MÉTIVIER

Convergence des suites de mesures Compacité faible dans L^1

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A3_0>

Convergence des suites de mesures

Compacité faible dans L^1

I- Espace métrique $\mathcal{F}(\mu)$

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, μ une mesure positive bornée sur $\mathcal{F}$, $M(\mathcal{F}, \mu)$ l'espace des classes d'équivalence pour μ de fonctions réelles $\mathcal{F}$ mesurables, muni de la métrique définissant la convergence en mesure. On sait que $M(\mathcal{F}, \mu)$ est complet pour la structure uniforme définie par cette métrique.

Soit $(\tilde{1}_{F_n})$ une suite de classes d'équivalence de fonctions indicatrices d'éléments de $\mathcal{F}$, qui soit une suite de Cauchy dans M. Comme on peut extraire de cette suite une suite $(\tilde{1}_{F_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge μ-presque partout vers la limite $\tilde{f}$ de $(\tilde{1}_{F_n})$ dans M, on voit que $\tilde{f}$ est la classe d'équivalence d'une fonction qui vaut 1 ou 0. On en déduit que le sous-espace de M constitué par les classes d'indicateurs d'ensembles de $\mathcal{F}$ est fermé dans M, donc complet. On désignera par $\mathcal{F}(\mu)$ ce sous-espace métrique.

Enfin, si l'on considère la métrique de la convergence en mesure :

$$p(\tilde{f}, \tilde{g}) = \inf \left\{ \alpha : \quad \mu([\,|f - g| > \alpha\,]) \right\}$$

On voit que pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{F}$ on a

$$p(\tilde{1}_F, \tilde{1}_G) = \mu(F \,\Delta\, G)$$

Par abréviation, on notera $\tilde{F}$ la classe d'équivalence de 1_F.

II- Théorème de Vitali-Hahn-Saks.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure μ positive bornée, soit (λ_n) une suite de mesures réelles (ou à valeurs dans un espace de Barnach B) sur $\mathcal{F}$, absolument continues par rapport à μ

(c. a. d. : $\lim_{E} \mu(E) = 0 \Rightarrow \lim_{E} \lambda_n(E) = 0$) telle que $\lim_n \lambda_n F$ existe dans $\mathbb{R}$ ou B pour tout $F \in \mathcal{F}$. Alors :

$$\lim_{\mu(E) \to 0} \sup_n |\lambda_n(E)| = 0$$

(Autrement dit la famille (λ_n) est équi-absolument continue par rapport à μ). En outre la fonction λ définie sur par $\lambda(F) = \lim_n \lambda_n(F)$ est une mesure.

DEMONSTRATION.

Soit pout tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}_{n,m} = \{F : F \in \mathcal{F}, |\lambda_n(F) - \lambda_m(F)| \leq \varepsilon\}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}_k = \bigcap_{n, m \geq k} \mathcal{F}_{n,m}$$

L'hypothèse suivant laquelle $\lim_n \lambda_n(F)$ existe pour tout $F \in \mathcal{F}$ implique $\mathcal{F}(\mu) = \bigcup_k \mathcal{F}_k$

En outre la définition des $\mathcal{F}_{n,m}$ et $\mathcal{F}_k$, et l'absolue continuite des λ_n montrentque les $\mathcal{F}_k$ sont fermés dans $\mathcal{F}(\mu)$.

Le théorème de Baire implique alors que l'un d'eux possède un point intérieur. Il existe donc un entier k_o, un nombre positif r et un ensemble $A \in \mathcal{F}$ tel que :

$$\mu(A \Delta F) \leq r \Longrightarrow |\lambda_n(F) - \lambda_m(F)| \quad \text{pour tout } n,\ m \geq k_o$$

Or, de l'identité :

$$F = A \cup F \setminus (A \setminus F)$$

et des inégalités

$$\mu(A \Delta (A \cup F)) \leq \mu(F)$$

et

$$\mu(A \Delta (A \setminus F)) \leq \mu(F)$$

On déduit donc que pour tout $n \geq k_o$

$$\mu(F) \leq r \Rightarrow |\lambda_n(F) - \lambda_{k_o}(F)| = \underset{\leq 2\varepsilon}{|\lambda_n}(A \cup F) - \lambda_{k_o}(A \cup F) - \lambda_n(A \setminus F) + \lambda_{k_o}(A \setminus F$$

Soit alors r' tel que :

$$\mu(F) < r' \Longrightarrow \lambda_n(F) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n = 1 \ldots k.$$

On voit qu'en posant $\delta = \inf(r, r')$ on a :

$$\mu(F) < \delta \Longrightarrow \lambda_n(F) \leq 3\varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

D'où la première propriété énoncée par la proposition.

Que λ soit additive est évident. Comme enfin pour tout $F \in \mathcal{F}$ $|\lambda(F)| \leq \sup_n |\lambda_n(F)|$, l'absolue continuité de λ, donc sa σ-additivité résultent de ce qui précède.

III- Théorème de NIKODYM.

Soit (λ_n) une suite de mesures réelles sur $\mathcal{F}$. Si $\lambda(F) = \lim_n \lambda_n(F)$ existe pour tout $F \in \mathcal{F}$, λ est une mesure sur $\mathcal{F}$, et pour toute suite décroissante (F_k) extraite de $\mathcal{F}$ telle que $\bigcap_n F_n = \emptyset$ On a $\lim_k (\sup_n |\lambda_n(F_k)|) = 0$.

DEMONSTRATION.

Posons $\mu_n = \dfrac{\lambda_n}{\|\lambda_n\|}$

Les mesures λ_n sont absolument continues par rapport à la mesure $\mu = \sum \frac{1}{2^n} \mu_n$ (sommation dans l'espace de Banach des mesures réelles). Le théorème résulte alors immédiatement du théorème précédent.

IV- Convergence faible de suites dans $L^1(\mu)$.

THEOREME-

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que pour tout F $\lim_n \int_F f_n \, d\mu$ existe dans $\mathbb{R}$. La suite (f_n) est alors équi-intégrable, et converge pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction intégrable f.

DEMONSTRATION.

Si on pose $\lambda_n(F) = \int_F f_n \, d\mu$, on voit que le théorème de Vitali-Hahn-Saks entraine l'équi-absolue continuite de la suite (λ_n). Pour que (f_n) soit équi-intégrable, il faut et il suffit qu'en plus la suite $(\int |f_n| \, d\mu)$soit bornée.

Or : $\int |f_n| \, d\mu = \int_{[f_n \geq 0]} f_n \, d\mu + \left| \int_{[f_n < 0]} f_n \, d\mu \right|$

Soit $\delta > 0$ tel que $\mu(F) < \delta \Rightarrow \left|\int_F f_n \, d\mu\right| \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut trouver un e partition finie (G_p) de Ω au moyen d'ensembles mesurables qui sont soit des atomes soit des ensembles de mesure $< \delta$. (Voir par ex. Halmos p. 172).

On a alors si $\mu(G_p) < \delta$: $\int_{G_p} |f_n| \, d\mu \leq 2\varepsilon$ pour tout n.

Si G_p est un atome les f_n sont constantes (à un ensemble de mesure nulle près)sur G_p et donc :

$$\int_{G_p} |f_n| \, d\mu = \left| \int_{G_p} f_n \, d\mu \right|$$

La limite $\lim_n \int_{G_p} f_n \, d\mu$ existant pour tout atome G_p, la suite des nombres

$$\left(\int_{G_p} |f_n| \, d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est donc bornée.}$$

Finalement $\int |f_n| \, d\mu = \sum_p \int_{G_p} |f_n| \, d\mu$ est donc le terme général d'une suite bornée. D'où l'équi-intégrabilité de (f_n).

Nous avons remarqué à la fin de la démonstration du théorème de Vitali-Hahn-Saks que λ définie par :

$$\lambda(F) = \lim_n \int_F f_n \, d\mu$$

est une mesure réelle absolument continue par rapport à μ. Soit alors f une densité de λ. On a $f \in L^1$ avec

$$\lambda(F) = \int_F f \, d\mu \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{F} .$$

L'hypothèse sur la suite (f_n) exprime que pour toute $h \in L^\infty$, de la forme $h = 1_F$, et par suite pour toute h étagée on a :

$$\lim_n \int h.\ f_n\, d\mu = \int h.\ f\ d\mu .$$

La suite (fn) est bornée dans L^1. C'est donc un ensemble équicontinu de formes linéaires sur L^∞, qui converge simplement sur un ensemble partout donc dans L^∞, donc aussi sur L^∞.

COROLLAIRE.

Pour qu'une suite (f_n) dans L^1 converge pour $\sigma(L^1, L^\infty)$, il faut et il suffit que (f_n) soit une suite de Cauchy pour la structure uniforme $\sigma(L^1, L^\infty)$.

(Autrement dit L^1, muni de la structure uniforme $\sigma(L^1, L^\infty)$ est séquentiellement complet).

DEMONSTRATION.

La condition est évidemment nécessaire.
Elle est suffisante par ce qu'elle entraine que pour tout $F \in \mathcal{F}$: $\lim_n \int_F f_n\, d\mu$ existe, et que le théorème précédent permet alors de conclure à la convergence faible de (f_n) vers un $f \in L^1$.

V- Compacité faible dans L^1.

THEOREME

Soit $H \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1) H est équi-intégrable
2) H est relativement faiblement compact dans L^1

3) De toute suite de fonctions de H on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement (i . e H est sequentiellement faiblement compact).

DEMONSTRATION.

L'équivalence entre 2) et 3) résulte du théorème d'Eberlein (voir Dunford et Schwartz. Linear-Operators p. 430) qui exprime que cette équivalence est vraie pour toute partie H d'un espace de Banach quelconque.

Montrons que 2) $\Longrightarrow$ 1) :

Supposons que H ne soit pas équi-intégrable. Il existerait $\eta > 0$ et une suite (f_n) extraite de H telle que :

pour tout n :
$$\int_{[|f_n| \geq n]} f_n \, d\mu \geq \eta$$

Aucune sous-suite de (f_n) n'est équi-intégrable. Elle ne peut donc converger pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ d'après le théorème du N° 4. Ceci exclut que H soit compact pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Montrons que 1) $\Longrightarrow$ 2).

Si H est équi-intégrable il existe un nombre réel positif m tel que

$$N_1 (f) = \int |f| \, d\mu \leq m \text{ pour tout } f \in H$$

L'ensemble H, borné dans le dual de L^∞ est donc équicontinu sur L^∞. Son adhérence faible $\overline{H}$ dans le dual (L^∞) est donc compacte pour $(L^{\infty\prime}), L^\infty)$. Nous avons seulement à montrer que $H \subset L^1$. Soit alors une forme linéaire ℓ continue sur L^∞, telle que $\ell \in \overline{H}$. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, et tout ε, il existe $f \in H$ tel que :

$$\left| \int f.\, 1_F \, d\mu - \ell\,(1_F) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On déduit immédiatement de l'équi-absolue continuité des mesures de densité f (résultant de l'équi-intégrabilité de H), que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe δ tel que :

$$\mu\,(F) \leq \delta \implies \ell\,(1_F) \leq \varepsilon$$

L'implication 1) $\implies$ 2) à démontrer résulte donc du lemme suivant :

<u>LEMME</u> : Pour qu'une forme linéaire ℓ sur L^∞ (μ) soit de la forme $\ell(h) = \int h.\, f.\, d\,\mu$ avec $f \in L^1$, il faut et il suffit que la fonction d'ensembles $F \rightsquigarrow \ell\,(1_F)$ soit absolument continue par rapport à μ au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que $\mu\,(F) \leq \delta \implies \ell\,(1_F) \leq \varepsilon$.

<u>DEMONSTRATION.</u>

La condition est évidemment nécessaire :

Supposons que réciproquement $F \rightsquigarrow \ell(1_F)$ soit absolument continue.

Il existe une densité $f \in L^1$ telle que :

$$\ell\,(1_F) = \int_F f\, d\,\mu\,.$$

On a alors

$\ell\,(h) = \int h\,.\, f\, d\,\mu$ pour toute h étagée $\in L^\infty$

Comme $h \rightsquigarrow \int h\, f\, d\mu$ est une forme linéaire continue sur L^∞ qui coïncide avec ℓ sur le sous-espace partout dense des fonctions étagées en deux formes linéaires sont égales. D'où le lemme

Ceci achève également la démonstration du théorème.

o-O-o