YUVAL NE'EMAN

De l'autogéométrisation de la physique

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome S88 (1998), p. 145-152
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1998__S88__145_0>

DE L'AUTOGÉOMÉTRISATION DE LA PHYSIQUE

par Yuval NE'EMAN

1. Introduction

Platon et les Pythagoréens avant lui avaient édifié une conception géométrique de la Physique, basée sur leur seule intuition. Le rêve ne vit qu'une génération, Aristote s'empressant de le rejeter et de le remplacer par une doctrine « réaliste », niant l'existence du vide et de l'espace comme tel. Exemple du réalisme de la physique d'Aristote : ses lois du mouvement, où la friction est toujours présente par principe, de sorte qu'au lieu d'une loi d'inertie il postule de fait le contraire – et au lieu de la Seconde Loi de Newton il prône la proportionnalité entre la force et la vitesse – résultat correct en présence de friction ; voir le calcul de la « vitesse finale » d'une pierre qui tombe dans l'eau.

Galilée et Newton redécouvrent le vide, mais leur œuvre en physique n'invoque pas la géométrie. En Mathématiques, Descartes transforme la géométrie, de sorte qu'à la naissance de l'Analyse, les deux disciplines deviennent considérablement liées : on étudie le comportement d'une fonction et de ses dérivées par leur représentation géométrique. L'élément essentiel suivant est fourni par la théorie des groupes, naissant au début du XIX^{e} siècle, dans un cadre de tragédie humaine bien adapté au romanticisme de l'époque – ces deux adolescents géniaux, Évariste Galois et Hendryk Abel, l'un tué en duel après avoir passé la nuit à rédiger son testament mathématique, l'autre mourant de faim ou d'avoir essayé de manger la paille de son matelas – une semaine avant l'arrivée de la lettre l'appointant à une Chaire de Math à Berlin.

C'est en 1870-1872 que la synthèse essentielle se fait entre la géométrie et les groupes de symétrie. Cette fois aussi ce sont deux jeunes, dont un Norvégien – Felix Klein et Sophus Lie –, qui perçoivent et définissent l'affinité entre la géométrie et les groupes de transformation. Ils lancent le « programme d'Erlangen » – l'exploitation de cette affinité dans une étude taxonomique de la géométrie.

Le tandem d'Erlangen, *géométrie/traitement algébrique des symétries*, est en fait très naturel, mais l'histoire des sciences mathématiques au XX^{e} siècle fait ressortir une troisième contribution, celle de la Physique. C'est à cet aspect que nous voudrions donner sa place dans la suite de cet article.

2. Einstein, Minkowski et Emmy Noether

Dès le début du siècle, le rôle de la symétrie devient fondamental en Physique. Les deux « théories de la Relativité » d'Einstein sont des théories de symétrie, globale et cinétique pour la théorie « Restreinte » (1905), locale et dynamique en Relativité « Générale » (1915) – où les adjectifs « global » et « local » s'adressent à la dépendance de l'espace-temps. L'aspect géométrique est révélé par H. Minkowski. C'est en 1908 que ce dernier, dans une conférence à l'Association Allemande des Médecins et Naturalistes, réunie à Cologne, explique que le comportement des distances et du temps que venait de découvrir son ex-étudiant Albert Einstein (et que nous définissons aujourd'hui comme *le groupe de Poincaré*) correspond simplement aux isométries d'une géométrie pseudo-euclidienne, à métrique $(-1, -1, -1, +1)$, que nous appelons aujourd'hui *la métrique de Minkowski.* Sans s'en rendre compte, Einstein avait fait de la géométrie, comme M. Jourdan faisait de la prose. La favorite de Platon était entrée « sournoisement », se préparant à s'approprier la Physique.

La remarque de Minkowski déclenchait presque tout de suite une première invasion très réussie. Einstein calculait l'effet d'un champ gravitationnel (d'une étoile, par exemple) sur un rayon de lumière, utilisant la Relativité Restreinte pour passer de la masse à l'énergie ($E = mc^2$) dans la loi Newtonienne de la gravitation, et traitant la lumière en photons quantiques ($E = h\nu$) comme il l'avait fait pour l'effet photoélectrique quelques années plus tôt. Il obtenait une déflexion du rayon de lumière équivalente à la moitié de ce qu'il obtiendrait plus tard avec la Relativité Générale. Mais, à première vue, c'était la catastrophe : quatre ans après avoir proclamé la constance de la vélocité de la lumière, il trouvait qu'elle accélérait en approchant l'étoile, qu'elle décélerait après l'avoir dépassée – et qu'elle déviait de la ligne droite. Serait-il possible de garder la Relativité Restreinte dans toute sa pureté et en même temps décrire la gravitation? C'est là que l'existence d'une interprétation géométrique découvrait des possibilités nouvelles. Consultant son ancien camarade à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich, Marcel Grossmann, devenu géomètre depuis, Einstein pouvait poser une question précise : existe-t-il une métrique qui, quoique pseudo-euclidienne, prendrait quand même des valeurs non constantes sous l'action d'un champ quelconque ? De là à un espace courbe et à la géométrie Riemannienne – et donc à la Relativité Générale, le tracé était presque direct...

Un gros chapitre de Physique – la Gravitation (classique) – venait de se géométriser. On connaît le succès de cette théorie et les vérifications expérimentales de la description géométrique : la précession de l'orbite de la planète Mercure, la déflexion de la lumière par le champ gravitationnel du soleil, mesurée pendant les eclipses, le déplacement vers le rouge du spectre lumineux dans un champ gravitationnel, le ralentissement du temps dans ce champ, le traînage des cadres-repaires, etc. Les champs gravitationnels faibles pourraient encore être représentés sans invoquer la courbure de l'espace-temps, comme un champ physique superposé à une géométrie plate, mais pas les champs forts, les *trous noirs.* La théorie cosmologique alternative de N. Rosen, une théorie de cette classe, a été invalidée par la découverte de J. Taylor, le ralentissement du pulsar-double reproduisant précisément l'énergie perdue par le système par son rayonnement gravitationnel.

Klein et Lie avaient bien compris l'importance des symétries en Mathématiques, mais ils n'avaient pas pensé à la Physique. Ce fut Emmy Noether, élève de Clebsch, venue avec Klein à Göttingen, qui formulait en 1918 [1] la méta-théorie qui se réalise en ces deux « Relativités ». Elle reprenait le thème d'Invariance et du Calcul des Variations – issus des idées de Leibniz, co-inventeur de l'Analyse, dont l'inspiration provenait de son étude « des Maxima et des Minima », pendant que Newton s'inspirait des vitesses et des accélérations. Leibniz avait conçu ce « meilleur des mondes » comme une méta-théorie physique (c'est la méchanceté de Voltaire qui en fit une caricature dans *Candide*) – continuée par Jean Bernoulli, Euler, Lagrange et Maupertuis (aussi victime de Voltaire, qui l'accusait de plagiarisme, pour avoir repris le thème de Leibniz), et aboutissant au « plus paresseux » des mondes, plutôt qu'au meilleur, puisque c'est *le Principe de l'Action Minimale* qui en est sorti. Le premier théorème d'Emmy Noether s'inspire de la Relativité Restreinte et du rapport entre, d'une part, l'algèbre à dix dimensions des générateurs du groupe de Poincaré, et, de l'autre, les *lois de conservation* de l'énergie, de l'impulsion et du moment angulaire (généralisé à six composantes par la relativité). Généralisant, Mlle Noether démontre que toute invariance sous un groupe de Lie engendre une loi de conservation pour les observables correspondant à chacun des générateurs algébriques de ce groupe et donne la construction de la densité spatio-temporelle du courant de cet observable, en partant de l'action. L'inverse aussi est prouvé, à quelques conditions près.

Le second théorème de Mlle Noether s'inspire de la Relativité Générale. L'invariance sous un groupe de Lie à dépendance locale – ce que nous appelons aujourd'hui un *fibré* (en Mathématique) ou une *théorie de jauge* (en Physique) – contraint la théorie à remplacer les dérivées par des *dérivées covariantes.* Ceci détermine la dynamique, propagée par les connexions. Mlle Noether démontre que, pour une théorie à symétrie locale, il est possible de retrouver les densités de courant par leur couplage aux connexions.

3. La Seconde Géométrisation : Phase Cinétique (Symétrie Unitaire)

Les grandes étapes suivantes étaient la formulation de la Mécanique Quantique, achevée en 1925 et la construction de la première théorie relativiste de champs quantiques (TRCQ), l'Électrodynamique Quantique, en 1948. Tout ceci n'a rien de géométrique, et vers 1950-1960, la plupart des chercheurs considèrent la géométrie comme un aspect propre au caractère de l'interaction gravitationnelle exclusivement. Pour les groupes, citons Hermann Weyl [2] qui – dans la préface à la seconde édition de son ouvrage *La Théorie des Groupes et la Mécanique Quantique* – s'adresse aux physiciens, qui manifestent le bonheur que leur cause l'idée de s'être débarrassés de la *« Peste » des Groupes.* Weyl leur explique qu'ils ne pourront plus jamais se passer du groupe de Lorentz (et de Poincaré) et des rotations $\overline{SO}(3)$. À ces exceptions près, comme la géométrie, l'algèbre est passée au dernier plan.

La seconde époque algébro-géométrique débute en 1961, avec la découverte de la *symétrie unitaire* [3]. Le nombre des différentes particules constituant la matière « nucléaire »

– les *hadrons*, particules comme le proton, le neutron ou les *mesons* π^+, π^0, π^-, etc., participant à l'interaction, dite *forte*, qui les *colle* si bien à l'intérieur du noyau atomique – ce nombre était passé du seul proton, avant 1932, à quelques dizaines vers 1960 et allait encore dépasser la centaine en cette décennie. Déjà, à la découverte du neutron, Heisenberg avait suggéré l'introduction de *degrés de liberté interne*, un groupe SU(2) global, *l'isospin* $\mathbf{I_s}$, isomorphe au spin mécanique (rotations) mais agissant seulement dans *l'espace d'Hilbert*, un groupe de transformations plutôt apparenté à *la charge électrique* Q (puisqu'une inversion de la troisième composante de l'isospin transforme un proton en neutron). En 1953, c'est une symétrie U(1) (*l'hypercharge* Y) [4] qui sert à décrire la création de *particules « étranges »* (Y = B + S, B la « charge baryonique » ou « nombre-de-masse atomique », S l'étrangeté) par l'interaction forte et leur désintégration par une autre interaction nucléaire, l'interaction *faible*, dite de Fermi (qui, en 1935, fut le premier à l'identifier). La désintégration du neutron en proton, électron et antineutrino en est un exemple. Notons [4] la formule $Q = I_s^3 + Y_s/2$.

Les efforts de comprendre cette variété à partir de modèles de structure ne donnèrent rien. De Broglie, Yukawa et d'autres éminents théoriciens [5] avaient conçu des modèles mécaniques – *toupies*, etc. – où les degrés de liberté *internes* étaient supposés correspondre à de vrais moments angulaires, associés aux différents repères du système. Ceci aurait permis de transformer de l'isospin en spin, etc. Une autre approche était représentée par Sakata et collaborateurs. Partant d'une idéologie matérialiste un peu simpliste [6], ils appliquaient une généralisation d'un modèle de Fermi et Yang [7]. À la découverte des mesons π (1949), ces chercheurs avaient suggéré que les π étaient peut-être « faits » de protons, de neutrons et de leurs antiparticules : $\pi^+ = \overline{n}p$, $\pi^0 = (1/2)^{1/2}(\overline{p}p - \overline{n}n)$, $\pi^- = \overline{p}n$. Sakata [8] y ajoutait le Λ^0, pour avoir une « brique » d'étrangeté. Ces trois particules avaient donc été séparées du reste, étant supposées seules à être « élémentaires », toutes les autres en étant composées. Ceci réalisait l'idéologie, mais ne paraissait pas prendre en considération leur grande ressemblance à d'autres baryons – voir les caractéristiques des $\Lambda^0, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$. Une troisième conception structurelle était l'idée du *bootstrap*, niant l'existence d'entités élémentaires et regardant les hadrons comme des solutions d'un système non linéaire *(couplage fort)*. Cette idée, reformulée en 1966 par Dolen, Horn et Schmid et d'autres chercheurs, fit naître *la théorie de la corde* – revenue en première page depuis 1984, mais dans un cadre phénoménologique très différent (la gravitation). Pour la corde hadronique (1967-1973), il fut démontré qu'elle ne contredit pas les modèles à champs élémentaires (comme les *quarks* – voir la suite).

Une approche plus pragmatique [3, 9] consistait à ne rien supposer *a priori* comme structure, et d'essayer d'identifier un groupe de Lie dont les représentations donneraient une classification complète des hadrons – au niveau des degrés de liberté internes – et qui décrirait au mieux les résultats expérimentaux. Le fait que toutes les interactions fortes permises par l'invariance sous $\mathbf{I_s}$ et Y, c'est-à-dire par $U(2)_s$, se réalisent dans l'expérimentation, indique un rang $r = 2$ pour l'algèbre de Lie du groupe de classification (l'existence d'un nouveau nombre quantique additif se traduirait par des contraintes et par la clôture de certains canaux). La classification des algèbres de Lie simples et semi-simples [10] nous donne A_2, algèbre de SU(3), $B_2 \sim C_2$, algèbre de SO(5) ou $Sp(4) = spin(5)$, D_2, algèbre de SO(4) et l'algèbre exceptionnelle G_2. Les données expérimentales favorisaient A_2, mais avec les 8 baryons $p, n, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Lambda^0, \Xi^0, \Xi^-$ affectés à la représentation adjointe (1, 1) à huit dimensions. Ce fut notre choix – et il fut validé par des centaines de résultats expérimentaux entre 1961 et 1964. Les courants – électrique et de l'interaction de Fermi – se situent en des directions bien définies dans l'espace de l'algèbre. De même l'interaction semi-forte qui donne les différences de masse (ou de niveaux d'énergie) entre les sous-multiplets $U(2)_s$. Au début, la symétrie unitaire paraissait représenter une *symétrie brisée* des interactions fortes, mais le succès surprenant de formules de masse et autres prédictions, obtenues toutes par des processus perturbatifs, m'avait suggéré [11] une ségrégation de cette interaction semi-forte (environ 10% du couplage fort). La théorie actuelle postule une invariance précise des interactions fortes sous SU(3), la brisure apparente étant attribuée aux différences *a priori* entre les masses des différents quarks (voir la suite).

La classification étant bien claire, on pouvait passer à la structure. Il a fallu attendre de 1868 (le tableau périodique des éléments chimiques, établi par D. Mendeleev) à 1911 (Rutherford) et même 1925 (Pauli), pour comprendre la structure de l'atome et l'explication du tableau. De Linné à Darwin, Mendel et à la découverte de l'ADN, il a fallu plus de deux siècles. Pour la symétrie unitaire et les hadrons, c'était plus direct. En 1962, nous avions déja suggéré [12] l'existence d'un champ à charge baryonique $B = 1/3$, triplet de SU(3) (comme le modèle de Sakata) mais à charges électriques fractionnelles $Q(2/3, -1/3, -1/3)$, isospin $\mathbf{I}(1/2, 1/2, 0)$, $I^3(1/2, -1/2, 0)$, et donc hypercharges $Y(1/3, 1/3, -2/3)$, et qui serait le constituant élémentaire de tous les hadrons. L'idée fut raffinée [13] par Gell-Mann (qui donnait au constituant le nom de *quark*, tiré d'une allusion littéraire de Joyce) et G. Zweig en 1963-1964. Les applications de cette idée donnèrent lieu à des centaines de prévisions nouvelles, avec un excellent accord avec les expériences.

C'est en 1967-1969 que des expériences de diffusion inélastique profonde d'électrons sur des cibles à nucléons (protons, neutrons) permettaient de sonder l'intérieur des nucléons et d'y observer les quarks directement.

4. Seconde Géométrisation. Phase Dynamique : le « Modèle Standard »

Comme en 1905-1915, nous passons de la phase cinétique (symétries globales – Lorentz ou SU(3)) à la phase dynamique, c'est-à-dire aux symétries locales (« théories de jauge »). Déjà la symétrie unitaire, appliquée localement, donnait d'assez bons résultats, malgré le fait que les *connexions* (ou champs de jauge) correspondent ici à des particules vectorielles (comme le potentiel électromagnétique) mais massives. Ces effets quasi géométriques s'expliquent en tant qu'approximations; quant à ces mesons vectoriels, ce sont des composées quark-antiquark à spin 1 qui jouent le rôle de connexions.

Une anomalie apparente dans le comportement quantique-statistique des quarks suggère déjà en 1964 l'existence d'un autre SU(3), commutant avec le premier. Tous les hadrons seraient des singlets antisymétriques de cet autre SU(3), expliquant l'anomalie statistique. L'existence de ce « $SU(3)_c$ », dit « de la *couleur* » est repostulée en 1973, ce genre de symétrie locale venant d'être prouvé être la seule interaction qui puisse aussi expliquer *l'absence de quarks à l'état libre,* ou *le « confinement » de la couleur.* La *Chromodynamique Quantique (CDQ)* [14], qui exploite cette idée, est la théorie d'une symétrie *locale* sous $SU(3)_c$, avec $[su(3)_s, su(3)_c] = 0$, où les minuscules indiquent les algèbres, génératrices de ces groupes. L'interaction forte, découverte en 1932, représente la Chromodynamique Quantique, force agissant au niveau des quarks, avec des éléments résiduels actifs à l'échelon hadronique, dont l'échange de mesons, eux-mêmes formés de paires quarks-antiquarks.

Cette construction de *fibré* ou théorie de jauge est suggérée en Physique par Hermann Weyl [15], qui lui donne sa forme actuelle (où le groupe de jauge est U(1) et l'espace-temps joue le rôle d'espace de base) en 1929, comme description de l'Électro- magnétisme de Maxwell. Elle est en effet incorporée à l'Électrodynamique Quantique (EDQ), théorie quantique de champs, construite en 1948, la théorie la plus précise de la Physique. La motivation de Weyl, lançant son premier modèle en 1919, est d'unir l'électromagnétisme à la gravitation einsteinienne. Le modèle final de 1929 avait abandonné cette ambition – mais une extension de ce modèle *aboutit en effet en 1971 à l'union* [16] *de l'électromagnétisme avec l'interaction faible!* Le fibré de Weyl est d'abord généralisé en 1954 par C.N. Yang et R.L. Mills [17] pour un groupe de Lie non abélien, comme groupe de la fibre. La CDQ en est un exemple, avec $SU(3)_c$ comme groupe de fibre. On y a ajouté en 1965 la brisure partielle spontanée de la symétrie, une extension du modèle de Landau et Ginsburg (1938) pour des transitions de phase en matière condensée.

A priori, les courants faibles pouvaient prendre cinq structures mathématiques différentes, les cinq bilinéaires de spineurs de Dirac (scalaire, pseudoscalaire, etc.). Ce sont les expériences qui démontraient en 1956 qu'il s'agissait purement de courants vectoriels (comme le courant électrique) mais avec une violation de la Parité, le courant étant *à « chiralité » gauche* pour les particules et droite pour les antiparticules. L'interaction faible avait déjà montré dès 1935 des ressemblances avec l'électricité, induisant Fermi à présenter son premier modèle. Une réaction comme la désintégration « bêta » $n \rightarrow p + e + \overline{\nu}$ s'interprétait comme un couplage de deux courants $n \rightarrow p$ et $\nu \rightarrow e$, le second se réalisant ici comme une *création de « paire »*. L'analogue électrique serait la création d'une paire électron-positron dans le champ électromagnétique d'un proton : $p \rightarrow p + \gamma$, $\gamma \rightarrow e + \overline{e}$. Depuis 1982, la désintégration bêta se décrit en effet comme $n \rightarrow p + W^-$, $W^- \rightarrow e + \overline{\nu}$. Il s'agit d'un fibré où le triplet W^+, W^0, W^- est la connexion de SU(2) et le singlet B^0 représente la connexion de U(1), dans un fibré à groupe U(2). Le photon représente une combinaison linéaire $(a^2 + b^2 = 1)$ $aW^0 + bB^0$ qui est la seule composante du multiplet composé qui ne soit pas touchée par la cassure de la symétrie, restant pour cela à masse zéro et longue portée, tandis que $W^{+/-}$ et $Z^0 = bW^0 - aB^0$ acquièrent des masses de l'ordre de 100 GeV.

Les fibrés se trouvent donc à la base des interactions physiques, on a même pu reformuler la gravitation comme une *fibration spontanée* d'une variété de groupe « molle » :

dans le groupe de Poincaré, les translations deviennent l'espace-temps, tandis que le groupe de Lorentz forme la fibre – après application des équations de mouvement [18, 19]. Mais les applications de cette physique des fibrés vont plus loin que ça : l'étude des solutions *(instantons)* du modèle Yang-Mills permit à Donaldson [20] et à Friedman [21] de faire les premiers pas vers une taxonomie des variétés à quatre dimensions, restées (avec celles à trois dimensions) les seules à résister à l'exploration méthodique par les géomètres. Il en résulte des découvertes surprenantes, comme les variétés R^4 *« exotiques »* [22]. Quelques années plus tard, une construction de fibré avec supersymétrie par Seiberg et Witten [23] permet aux géomètres de continuer l'avance. Le programme d'Erlangen se réalise à travers la physique !

Pour la cassure spontanée de symétrie, la *géométrie non commutative* de Connes [24] a pu retrouver le cas de l'interaction unifiée électro-faible et le Modèle Standard, à partir de constructions purement géométriques [25]. On a montré [26] qu'avec un choix un peu différent pour l'axiomatique du Calcul des Formes sur un espace non commutatif, on retrouve la *superconnexion* de Quillen [27], et en ce cas particulier de l'interaction électro-faible, la théorie SU(2/1) que nous avions conçue en 1979 [28, 29], et qu'avec S. Sternberg, nous avions réinterprété à la Quillen [30]. Nous avons récemment construit une superconnexion pareille [31] pour la Gravitation Riemannienne, partant d'une théorie à la Stephenson-Kilmister-Yang [32-34].

Le *Modèle Standard,* proposé par S. Weinberg en 1975 [35], est la synthèse de la CDQ et de l'interaction unie électro-faible, un fibré avec l'espace-temps de Minkowski comme base et $S[U(3) \otimes U(2)]$ comme groupe de jauge. C'est une théorie *géométrique,* comme le rappelaient C.N. Yang et T.T. Wu [36], un peu comme Minkowski l'avait fait en 1908. En effet, plusieurs aspects dynamiques y sont dus à des solutions topologiques – *monopoles, instantons, etc.*

En résumé, en cette fin de siècle, la physique à l'échelon fondamental est entièrement représentée par deux interactions géométriques – et les théoriciens n'y sont pour rien. C'est plutôt la nature qui a opté pour chacune de ces solutions. Platon était apparemment bien renseigné.

Envoi : En ce quarantième anniversaire de l'IHÉS, je voudrais remercier l'Institut et les directeurs que j'y ai connus – Messieurs les professeurs Motchane, Kuiper, Berger et Bourguignon – ainsi que mon ami Louis Michel, de l'hospitalité et l'inspiration dont j'y ai bénéficié.

RÉFÉRENCES

[1] E. NOETHER, *Nach. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse* **2** (1918) 17.

[2] H. WEYL, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics,* 2nd (revised). Édition allemande de 1930, traduite en anglais et publiée par Dover, Inc.

[3] Y. NE'EMAN, *Nucl. Phys.* **26** (1961) 222.

[4] K. NISHIJIMA, *Prog. Theoret. Phys.* **13** (1955) 285; M. Gell-Mann, *Nuovo Cim. Suppl.* **2** (1956) 848.

[5] L. de BROGLIE *et al., Phys. Rev.* **129** (1963) 438, 451.