* in Grothendieck's conception of algebraic geometry. Category theory is a fundamental discipline in Christian Thiel's sense, because

*. Une version préliminaire de cet article a été présentée (en anglais) lors du colloque PILM. Je remercie Manuel Rebuschi et les auditeurs de mon intervention (notamment Steve Awodey, F. William Lawvere et Jean Pierre Marquis) ainsi que les membres du comité scientifique dudit colloque pour leurs suggestions et remarques qui m'ont aidé à approfondir l'argumentaire de l'article. Des remerciements particuliers sont à adresser à Gerhard Heinzmann pour l'enseignement de sa philosophie pragmatiste qu'il m'a offert pendant mes années à Nancy.

it is a theory of some typical operations of structural mathematics. This thesis is defended through a particular interpretation of peircean pragmatism; in this perspective, justification of mathematical knowledge is not provided for by the reduction to basic objects but rather by a technical common sense intervening on each level (the theories on the higher level having as their objects the theories of the original objects).

1 La théorie des catégories : son histoire et sa philosophie

En abordant la tâche d'écrire une histoire de la théorie des catégories¹, on s'aperçoit rapidement qu'on ne peut limiter son attention aux contributions mathématiques de la théorie, car au cours de son développement, elle a suscité bien des questions épistémologiques. On peut citer le refus de Bourbaki d'adopter le langage catégoriel, le débat sur les fondements ensemblistes de la théorie des catégories et l'idée de fonder les mathématiques *par* la théorie des catégories. Il s'agira ici de discuter ces questions dans la perspective d'une certaine approche philosophique.

Avant d'entrer dans l'analyse philosophique, il est important de rappeler brièvement les principaux apports mathématiques de la théorie. La théorie des catégories fut introduite en topologie algébrique. Dans une application du concept d'extension de groupe à un problème en théorie de l'homologie, Eilenberg et Mac Lane se sont intéressés aux critères nécessaires pour qu'il y ait un homomorphisme entre les limites inductives ou projectives de groupes intervenant en théorie de Čech [Eilenberg & Mac Lane 1942]. Ils ont alors décidé de publier un texte consacré uniquement au cadre conceptuel de ces critères, c'est-à-dire aux concepts d'homomorphisme naturel, foncteur, catégorie [Eilenberg & Mac Lane 1945]. Les réactions à ce texte pionnier furent mitigées — du fait qu'il se

1. La littérature historique existante est écrite en grande partie par des protagonistes de la théorie et s'intéresse plus aux détails techniques qu'à l'application d'une méthodologie rigoureuse d'historien professionnel. Mais aussi Leo Corry, bien qu'il entreprenne, dans son livre sur l'histoire des structures algébriques [Corry 1996], un examen méthodologique approfondi, arrive à une interprétation de la théorie des catégories dans la seule perspective du concept de structure, qui laisse ouvertes des questions importantes. Il faut donc tenir compte de cette littérature, mais également la considérer d'un oeil critique. De plus, il existe un nombre important de sources non publiées qui ont été rendu accessible tout récemment aux chercheurs (voir [Krömer 2005] pour une analyse des documents qui témoignent de l'activité du groupe Bourbaki dans les années 50). Tout cela justifie le projet d'une histoire plus complète de la théorie, projet que j'ai abordé dans ma thèse de doctorat [Krömer 2004].

contentait de clarifier des concepts, sans application directe. Toutefois, la théorie des catégories est devenue plus tard assez importante pour la topologie algébrique grâce au projet d'Eilenberg et Steenrod d'axiomatiser la notion de « théorie de l'homologie » en termes de foncteurs [Eilenberg & Steenrod 1952] et grâce au traitement par Kan des complexes semi-simpliciaux [Kan 1958].

Le travail d'Eilenberg-Mac Lane sur la relation entre homologie et extensions de groupe a conduit au transport de l'outil « homologie » dans un autre contexte d'application, à savoir l'algèbre. Le concept de base de cette « algèbre homologique » est la dérivation de foncteurs, développée par Cartan et Eilenberg dans le contexte de modules [Cartan & Eilenberg 1956] et transférée en théorie des faisceaux par Grothendieck [Grothendieck 1957] pour résoudre des problèmes que Serre avait rencontrés lors de sa tentative d'utiliser une théorie de cohomologie de faisceaux en géométrie algébrique [Serre 1955], problèmes dus aux propriétés de la seule topologie disponible en géométrie algébrique, la topologie de Zariski.

Avec l'orientation de Grothendieck vers la géométrie algébrique, la théorie des catégories commence à jouer un rôle prédominant dans cette discipline. Pour résoudre deux problèmes conceptuels que Cartier juge fondamentaux [Cartier 2000], celui de la définition du produit des variétés et celui du changement de corps de base, Grothendieck transforme la notion de variété en celle de « schéma ». La topologie de Zariski n'étant pas bien adaptée à certaines opérations nécessaires, Grothendieck la remplace, en s'appuyant toujours sur les moyens de la théorie des catégories, par les concepts de site et de topos (voir ci-dessous), concepts qui lui permettent, par exemple, d'établir une partie des conjectures de Weil.

Si l'on entreprend d'étudier attentivement le rôle de la théorie des catégories dans les innovations conceptuelles que je viens de décrire, on se trouve assez rapidement confronté à certaines questions épistémologiques.

Pour démontrer que la dérivation de foncteurs est possible dans une catégorie de faisceaux, Grothendieck doit s'intéresser à certaines constructions infinitaires (produit infini, somme infinie) ; comme on ne peut pas établir directement l'existence de tels objets² dans la catégorie des faisceaux, Grothendieck se contente de démontrer que si ces objets existent dans une catégorie C , alors ils existent aussi dans une catégorie définie à

2. Pour distinguer l'emploi formel que fait la théorie des catégories du terme « objet » des emplois usuels de ce terme, j'écrirai *objet* chaque fois qu'il s'agit du terme formel ; pour des raisons de symétrie, j'emploierai cette convention typographique aussi pour le terme « morphisme » bien que celui-ci soit bien sûr uniquement un terme formel.

partir de C par un moyen qu'il appelle « schéma de diagramme » [Grothendieck 1957, 130]. La démonstration est possible du fait que ces objets existent pour la catégorie des groupes abéliens et que la catégorie de faisceaux de groupes abéliens est définie par schéma de diagramme à partir de cette catégorie. Mais ce genre de constructions sur des catégories est difficilement réalisable en théorie des ensembles.

Pour résoudre les problèmes du produit des variétés et du changement de corps de base en géométrie algébrique, Grothendieck procède également de manière strictement catégorielle. À l'aide de certains faisceaux d'anneaux, définis par rapport à la topologie de Zariski sur l'ensemble des idéaux premiers d'un anneau commutatif, il obtient des objets qu'il appelle « schémas » ; il définit ensuite les **morphismes** de schémas et passe directement à la catégorie dans laquelle ces **morphismes** sont les **objets**. Il peut alors résoudre les deux problèmes à l'aide du produit dans cette catégorie³. Il est important de noter que ce produit ne coïncide pas avec l'espace produit des espaces topologiques sous-jacents ni non plus avec l'ensemble produit des ensembles sous-jacents ; l'opération (d'habitude paradigmatique) consistant à munir un ensemble d'une structure n'est pas applicable.

De même, en vue de remplacer la topologie de Zariski, Grothendieck substitue, pour les notions ensemblistes d'union, intersection et recouvrement ouvert (intervenant dans la définition de la notion de faisceau), des caractérisations de ces constructions en termes d'objets d'une catégorie. On peut alors transformer le concept de faisceau, à savoir définir un faisceau par rapport à d'autres catégories que celle des ouverts de Zariski — seulement si ces autres catégories disposent de tels objets (donc il n'est plus sous-entendu qu'elles proviennent d'un espace topologique au sens classique). Grothendieck appelle ces catégories des sites, et nomme topos la catégorie des faisceaux définis par rapport à un site. Répétons-le : il n'est plus question ici d'union, intersection etc. dans le sens de la théorie des ensembles ; ces constructions sont maintenant caractérisées autrement.

Les deux phénomènes suivants ont alors conduit à des débats intenses : d'une part, certaines constructions catégorielles mènent à des ensembles illégitimes par rapport aux formalisations usuelles de la théorie des ensembles ; d'autre part, le concept d'ensemble sous-jacent à une structure et les constructions ensemblistes usuellement appliquées aux ensembles structurés perdent une grande partie de leur importance pour la pratique mathématique. La discussion lors de laquelle Bourbaki re-

3. Pour plus d'informations, voir [Krömer 2004, 160sq].

fusa d'adopter le langage catégoriel fut marquée par ces phénomènes. Rappelons la position philosophique invoquée par Bourbaki : vu l'échec du programme initial de Hilbert, Bourbaki se contente de l'argument inductif pour la non-contradiction des mathématiques qui consiste en l'observation que le système sur lequel on s'appuie (la théorie des ensembles ZF) a été approuvé à maintes reprises. Si un jour se produisait tout de même une contradiction, alors on chercherait des solutions ad hoc. Or, lors du débat concernant les problèmes du fondement ensembliste de la théorie des catégories, Grothendieck a présenté ses Univers. Si Bourbaki avait pris au sérieux sa philosophie, il aurait ainsi pu invoquer une raison pertinente pour son opposition à cette proposition : en effet, en ajoutant l'axiome des univers, on perd la « sûreté empirique » de ZF dans la mesure où on n'a pas à sa disposition de démonstration de consistance relative pour l'axiome en question. Il est vrai qu'au moins selon les sources connues qui en témoignent, des raisons philosophiques de ce genre n'étaient pas explicitement invoquées lors de ce débat ; en revanche, ces sources font preuve que l'opération de munir un ensemble d'une structure était trop chère à certaines membres du groupe pour lui refuser la place centrale dans une mathématique des structures⁴.

L'idée d'éliminer l'ensemble sous-jacent provient de l'approche particulière que la théorie des catégories propose de la notion d'objet. La théorie des catégories emploie le terme, tout en laissant ouverte sa signification, en accord avec un certain nombre de postulats ; pour accéder à l'intention guidant cet emploi, le seul moyen est donc de déterminer les modèles de ces postulats. L'information sur un objet qui est présente dans la catégorie l'est sous la forme des **morphismes** arrivant à l'objet. On considère donc l'objet comme non appréhendable directement, comme caractérisé uniquement par son interaction avec les autres objets. Mais, bien entendu, au lieu d'introduire par cette voie une ontologie réductionniste qui ramène tout à des objets-points, irréductibles, on acquiert ainsi la possibilité de changer de perspective, de considérer des objets en extension dans une catégorie et de les réduire à des points dans une autre, ou encore de les interpréter une fois comme objets, une autre fois comme **morphismes** d'une catégorie. Cependant, ce sont bien souvent précisément les concessions ontologiques contenues dans l'idée d'ensemble sous-jacent qui conduisent, lors de ces transitions, à des problèmes de réalisation ensembliste. Or, comme les acteurs de la théorie poursuivaient justement la stratégie de ne plus s'intéresser beaucoup aux méthodologies liées à cette idée, ces problèmes ne leur semblent, pour le moins, pas centraux. C'était donc justement l'*interaction* des deux phénomènes (d'une part les

4. Pour une reconstruction de ce débat, voir [Krömer 2005].

ensembles illégitimes, d'autre part les méthodologies non-ensemblistes) qui a mis en évidence une certaine obsolescence de la théorie des ensembles en tant que fondement pour la théorie des catégories.

Ceci étant dit, il serait néanmoins, à mon avis, inadéquate de se contenter du vide ainsi créé (c'est-à-dire de ne donner aucune réponse à la question des fondements). Dans la suite, je présente plusieurs voies d'accentuer une position épistémologique alternative.

2 Le programme de Thiel

Christian Thiel, dans son livre „Philosophie und Mathematik“ [Thiel 1995], propose une approche alternative du problème de fonder les mathématiques. Dans l'élaboration de Thiel, cette proposition reste liée à la théorie des ensembles ; mais cette restriction ne lui est pas essentiel — ce qui permet de s'en inspirer dans notre cas. Les traits caractéristiques de cette proposition sont les suivants : Thiel envisage un fondement des mathématiques *sans engagement ontologique*, et il met un accent sur l'analyse des *opérations de la pratique mathématique*.

Par *recherche fondationnelle*, Thiel entend la distinction d'une discipline fondamentale parmi les disciplines mathématiques. En vue d'une telle discipline fondamentale, Thiel désigne, aux pages 313-314 de son ouvrage, un programme de rassembler les types possibles d'opérations entreprises dans la pratique des mathématiques („Erfassung der möglichen Typen von Operationen, die in der Mathematik auf ihrem gegenwärtigen Stand vorgenommen werden“). Il résume :

Das Ergebnis könnte sehr wohl sein, daß die Universalität der Mathematik auf der immer neuen Anwendbarkeit der (jeweils bekannten!) sehr allgemeinen Operationen beruht und nicht darauf, daß die Mathematik von besonders allgemeinen („ontologisch ersten“ oder jedenfalls irreduziblen) Gegenständen handelt. Daß wir in der Mathematik i.a. über „Mengen von . . .“ reden, und uns mit den Pünktchen auf jeweils verschiedene, aber stets inhaltlich bestimmte Sorten mathematischer Gegenstände beziehen, legt in der Tat bereits nahe, daß wir zwar immer die gleichen mengentheoretischen *Operationen* in verschiedenen Gebieten der Mathematik ausführen, daß es aber nicht „Mengen“ als autonome *Gegenstände* gibt, die eine eigene Kategorie bilden oder etwa gar die Gegenstände „in sich“ haben, deren Typus an der Stelle der Pünktchen unseres Ausdrucks genannt wird. Es gilt daher zu bedenken, ob nicht die Idee einer Fundamentaldisziplin der Mathematik im Sinne einer „regionalen Ontologie“ besser *ad acta* gelegt und statt dessen eine „Fundamentaldisziplin“ ins Auge gefaßt werden sollte, die als fundamentaler *Kanon* für den Umgang „mit allem und jedem“ in der

Mathematik gerade die Aufgabe erfüllt, die einer Fundamentaldisziplin im Sinne der bisherigen Darlegungen zudedacht war.

Au lieu de voir dans les ensembles les objets ontologiquement primaires des mathématiques, Thiel voit dans les opérations de la théorie des ensembles des opérations fondamentales en mathématiques, et il cherche à donner un « canon » de telles opérations fondamentales qui constituerait la discipline fondamentale. Ce qui est à analyser par une étude fondationnelle, selon Thiel, c'est l'*universalité* des mathématiques ; il avance l'hypothèse que cette universalité repose sur l'applicabilité universelle d'un certain nombre d'opérations générales — et l'analyse de cette applicabilité est, selon lui, le vrai devoir d'une „Fundamentaldisziplin“. L'analyse des problèmes épistémologiques de la théorie des catégories, énumérés plus haut, est certainement une entreprise plus modeste, mais il semble y avoir des points communs.

L'école d'Erlangen a fait des premiers pas dans la réalisation du programme de Thiel ; ce qui est à critiquer dans ces contributions, c'est tout d'abord qu'elles s'éloignent de la pratique mathématique, car les opérations y présentées restent dans un cadre constructif. Aussi a-t-il explicitement exclu de son analyse la théorie des catégories. Or, comme je l'ai déjà constaté, l'universalité d'opérations ensemblistes est mise en question dans le contexte de la théorie des catégories ; en la laissant de côté, on se prive donc de la possibilité de saisir les limitations de l'analyse qu'on a entrepris concernant ces opérations.

En même temps, la théorie des catégories elle-même a été considérée bien souvent comme une théorie qui sert à étudier certaines opérations fondamentales en mathématiques. Par exemple, Jean Piaget écrit :

[...] rappelons que le structuralisme de Bourbaki est en voie de transformation sous l'influence d'un courant qu'il est utile de signaler, car il fait bien apercevoir le mode de découverte, sinon de formation, des structures nouvelles. Il s'agit de l'invention des « catégories » (Mac Lane, Eilenberg, etc.) [...] C'est assez dire que, en insistant sur les fonctions, les catégories sont axées non plus sur les structures mères, mais sur les procédés mêmes de mise en relation qui ont permis de les dégager, ce qui revient à considérer la nouvelle structure comme tirée, non pas des « êtres » auxquels ont abouti les opérations précédentes, mais de ces opérations mêmes en tant que processus formateurs.

Ce n'est donc pas sans raison que S. Papert voit dans les catégories un effort pour saisir les opérations du mathématicien plus que de « la » mathématique. C'est là un nouvel exemple de cette abstraction réfléchissante qui tire sa substance non pas des objets mais des actions exercées sur eux (même quand les objets antérieurs étaient déjà le produit d'une telle abstraction) [...] [Piaget 1968, 24].

La distinction faite par Papert⁵ entre les opérations du mathématicien et les opérations de « la » mathématique me semble importante. Le programme de Piaget, on le sait, était celui d'identifier les racines des concepts et opérations mathématiques dans le développement de l'individu en se concentrant à l'apprentissage de concepts et opérations par l'enfant ; au cours de la réalisation de ce programme, Piaget a identifié des modes de fonctionnement de l'acquisition conceptuelle, dont la citation donnée ci-dessus mentionne celui de l'« abstraction réfléchissante ». Toutefois, je doute (malgré la distinction de Papert) que l'approche génétique en épistémologie prend suffisamment en compte le fait que les mathématiciens ont, contrairement aux enfants, déjà internalisé beaucoup de connaissances d'expert. Dans la suite, j'essaierai de donner une place à cette connaissance d'expert dans l'analyse épistémologique des mathématiques en général et celle de la théorie des catégories en particulier.

3 Esquisse d'une épistémologie pragmatiste

Rappelons d'abord une distinction importante concernant l'usage d'un langage : on peut utiliser le langage *en tant qu'objet* ou *en tant qu'outil*. Dans l'activité des mathématiciens, cette distinction se manifeste surtout dans la situation suivante : après avoir résolu un problème (éventuellement par de longs calculs), on passe à la clarification des concepts en vue d'une solution plus claire. Ici, le plan conceptuel originalement introduit en vue d'une telle clarification (c'est-à-dire en tant qu'outil) peut évidemment à son tour donner lieu à des problèmes difficiles, exigeant pour leur solution un plan conceptuel encore plus élevé ; ainsi, les problèmes d'origine peuvent disparaître de la pratique d'une communauté scientifique en faveur de nouveaux problèmes.

L'approche traditionnelle en philosophie des mathématiques voit dans ces observations l'esquisse d'une hiérarchie de niveaux conceptuels de plus en plus abstraits⁶. L'idée que l'opération constitutive de cette hiérarchie est celle de l'abstraction entraîne une épistémologie réductionniste :

5. Seymour Papert, collaborateur de Jean Piaget, figure parmi les protagonistes de la recherche en intelligence artificielle. Pour des indications bibliographiques concernant les écrits de Papert en question, voir [Barot 2002, 30], faisant référence à [Piaget 1967].

6. Voir par exemple [Cavaillès 1976]. Je n'essaie pas ici de comparer le rôle du concept d'abstraction dans cette vue avec celui du concept d'« abstraction réfléchissante » dans la théorie de Piaget, mentionné ci-dessus — comparaison qui serait certainement intéressante.

la seule voie de justification est une régression vers le niveau de base (car le seul moyen de garantir la constitution d'un objet abstrait est de le concrétiser). C'est uniquement sur le niveau de base qu'intervient, sous une forme ou sous une autre, cette capacité particulière amenant à une connaissance qu'est l'intuition. En accord avec cela, dans la philosophie des mathématiques classique, la validité des énoncés mathématiques est établie en réduisant les énoncés à un certain nombre d'axiomes de base (la théorie des ensembles, p.e.) ; l'intuition intervient soit dans l'accès au contenu des axiomes (Frege), soit dans les méthodes de démonstration de non-contradiction (Hilbert), soit dans l'absence actuelle de contradiction (Bourbaki). Si on accepte l'existence dont parle la théorie des ensembles, elle *fournit* l'existence des objets mathématiques ainsi réductibles à elle ; c'est donc une ontologie.

Or, les transitions conceptuelles liées à la théorie des catégories ne fournissent pas une hiérarchie de niveaux stratifiée ; ceci est clair du fait qu'on peut souvent « appliquer un concept sur lui-même ». De plus, le concept d'ensemble et l'opération d'abstraction d'un ensemble jouent, comme on l'a vu, un rôle de moins en moins important dans l'activité autour des catégories — d'où la difficulté principale du présent travail de trouver un point de vue philosophique qui permette de comprendre cette situation. En raison de l'absence d'une hiérarchie de niveaux stratifiée, une approche réductionniste n'est pas en mesure de fournir une justification de la constitution des objets (lors de la régression, on peut tomber dans un cercle) ; on a besoin d'une approche qui parvienne à justifier la constitution des objets directement au niveau d'une articulation et qui ne se contente pas de réduire la transition outil-objet à une simple abstraction.

Une telle approche devrait également rendre compte de la distinction entre usage *correct* et usage *raisonnable* d'un concept. On peut contrôler si un usage est correct en appliquant un critère formel, algorithmique, au moins pour des concepts admettant une explication formelle dans le sens de Carnap. Cependant, le seul critère à la disposition des interlocuteurs d'un langage pour contrôler si un usage est raisonnable (ou intentionnel) réside dans le fait qu'ils ont appris ce que Wittgenstein appelle le « jeu de langage » correspondant.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cette distinction a lieu dans l'analyse du discours mathématique ; un usage est jugé correct mais non raisonnable quand on lui attribue un caractère « pathologique ». Par exemple, on a appliqué le principe d'abstraction de la théorie des ensembles à des prédicats inventés dans une perspective « clinique » juste pour montrer que l'explication formelle du concept d'« ensemble » qui

était proposée conduisait à des contradictions ; mais ces prédicats n'intéressent pas les mathématiciens et sont donc jugés « pathologiques ».

Bien que la question : « quels sont les critères pour qu'un usage soit conforme aux intentions ? » n'admette pas de réponse précise (au sens où ces critères ne sont pas formels), elle se pose pour l'historien (qui doit, face aux faits historiques, s'interroger sur la manière dont étaient choisis les usages « raisonnables » ou « intéressants » d'un concept ou encore les énoncés intéressants parmi tous les énoncés que l'on peut déduire des axiomes) ; elle se pose aussi pour le philosophe qui, selon Poincaré, a la tâche de comprendre les choix d'axiomes qui ont été faits [Poincaré 1908, 158].

Mais quelle est la compréhension que peut nous fournir l'approche traditionnelle ? Analyser une démonstration mathématique de manière réductionniste, ça revient à la découper en des pas élémentaires, en remplaçant des propositions sur des objets complexes par des propositions sur des objets plus simples. Avec une telle approche, les *propositions* elles-mêmes deviennent plus complexes : il devient peut-être plus facile de saisir la *vérité* (formelle) des propositions (par la vérité des composants et le principe de compositionnalité), mais il devient plus difficile de saisir la *signification* des propositions. Concernant les déductions, on peut faire le même constat en remplaçant « signification » par « stratégie » ou « idée clé ». Donc, l'approche réductionniste n'explique pas : il n'augmente pas notre compréhension des choix qui ont été faits.

Il me semble que le pragmatisme (ou, plus précisément, le « pragmatisme ») de Charles Sanders Peirce peut nous procurer de moyens pour attaquer ces questionnements philosophiques. Peirce essaie une nouvelle évaluation du concept d'*intuition* en s'opposant à l'approche traditionnelle qui voit dans l'intuition une *capacité particulière amenant à une connaissance* — approche qui est, par exemple, présente dans l'idée cartésienne de l'intuition innée⁷. Dans ce qui suit, je présente la conception alternative de l'intuition contenue dans la philosophie de Peirce selon une interprétation originale proposée par Gerhard Heinzmann.

7. Dans une polémique contre le Cartésianisme, Peirce donne également un argument bien connu contre le réductionnisme :

The reply to the argument that there must be a first is as follows: In retracing our way from our conclusions to premisses, or from determined cognitions to those which determine them, we finally reach, in all cases, a point beyond which the consciousness in the determined cognition is more lively than in the cognition which determines it [Peirce 1931-1935, 5.263].

Pour une vue d'ensemble de la position de Peirce envers la philosophie cartésienne, voir [Peirce 1984].

L'épistémologie à caractère pragmatique soutient tout d'abord que l'on ne peut pas parler de l'existence d'objets indépendamment des méthodes utilisées, donc qu'il n'y a pas de connaissance indépendamment des moyens de connaissance. Ainsi, l'ontologie coïncide avec l'épistémologie. Ce point de vue entraîne le rejet d'une intuition absolue, de telle sorte que le caractère intuitif d'un énoncé dépend de la situation dans laquelle il est énoncé. Ainsi, l'intuition est, pour le pragmatisme, une *façon particulière d'utiliser un langage* : l'usage intuitif d'un énoncé est un usage lors duquel la validité de l'énoncé n'est pas mise en question.

Si on considère l'usage d'un *concept* plutôt que celui d'un énoncé, on a en principe deux voies ouvertes : ce qui n'est pas mis en question lors de l'usage intuitif d'un concept est soit le caractère correct, soit le caractère raisonnable de l'usage envisagé. Pourtant, en mathématiques, le caractère correct d'un usage est une condition nécessaire mais non suffisante pour le choix de cet usage ; par conséquent, le philosophe (qui cherche à comprendre les choix qui étaient faits) doit plutôt se préoccuper du caractère raisonnable. Or, comme on l'a vu, un usage est appelé « raisonnable » quand la mise en question ne s'impose pas aux interlocuteurs lors de l'usage — alors qu'ils appellent un usage « pathologique » quand ils sentent qu'il n'est pas conforme aux intentions, donc quand ils se sentent forcés de le mettre en question. Le critère du jeu de langage est principalement négatif. Donc, un usage intuitif d'un concept ne peut avoir lieu que lors d'un usage « raisonnable », conforme aux intentions.

Les critères de validité et d'usage raisonnable forment ce que j'appelle le « sens commun » du système de langage — terminologie qui s'explique du fait que si l'on presse l'utilisateur du langage de mettre en question les usages habituellement intuitifs, il fera appel au « sens commun ». Or, la mise en question des critères dépend du contexte et des connaissances d'expert. Cette observation donne la possibilité d'une justification par rapport à un sens commun de niveau technique. Dans cette optique, les objets du niveau ultérieur ne sont pas de simples abstractions des objets originaux, comme le prétend la position réductionniste, mais ce sont les théories mêmes de ces objets originaux. Car pour l'expert, une telle théorie, bien qu'originellement conçue comme outil, peut devenir elle-même un objet. Donc, contrairement à l'épistémologie réductionniste selon laquelle l'intuition n'intervient qu'au dernier niveau de régression pour établir la validité des énoncés de base, selon l'épistémologie pragmatiste, l'intuition intervient à chaque niveau car les critères d'usage sont mis en question sur un niveau et non pas sur un autre (c'est exactement la différence entre usage comme objet et usage comme outil).

Dans une discussion philosophique profonde de cette approche, il se

rait nécessaire d'examiner les relations qu'elle a avec d'autres approches en philosophie des sciences. Une telle discussion ne peut être abordée ici de manière détaillée ; à titre d'exemple, je signale en passant l'observation suivante : le principe que la connaissance se comprend en examinant son mode d'acquisition entraîne la non-séparation des capacités de fonder la connaissance d'une part et de guider la connaissance (c'est-à-dire son acquisition) d'autre part ; cette vue est opposée à Hans Reichenbach avec sa distinction (abondamment employée en philosophie des sciences) entre *erkenntnisleitend* et *erkenntnisbegründend*, respectivement entre contexte de découverte et contexte de justification. Comparons-la aussi au programme de Thiel discuté ci-dessus. Thiel propose de remplacer les objets de base par un arsenal (un « canon ») d'opérations de base. Ainsi, sa perspective reste en principe réductionniste (bien que « pragmatiste » en le sens qu'il s'intéresse aux opérations, à l'aspect pragmatique). En tout cas, le point commun entre les deux propositions est l'abandon de la perspective ontologique.

4 Interprétation pragmatiste de la théorie des catégories

La position pragmatiste désignée ci-dessus est pertinente dans le traitement philosophique de la théorie des catégories. Dans la suite, je sou tiendrai cette affirmation sous trois aspects :

- a) les constructions illégitimes ;
- b) la présence de deux types différents de catégories ;
- c) l'objet de la théorie des catégories.

ad a). Les constructions illégitimes prises en considération par les catégoriciens s'imposent naturellement dans les études envisagées⁸. En particulier, il manque tout caractère « pathologique » aux concepts concernés — peut-être parce qu'ils ne sont pas conçus pour *parler de*, pour *être sur* l'auto-applicabilité, à l'encontre des prédicats conduisant aux antinomies en théorie des ensembles qui le sont dès le début. C'est exactement du fait de ce caractère « raisonnable » que les catégoriciens

8. L'échelon des constructions illégitimes prises en considération a d'ailleurs bougé historiquement, en fonction de l'élargissement de certains usages : *Eilenberg-Mac Lane* avaient conscience uniquement des problèmes des « catégories larges » (solubles par NBG). Ils ne font pas d'usage substantiel d'une catégorie de foncteurs, et ils disent explicitement qu'ils ne visent pas à faire de constructions sur des catégories. À l'époque de *Grothendieck*, ces types de constructions (j'ai mentionné la construction par schéma de diagramme) jouent un rôle important ; la solution par NBG n'est plus satisfaisante. C'est dans cette situation que Grothendieck invente ses univers.

sont persuadés que l'on peut (et doit) se servir de ces constructions, bien que les univers de Grothendieck ne fournissent pas de justification satisfaisante — et cela, soulignons-le, non seulement par rapport à la position de Bourbaki, mais également par rapport à la position pragmatiste développée ci-dessus. Cette dernière affirmation est facilement reconnue en vertu de l'observation qu'en s'appuyant sur les univers pour justifier l'emploi des constructions en question, on remplacerait, dans une attitude réductionniste, l'*obscurum* par l'*obscurius*, donnant une fois de plus raison à Peirce dans sa critique du réductionnisme. Car ce n'est pas aux propositions originales mais justement aux traductions de ces propositions dans le cadre des univers que les chercheurs attribuent un caractère pathologique (ou au moins artificiel)⁹.

Le fait que la hiérarchie des niveaux ne soit pas stratifiée ne pose donc aucun problème pour les experts de la théorie des catégories : l'illégitimité éventuelle d'un concept par rapport à la théorie des ensembles n'empêche pas la justification de son emploi. Comment peut-on expliquer sensiblement cette situation ? Pour ce faire, l'inspection d'une autre attribution surprenante d'un caractère « raisonnable » peut nous être utile.

ad b). La thèse suivant laquelle la constitution des objets se justifie par rapport à un sens commun technique est valide dans le cas de la théorie des catégories. Les usages intuitifs, en tant qu'outils, justifient les usages en tant qu'objets, ce qui est clair du fait que des catégories qui seraient pathologiques par rapport au jeu de langage des « ensembles munis d'une structure » sont néanmoins raisonnables grâce aux applications fécondes que l'on peut en faire.

Cet argument exige d'être élaboré. D'abord : il n'y a pas de définition précise du terme « structure » tel qu'il est employé dans le discours des mathématiciens, bien que Bourbaki en ait proposé une qui toutefois n'est pas acceptée par la communauté scientifique¹⁰. L'emploi du terme est plutôt gouverné par des règles informelles, par un jeu de langage que chaque mathématicien sait jouer (on est donc déjà sur un premier niveau de sens commun *technique*). Ceci admis, beaucoup de catégories ont pour objets les ensembles munis d'un certain type de structure et pour morphismes les fonctions entre ces ensembles respectant cette structure — mais il y a d'autres catégories qui ne sont pas de ce type, c'est-à-dire dont

9. Voir [Feferman 1977, 155], [Bénabou 1985, 13] et [Krömer 2004, section 7.3.4].

10. Dans la terminologie introduite par Leo Corry : la tentative de Bourbaki d'intégrer au *corps* (*body*) des mathématiques contemporaines le concept de structure n'a pas eu de succès — bien que ce concept soit si important dans l'*image* de ces mathématiques.

les objets et morphismes ne relèvent pas du jeu de langage « ensembles munis d'une structure etc. ». Parmi les catégories de ce deuxième type, certaines jouent un rôle prédominant dans l'histoire de la théorie. J'ai déjà évoqué la catégorie qui correspond à un ensemble partiellement ordonné (qui intervient dans la définition d'Eilenberg-Mac Lane d'une limite inductive ou projective et dans la définition d'un faisceau) ou encore les catégories de schémas ; mais on pourrait en enchaîner une multitude. Bien évidemment, ces catégories-là ne sont nullement considérées comme pathologiques.

Maintenant, quelle est la règle informelle pour l'emploi du terme « catégorie », c'est-à-dire le critère qui distingue les usages « raisonnables » du concept ? Si c'était celui du jeu de langage « ensembles munis d'une structure etc. », alors les catégories appelées ci-dessus « du deuxième type » devraient être traitées comme pathologiques. Le bon critère se situe en vérité à un niveau technique encore plus élevé. Cela se voit d'ailleurs déjà en inspectant uniquement la définition formelle, car malgré le caractère informel de l'emploi du terme « structure », on pourrait néanmoins parfaitement développer une définition *formelle* du concept qui n'admettrait que des modèles où les objets sont des *ensembles* et les morphismes sont des *fonctions* — tandis qu'on trouve des modèles de la définition actuelle qui ne tomberaient pas sous une telle définition modifiée (ledit « deuxième type » de catégories se décompose donc, en vérité, à son tour en plusieurs types qui sont en principe à distinguer). De plus, la définition actuelle est *conçue du tout début* pour englober aussi les catégories du deuxième type, car elle contient des conditions qui seraient redondantes si on se limitait aux catégories du premier type.

ad c). Je me suis déjà intéressé ci-dessus à l'interprétation que donne la théorie des catégories au terme « objet » ; les objets au sens catégoriel sont caractérisés de manière complètement externe, et il y a possibilité de faire ce que j'ai appelé « changer de perspective ». Mais il y a un sens usuel du terme « objet » selon lequel une théorie a des objets, est une théorie *de* quelque chose. Quels sont alors les objets (en ce sens) de la théorie des catégories ? Bien évidemment, on doit faire attention à ne pas simplement confondre les deux choses dénotées toutes les deux par le terme « objet » ; l'emploi du terme que propose la théorie des catégories est formel, contrairement à l'emploi usuel. Mais il y a néanmoins un point commun, comme on va le voir dans un instant en examinant pour le cas de la théorie des catégories la thèse pragmatiste selon laquelle les objets des théories de niveau ultérieur ne sont pas de simples abstractions des objets d'origine, mais les théories de ces objets. Le résultat sera que

cette thèse peut s'exprimer autrement : la théorie des catégories est une théorie d'opérations typiques de la mathématique des structures, et c'est en ce sens qu'elle a un caractère fondamental.

J'ai déjà insisté sur le fait que beaucoup de catégories ont pour objets les ensembles munis d'un certain type de structure et pour morphismes les fonctions entre ces ensembles respectant cette structure. Or, une catégorie de ce type peut être vue comme une certaine manière de coder la « théorie » de la structure en question (favorisant l'acquisition d'information sur la structure par l'étude de l'interaction des instances du type de structure s'exprimant en termes de fonctions et de composition de fonctions). Ce n'est pas par hasard que les objets d'une catégorie portent leur nom : en nommant ces entités mathématiques ainsi, on vise à les interpréter comme les objets d'une théorie mathématique (et à traiter la relation d'être objet d'une théorie mathématiquement). En ce sens, le concept de catégorie peut être obtenu (et était en fait obtenu historiquement) par la voie de l'abstraction : on fait abstraction des « propriétés essentielles » d'une telle codification d'une théorie. Une théorie de ce concept, c'est-à-dire un arsenal d'outils théoriques pour traiter des différentes catégories, est une théorie traitant de théories d'une structure¹¹.

Or, quand on développe une telle théorie, on s'aperçoit que cet arsenal s'applique aussi bien à d'autres cas, qui tombent sous la définition formelle de « catégorie » qu'on s'est donnée sans tomber sous la définition informelle de « codification d'une théorie d'un type de structure » (voir ci-dessus). De plus, il se trouve que les différents modèles du concept de « catégorie » pris ensemble en forment également un modèle (même selon la définition informelle citée : l'algèbre de composition des foncteurs forme une codification de la théorie dudit concept, vu comme « structure »). Ce modèle admet non seulement l'application d'outils provenant dudit arsenal, mais permet même de développer de nouveaux outils importants pour le traitement des différentes catégories. Du coup, ce modèle n'est pas plus que les autres considéré comme pathologique. Mais en admettant ces modèles (pour des raisons d'efficacité technique — voir ci-dessus), ne s'éloigne-t-on pas trop d'une théorie ayant pour objets les théories d'un type de structure ?

On l'a vu : en théorie des catégories, on acquiert de l'information sur un type de structure donné en favorisant l'étude de l'interaction des

11. Il est utile à signaler que ces observations ne trivialisent nullement la distinction faite entre objets constitués comme abstractions et objets constitués comme théories d'autres objets. Il est vrai que le *concept* de catégorie est obtenu par abstraction, mais par abstraction des propriétés essentielles de quoi ? — de théories d'un certain type. La théorie du niveau ultérieur a donc comme objets ces théories (et non pas des abstractions issues des *objets* de ces théories).

instances du type de structure s'exprimant en termes de fonctions et de composition de fonctions (il s'agit ici de ce que j'ai appelé ci-dessus la caractérisation externe des objets d'une catégorie). La partie d'une théorie structurale qui est codifiée dans la catégorie correspondante concerne les opérations qu'on exerce typiquement en étudiant les instances de la structure (passage aux sous-structures ou aux extensions, aux structures produit ou à des constructions semblables, à d'autres types de structures etc.). La théorie des catégories est une théorie de ces (types d') opérations ; on rejoint donc ici à la fois le programme de Thiel et l'avis de Papert. Leo Corry souligne à juste titre le fait que la théorie des catégories est plus efficace dans le traitement des structures que la théorie de Bourbaki à ce sujet, mais l'importance des catégories du deuxième type semble lui échapper. Car le succès de la théorie des catégories s'explique du fait qu'elle réussit à réconcilier deux choses : le besoin d'une théorie pour le traitement de structures d'une part, et la mise en place d'un outillage fécond, non limité à un propos unique, d'autre part. Elle y arrive parce qu'elle insiste sur les opérations qu'on exerce sur les structures, opérations qui figurent parmi celles (cherchées par Thiel) qu'on rencontre « partout » en mathématiques.

5 Conclusion

L'approche pragmatiste fournit un cadre d'interprétation qui permet de rendre compte de la mesure dans laquelle la théorie des catégories constitue une théorie d'opérations typiques ; cette approche justifie également l'abandon de la théorie des ensembles en tant qu'unique discipline fondamentale car elle met en évidence que ce qui se passe lors d'une transition de niveaux n'est pas forcément une simple abstraction (donc, en fin de compte, une simple formation d'ensembles). Cependant, la question (soulignée par Thiel) de l'universalité des mathématiques reste ouverte.

En constatant que l'universalité de certaines opérations ensemblistes est mise en question, on se rappelle le caractère strictement historique de tout choix de discipline fondamentale, caractère que Thiel a aussi reconnu dans son traité. En même temps, la théorie des catégories peut être vue comme constituant un point final du programme de Thiel, en ce sens qu'elle constitue une *théorie* d'opérations mathématiques. Or, bien évidemment, on peut très bien être d'avis que ce n'est pas encore la « bonne » théorie des opérations ; ainsi le programme de Thiel peut-il avoir bien d'autres points finaux.

Références

BAROT, EMMANUEL

2002 Dialectique de la nature pensante : la construction de la cognition mathématique, *Philosophia Scientiæ* 6 (1), 33–72, 2002.

BÉNABOU, JEAN

1985 Fibered categories and the foundations of naive category theory, *J. Symb. Logic* 50 [1], 10–37, 1985.

CARTAN, HENRI & SAMUEL EILENBERG

1956 *Homological Algebra*, Princeton : Princeton University Press 1956.

CARTIER, PIERRE

2000 Grothendieck et les motifs. *Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques IV*, IHES 2002.

CAVAILLÈS, JEAN

1976 *Sur la logique et la théorie des sciences*, Paris : Vrin. Première édition posthume 1946, troisième édition 1976.

CORRY, LEO

1996 *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Historical Studies 17, Basel : Birkhäuser 1996.

EILENBERG, SAMUEL & SAUNDERS MAC LANE

1942 Group extensions and homology, *Annals of Mathematics* (2) 43, 757–831, 1942.

1945 General theory of natural equivalences, *Transactions Amer. Math. Soc.* 58, 231–294, 1945.

EILENBERG, SAMUEL & NORMAN E. STEENROD

1952 *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press 1952.

FEFERMAN, SOLOMON

1977 Categorical Foundations and Foundations of Category theory, Butts, Robert E.; Hintikka, Jaakko (eds.) : *Logic, Foundations of Mathematics and Computability theory*, 149–169, Dordrecht : Reidel 1977.

GROTHENDIECK, ALEXANDER

1957 Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* 9, 119–221, 1957.

KAN, DANIEL

1958 Adjoint Functors, *Transactions Amer. Math. Soc.* 87, 294–329.

KRÖMER, RALF

2004 *Die Kategorientheorie : ihre mathematischen Leistungen, ihre erkenntnistheoretischen Implikationen. Eine historische und philosophische Würdigung.* Thèse de doctorat, Université de la Sarre (Allemagne) et Université Nancy 2. Résumé détaillé en français. Voir <http://www.univ-nancy2.fr/poincare/perso/kroemer/>.

2005 La « machine de Grothendieck », se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? La discussion de Bourbaki sur la théorie des catégories ; à paraître dans la *Revue d'Histoire des Mathématiques*.

PEIRCE, CHARLES SANDERS

1931-1935 *Collected Papers* (ed. Ch.Hartshorne/P.Weiss), 6 volumes. Cambridge MA : Belknap Press, 2nd ed. 1960.

1984 *Textes anticartésiens*, présentation et traduction de Joseph Chenu, Paris : Aubier Montaigne 1984.

PIAGET, JEAN

1967 (éd.) *Logique et connaissance scientifique*, Paris : Gallimard 1967.

1968 *Le Structuralisme*, vol. 1311 de *Que sais-je ?*, puf 1968.

POINCARÉ, HENRI

1908 *Science et méthode*, Paris : Flammarion 1908.

SERRE, JEAN-PIERRE

1955 Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.* 61, 197–278, 1955.

THIEL, CHRISTIAN

1995 *Philosophie und Mathematik*, Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1995.