FAUCONNET

Décomposition harmonique des fonctions aléatoires du second ordre : généralités

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A9_0>

DECOMPOSITION HARMONIQUE DES FONCTIONS ALEATOIRES DU SECOND ORDRE : GENERALITES

I - Intérêt physique de la décomposition. [1] chap. VIII.

De nombreuses transformations étudiées en Physique peuvent être considérées comme linéaires et homogènes par rapport au temps : on les appelle filtres linéaires. Une telle transformation $\mathcal{R}$ fait correspondre à une grandeur physique $x(t)$ fonction aléatoire du temps une fonction aléatoire $X(t) = \mathcal{R}\,[x(t)]$.

- Caractère linéaire : $\begin{cases} \mathcal{R}\,[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{R}[x_1(t)] + \mathcal{R}[x_2(t)] \\ \mathcal{R}[\lambda x_1(t)] = \lambda\mathcal{R}\,[x_1(t)] \end{cases}$

- Homogénéité par rapport au temps :

Si $X(t) = \mathcal{R}\,[x(t)]$ alors $X(t - \tau) = \mathcal{R}\,[x(t - \tau)]$.

Ces deux propriétés entraînent l'existence d'une fonction $G(\nu)$ à valeurs complexes telle que :

$$\mathcal{R}[e^{2i\pi\nu t}] = G(\nu)\, e^{2i\pi\nu t} . \qquad \nu\in\mathbb{R}$$

$G(\nu)$ est appelé gain complexe de $\mathcal{R}$.

Les fonctions $e^{2i\pi\nu t}$ sont orthogonales en un certain sens :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} e^{2i\pi\nu t}\; e^{2i\pi\nu' t}\; dt = \delta_{\nu\nu'}$$

Pour chercher $X(t) = \mathcal{R}\,[x(t)]$ on va donc essayer de faire la décomposition harmonique de $x(t)$, c'est-à-dire la mettre sous la forme :

$$x(t) = \int e^{2i\pi\nu t}\; d\xi(\nu) \qquad \text{i. m. q.}$$

où $\xi(\nu)$ sera une fonction aléatoire de la variable réelle ν , à valeurs complexes.

Cette décomposition sera intéressante si $\mathcal{R}[x(t)] = \int \mathcal{R}[e^{2i\pi\nu t}] \, d\xi(\nu)$

Soit $\mathcal{R}[x(t)] = \int G(\nu) \, e^{2i\pi\nu t} \, d\xi(\nu)$

On s'intéressera aux filtres passifs, c'est-à-dire tels que $|G(\nu)| \leq 1$

Pour que l'intégrale $\int G(\nu) \, e^{2i\pi\nu t} \, d\xi(\nu)$ existe (i. m. q) (I)

il faut et suffit qu'existe l'intégrale :

$$\iint G(\nu) \, \overline{G}(\nu) \, e^{2i\pi(\nu t - \nu' t')} \, dd' \gamma(\nu, \nu') \qquad \text{(II)}$$

$$\text{où } \gamma(\nu, \nu') = E(\xi(\nu) \, \overline{\xi}(\nu'))$$

(Théorème du chapitre 2, paragraphe IV)

Or l'intégrale (II) existe quelle que soit la fonction continue $G(\nu)$ bornée si $\gamma(\nu, \nu')$ est une fonction à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

<u>Définitions</u>.

- Une covariance $\Gamma(t, t')$ est dite "harmonisable" si il existe une covariance $g(s, s')$ à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que :

$$(H_\Gamma) : \Gamma(t, t') = \iint e^{i(ts - t's')} \, dd' \, g(s, s')$$

- Une fonction aléatoire du 2° ordre $X(t)$ est dite "harmonisable" si il existe une fonction aléatoire du 2° ordre $x(s)$ dont la covariance $g(s, s')$ est à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et telle que :

$$(H_X) \qquad X(t) = \int e^{its} \, dx(s) \qquad \text{i. m. q.} \qquad (s = 2\pi\nu).$$

II - <u>Rappels sur l'intégrale de Riemann - Stieltjes dans $\mathbb{R}^2$</u>

[2] . chap II et III

A. <u>Fonctions à variation bornée</u>.

Soit $g(x, y)$ une fonction à valeurs complexes des deux variables réelles x et y, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Elle est à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si :

quel que soit le rectangle $J = (a, b\ ;\ a', b')(a < x \leq a'\ ,\ b < y \leq b')$

il existe un nombre C_J tel que pour toutes les subdivisions

$\sigma_x = (a_o = a < \ldots < a_i < \ldots\ a_n = a')$ et $\sigma_y = (b_o = b < \ldots\ b_j < \ldots\ b_m = b')$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} | g(a_i, b_j) - g(a_{i-1}, b_j) - g(a_i, b_{j-1}) + g(a_{i-1}, b_{j-1}) | \leq C_J$$

et tel que, il existe un nombre fini C majorant C_J $\forall J$.

La partie réelle et la partie imaginaire sont alors des fonctions à variation bornée au même sens.

Les théorèmes démontrés par Hildebrandt [2] chap III pour les fonctions réelles conduisent aux résultats suivants :

1°) - La fonction g(x, y) n'a qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité, répartis sur une infinité dénombrable de parallèles aux axes.

2°) - En tout point de discontinuité les limites :

$g(x+o, y+o)$; $g(x+o, y-o)$; $g(x-o, y+o)$; $g(x-o, y-o)$ existent

Nous appellerons <u>normalisée de</u> g(x, y) la fonction $\hat{g}(x, y)$ définie ainsi :

$$\hat{g}(x, y) = \frac{1}{4}[g(x+o, y+o) + g(x-o, y+o) + g(x+o, y-o) + g(x-o, y-o)]$$

Nous appellerons <u>saut</u> de g au point (x, y)

la quantité notée $\Delta_o\ \Delta'_o g(x, y)$ définie par :

$$\Delta_o\ \Delta'_o g(x, y) = g(x+o, y+o) - g(x+o, y-o) - g(x-o, y+o) + g(x-o, y-o)$$

et nous posons

$$\Delta_h\ \Delta'_k g(x, y) = g(x+h, y+k) - gx+h, y) - g(x, y+k) + g(x, y)$$

3°) - Sur tout rectangle J $g(x, y)$ est la somme d'une fonction continue $g_c(x, y)$ et d'une fonction de sauts $g_s(x, y)$ qui est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions de sauts élémentaires

4°) - Soit $\gamma(x, y) = g(x, y) + h(x)$ $\Delta_h \Delta'_k g(x, y) = \Delta_h \Delta'_k \gamma(x, y)$

B. Intégrale de Stieltjes-Riemann

- Définition : Soit un rectangle J, une fonction g à variation bornée sur J :

Pour définir les sommes de Riemann nous considérons les subdivisions D de J obtenues au moyen de subdivisions D_x et D_y sur les côtés de J et nous prenons module de $D = |D| = \sup(|D_x|, |D_y|)$ la fonction d'intervalle associée à g est celle qui a permis de définir ci-dessus la variation totale de g .

- Critère d'intégrabilité

L'intégrale de Riemann-Stieltjes $\iint f(x, y)\, dd'\, g(x, y)$ existe si la fonction f est bornée et continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la fonction g étant à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

C. Propriétés

1°) - Soit g à variation bornée sur J

Etant donné un filtre Q, si $f_q(x, y)$ converge vers $f(x, y)$ uniformément sur J, suivant le filtre Q, et si $\int_J f_q(x, y)\, dd'\, g(x, y)$ existe pour tout q, alors $\lim\limits_{q \in Q} \int_J f_q\, dd'\, g = \int_J f\, dd'\, g$

2°) - f étant une fonction continue bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et g une fonction à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathfrak{D}$

$$\iint f \, dd' g = \iint{}^{\circ} f \, dd' g_c + \sum_{(x,y)\in\mathfrak{D}} f(x, y) \, \Delta_o \Delta'_o \, g(x, y)$$

g_c étant la composante continue de g. (A - 3^e)

[2] p. 60

On peut donc modifier la fonction g aux points de $\mathfrak{D}$, cela ne change pas l'intégrale.

En particulier $\iint f \, dd' g = \iint f \, dd' \hat{g}$

3°) - A la fonction à variation bornée g on peut associer la fonction de répartition γ d'une mesure μ (définie sur $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu de Borel) telle que pour toute fonction f(x, y) continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$:

$$\iint f(x, y) \, dd' g(x, y) = \iint f \, d\mu = \iint f(x, y) \, dd' \gamma(x, y)$$

D. <u>Transformation de Fourier-Stieltjes</u> : [3] p. 475

Soit g(x, y) une fonction à variation bornée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; elle permet donc de définir une intégrale de Stieltjes-Riemann pour toute fonction f(x, y) continue et bornée sur R x R.

Prenons $f(x, y) = e^{i(ux - vy)} \quad dd' g(x, y)$

Cette fonction G(u, v) est continue (conséquence de C. 1^e) et bornée sur R x R :

$$|G(u, v)| \leqslant \iint |dd' g(x, y)| .$$

Nous pouvons supposer que g est normalisée (conséquence de C 2^e)

Et on établit alors les formules d'inversion suivantes :

$$(1) \quad \lim_{\substack{U\to\infty \\ V\to\infty}} \frac{1}{4UV} \int_{-U}^{+U}\int_{-V}^{+V} e^{-i(ux - vy)}\, G(u, v)\, du\, dv = \Delta_o \Delta'_o\, g\,(x, y)$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{U\to\infty \\ V\to\infty}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-U}^{+U}\int_{-V}^{+V} \frac{1}{uv}\, \Delta_h\, \Delta'_k\, e^{-i(ux - vy)}\, G(u, v)\, du\, dv = \Delta_h \Delta'_k g(x, y)$$

où $\Delta_h\, \Delta'_k\, e^{-i(ux - vy)} = [e^{-iu(x+h)} - e^{-iux}]\, [e^{+iv(q+k)} - e^{ivy}]$.

Les calculs sont analogues à ceux qui conduisent à la <u>formule d'inversion d'une fonction caractéristique</u> :

Etant donnée la fonction de répartition F d'une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, sa fonction caractéristique f est définie par :

$f(u) = \int e^{iux}\, dF(x)$ et $\hat{F}(b) - \hat{F}(a) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{+U} \frac{e^{-iu\,a} - e^{-iub}}{iu}\, f(u)\, du$

où $\hat{F}(x) = \frac{1}{2}\, [F(x + o) + F(x - o)]$

III - <u>Transformation de Fourier-Stieltjes en moyenne quadratique</u>

- <u>Problème</u> : Etant donnée une fonction aléatoire X(t), du second ordre, nous cherchons s'il existe une fonction aléatoire du second ordre x(s) dont la covariance g(s, s') est à variation bornée telle que

$(H_X) \qquad X(t) = \int e^{its}\, dx(s) \qquad$ i. m. q.

- <u>Théorème</u> :

Une fonction aléatoire du second ordre X(t) est harmonisable si et seulement si sa covariance l'est.

(Définitions dans I.)

Démonstration de la condition nécessaire.

Le critère d'intégration en moyenne quadratique (chap. 2, paragraphe IV) montre que si $X(t)$ est harmonisable alors $\Gamma(t, t')$ l'est.

Démonstration de la condition suffisante.

Soit $X(t)$ dont la covariance $\Gamma(t, t')$ est harmonisable : il existe donc une classe $\mathcal{G}$ de fonctions à variation bornée $g(s, s')$ telles que :

$$\Gamma(t, t') = \iint e^{i(ts - t's')} dd' g(s, s')$$

Les formules d'inversion (II D (2) permettent de déterminer $\Delta_h \Delta'_k \hat{g}(s, s')$ quels que soient h, k s s' et cette expression est la même quel que soit $g \in \mathcal{G}$

Montrons qu'on peut trouver une fonction aléatoire $x(s)$ dont la covariance est une fonction g de la classe $\mathcal{G}$ telle que $X(t) = \int e^{its} dx(s)$. i. m. q.

Pour cela nous allons déterminer une fonction aléatoire $x(s)$ telle que $E(\Delta_h x(s) \overline{\Delta'_k x(s')}) = \Delta_h \Delta'_k \hat{g}(s, s')$ et montrer ensuite que sa covariance $E(x(s) \bar{\bar{x}}(s'))$ est un élément de $\mathcal{G}$. Ensuite nous démontrerons que $\int e^{its} dx(s) = X(t)$

Du critère d'intégration en moyenne quadratique et de la formule d'inversion qui définit $\Delta_h \Delta'_k \hat{g}(s, s')$ on déduit

1°) - l'existence

de $\lim\limits_{\substack{\tau \to +\infty \\ m.\ q.}} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-ist} - e^{-i(s+h)t}}{it} X(t)\, dt = \delta_h(s)$

2°) - telle que $E(\delta_h(s)\,\delta_{h'}(s')) = \Delta_h \Delta'_k \hat{g}(s, s')$

Soit $x(s_o)$ une variable aléatoire telle que pour une fonction particulière g_1 de la classe $\mathcal{G}$ on ait :

$$E(x(s_o)\,\bar{x}(s_o)) = g_1(s_o, s_o)$$

Posons $x(s) = x(s_o) + \delta_{s - s_o}(s_o)$

$$\Delta_h x(s) = \delta_{s + h - s_o}(s_o) - \delta_{s - s_o}(s_o)$$

$= \delta_h(s_o)$ donc $E(\Delta_h x(s)\,\overline{\Delta_k x(s')}) = \Delta_h \Delta'_k g(s, s')$

$$E(x(s)\,\bar{x}(s_o)) = E(x(s_o)\,\bar{x}(s_o)) + E(\delta_{s - s_o}(s_o)\,\bar{x}(s_o))$$

$$= g_1(s_o . s_o) + h(s)$$

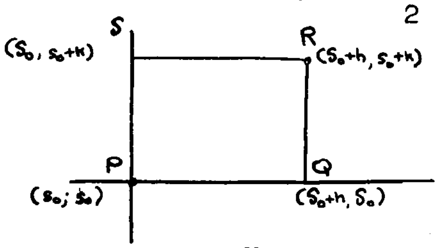
$$= g_1(s, s_o) + g_1(s_o, s_o) + h(s) - g_1(s, s_o)$$

Posons $k(s) = g_1(s_o, s_o) + h(s) - g_1(s, s_o)$

et $g_2(s, s') = g_1(s, s') + k(s)$

g_2 appartient à la classe $\mathcal{G}$ (II - A - 4°)

et $E(x(s)\,x(s_o)) = g_2(s, s_o)$ d'où $E(x(s_o)\,\bar{x}(s)) = g_2(s_o, s)$



Ces deux égalités jointes à

$$E[\Delta_h \bar{x}(s_o)\,\overline{\Delta_k x(s_o)}] = \Delta_h \Delta_k\, g_2(s_o, s_o)$$

entraînent $E(x(s)\bar{x}(s')) = g_2(s, s')$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Nous avons donc trouvé une fonction aléatoire $x(s)$ dont la covariance est une fonction $g(s, s')$ de la classe $\mathcal{G}$. Posons $Y(t) = \int e^{its}\,dx(s)$: cette intégrale existe d'après le critère d'intégration en moyenne quadratique et $E|Y(t)|^2 = \Gamma(t, t)$

Il reste à montrer que $X(t) = \int e^{its}\,dx(s)$ (i. m. q)

ce qui revient à démontrer que $E|X(t) - Y(t)|^2 = 0$

or $E|X(t)-Y(t)|^2 = \Gamma(t, t) - E(X(t)\,\bar{Y}(t)) - E(Y(t)\,\bar{X}(t)) + E|Y(t)|^2$

Donc il suffit de démontrer que $E(Y(t)\,\bar{X}(t)) = \Gamma(t, t)$

- Calcul de $E(Y(t)\ \overline{X}(t))$

$$E(Y(t)\ \overline{X}(t)) = E(\int e^{its}\ dx(s)\ \overline{X}(t))$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} E(\int_{+a}^{b} e^{its}\, dx(s)\ \overline{X}(t))$$

Soit S une subdivision de $[a, b]$.

$$\overline{X}(t) \int_{+a}^{b} e^{its}\, dx(s) = \lim_{|S| \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} e^{it\sigma_j} [x(s_{j+1}) - x(s_j)]\ \overline{X}(t)$$

Or $x(s_{j+1}) - x(s_j) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} - \frac{1}{it'} X(t')(e^{-is_{j+1}t} - e^{-is_j t})\, dt'$

donc

$$E(Y(t)X(t)) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \lim_{(S) \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} e^{it\sigma_j} \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} - \frac{1}{it'}(e^{-is_{j+1}t'} - e^{-is_j t'}) \Gamma(t', t)\, dt'$$

mais $\Gamma(t', t) = \iint e^{i(t's - ts')}\, dd'g(s, s')$

et nous savons qu'il existe une mesure μ, sur $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu des boréliens telle que $\Gamma(t', t) = \iint e^{i(t's - ts')} \mu(ds, ds')$

Il en résulte l'existence d'une mesure ν_t, de fonction de répartition F_t, telle que $\Gamma(t', t) = \int e^{it's}\, d\,F_t(s)$

La formule d'inversion des fonctions caractéristiques rappelée ci-dessus (II - D) donne :

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} - \frac{1}{it'}(e^{-is_{j+1}t'} - e^{-is_j t'}) \Gamma(t', t)\, dt' = F_t(s_{j+1}) - F_t(s_j)$$

Donc $E(Y(t)\ \overline{X}(t)) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \lim_{|S| \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} e^{it\sigma_j} [F_t(s_{j+1}) - F_t(s_j)]$

$$= \int e^{its}\, dF_t(s) = \Gamma(t, t)$$

Nous allons étudier maintenant un cas particulièrement important par ses applications : c'est celui où la covariance de $X(t)$

est une fonction de t et t' par l'intermédiaire de t - t' : seulement $\Gamma(t, t') = f(t - t')$. On pourra déterminer alors facilement dans quelles conditions une telle fonction $X(t)$ est harmonisable.