S. GUBER

Sur la théorie axiomatique du potentiel selon H. Bauer et une application de cette théorie aux solutions de l'équation $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \vartheta$ du type parabolique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1965-1966
« Publications des séminaires de mathématiques », , exp. nº 3, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1965-1966____A3_0>

SUR LA THEORIE AXIOMATIQUE DU POTENTIEL SELON H. BAUER ET UNE APPLICATION DE CETTE THEORIE AUX SOLUTIONS DE L'EQUATION

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

DU TYPE PARABOLIQUE.

Par

S. GUBER

(Université d'Erlangen).

I) LES AXIOMES DE LA THEORIE

Avec les axiomes suivants on obtient une théorie dans laquelle est contenue comme cas particulier la théorie classique des fonctions harmoniques, i.e. des solutions de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$.

Hypothèses : X espace localement compact avec une base dénombrable
$\mathcal{U}$ système de tous les ensembles ouverts $\mathcal{U} \neq \emptyset$
$\mathcal{U}_c$ éléments de $\mathcal{U}$, qui sont relativement compacts.

Définition 1.

Soit $\mathcal{H}$ un faisceau de fonctions numériques sur X, i.e. à tout $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ est associé un ensemble $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ de fonctions numériques, nommées fonctions harmoniques sur $\mathcal{U}$, tel qu'on a :

(1) $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{U}, \mathcal{U}_1 \in \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Rest}_{\mathcal{U}_1} \mathcal{H}_{\mathcal{U}_2} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{U}_1}$;

(2) $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_i \in \mathcal{U},$ et soit $g : \mathcal{U} \to \bar{\mathbb{R}}$ avec

$\mathrm{Rest}_{\mathcal{U}_i} g \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}_i}$ p.ch. $i \in I \Longrightarrow g \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$

Caractérisation locale des fonctions harmoniques).

Axiome 1 :

Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $\mathcal{U}$.

Définition 2.

Un ensemble $V \subset X$ est appelé régulier, si

(1) $V \in \mathcal{U}_c$, $V^* \neq \emptyset$ (V^* = frontière de V) ;

(2) toute fonction $f \in \mathcal{C}(V^*)$ admet un prolongement F unique sur $\bar{V}$ (l'adhérence de V) tel que $\mathrm{Rest}_V F = H_f^V \in \mathcal{H}_V$;

(2') $f \geq 0 \Longrightarrow H_f^V \geq 0$.

Si $\mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ régulier et $\bar{\mathcal{U}} \subset V$, on appelle $\mathcal{U}$ régulier relativement à V.

Axiome 2.

Les ensembles réguliers forment une base d'ouverts de X.

Remarque. L'application $\mathcal{C}(V^*) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$, définie par $f \longrightarrow H_f^V$ est (Ax. 1, Déf. 2, Ax. 2) non-négative et linéaire. Donc $f \longrightarrow H_f^V(x)$ est une forme linéaire, non-négative sur $\mathcal{C}(V^*)$ pour tout $x \in V$. Donc (X a une base dénombrable) pour chaque point $x \in V$ il existe une mesure borélienne unique $\overset{V}{\mu}_x$ sur V^* tel que $H_f^V(x) = \int f \, d\overset{V}{\mu}_x$ (V régulier, $x \in V$).

Définition 3.

Pour V régulier, $x \in V$ on appelle $\overset{V}{\mu}_x$ la mesure harmonique de V en point $x \in V$.

Proposition 1.

(Caractérisation des fonctions harmoniques). Soit $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ et $h \in \mathcal{C}(\mathcal{U})$. h harmonique $\Longleftrightarrow$ $h(x) = \int h \, d\overset{V}{\mu}_x$ $\forall V$ régulier relativement à $\mathcal{U}$ $\forall x \in V$.

Axiome 3.

Pour chaque suite (h_n) croissante de fonctions harmoniques sur un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathfrak{U}$ on a : $\sup h_n(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathcal{U}' \subset \bar{\mathcal{U}}' = \mathcal{U}$ alors $\sup h_n \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$.

Remarque. Si les axiomes 1 et 2 sont satisfaits, l'axiome 3 est équivalent à l'axiome suivant :

Axiome 3'.

Pour chaque ensemble régulier V d'une base de X et chaque fonction numérique, Borel-mesurable f sur V^* on a :

Si f est $\overset{V}{\mu}_x$-intégrable pour tout point $x \in V' \subset \bar{V}' = V$, alors f est $\overset{V}{\mu}_x$-intégrable pour tout $x \in V$ et l'application $x \longrightarrow \int f \, d\overset{V}{\mu}_x$ est harmonique dans V.

Définition 4.

Soit $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Une fonction $f : \mathcal{U} \to \bar{\mathbb{R}}$ est appelée hyperharmonique, si :

(1) $f(\mathcal{U}) \subset]-\infty, +\infty]$ (i.e. $f(x) > -\infty \quad \forall x \in \mathcal{U}$)

(2) f est semi-continue inférieurement

(3) $\int f \, d\mu_x^V \leq f(x) \quad \forall V$ régulier relativement à $\mathcal{U}$ et $\forall x \in V$.

Remarque. On peut caractériser localement les fonctions hyperharmoniques : Il est possible de remplacer en (3) " $\forall V$ régulier relativement à $\mathcal{U}$" par " $\forall V$ d'un système fondamental $\mathcal{U}(x)$ de voisinage de x, qui sont réguliers relativement à $\mathcal{U}$ ".

Définition 4'.

$f : \mathcal{U} \to \bar{\mathbb{R}}$ est appelé surharmonique, si f est hyperharmonique et si $f(x) < +\infty \quad \forall x \in \mathcal{U}' \subset \bar{\mathcal{U}'} = \mathcal{U}$

$p : \mathcal{U} \to \bar{\mathbb{R}}$ est un potentiel dans $\mathcal{U}$, si p est ≥ 0 et surharmonique donc la plus grande minorante sousharmonique est la fonction θ. (Cette définition a un sens, qu'on peut démontrer).

Désignations : $\mathcal{H}^*_{\mathcal{U}}$: f est hyperharmoniques sur $\mathcal{U}$

$-\mathcal{H}^*_{\mathcal{U}}$: " " hypoharmoniques sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$: " " surharmoniques sur $\mathcal{U}$

$-\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$: " " sousharmoniques sur $\mathcal{U}$

$\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$: potentiels sur $\mathcal{U}$.

Proposition 2.

Si (1) et (2) de la définition 4 sont vérifiées, (3) est équivalente à : (3') $g \in \mathcal{C}(V^*)$,

$\mathrm{Rest}_{V^*} f \geq g \Longrightarrow f \geq H_g^V$ sur V $\quad \forall V$ régulier relativement à $\mathcal{U}$.

Axiomes 4.

(a) $\mathcal{H}^*_X$ sépare en croisant les points de X, i.e. :

pour $x, y \in X$, $x \neq y$ il existe $u, v \in \mathcal{H}^*_X$ tel que

$$u(x)\, v(g) \neq u(g)\, v(x).$$

(b) Sur chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_c$ existe une fonction $h_{\mathcal{U}} \in \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ tel que $h_{\mathcal{U}}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

Axiome 4^+ : (a) ${}_+\mathcal{H}_X^*$ (les fonctions hyperharmoniques, non-négatives) séparent encroisant les points de X.

(b) ... comme dans l'axiome 4.

Définition 5 : Si les axiomes 1, 2, 3, 4 (resp. 1, 2, 3, 4_+) sont vérifiés pour $(X,\mathcal{H})$, on appelle $(X,\mathcal{H})$ un espace harmonique (resp. espace harmonique strict).

Un exemple classique.

Soit $Lu \equiv \Delta u = 0$,

l'équation de Laplace pour $n \geqslant 2$. $X = \mathbb{R}^n$. Pour tout ouvert l'équation $\mathcal{U} \subset X$ soit $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ (i.e. deux fois continuement différentiables), qui sont sur $\mathcal{U}$ des solutions de $\Delta u = 0$.

Théorème 1 :

$(X,\mathcal{H})$ est un espace harmonique strict.

Remarque : Ax. 1 est trivial, parce que $\Delta u = 0$ est linéaire.
Les boules ouvertes $V = V(x_o, r)$ de rayon r et centre x_o forment une base pour la topologie de X. Elles sont aussi des ensembles réguliers : Soit σ_{V^*} la mesure de Haar sur V^* de masse 1. Soit $f \in \mathcal{C}(V^*)$ et $V = V(x_o, r)$. Alors (formule de Poisson) :

$$H_f^X(x) = \int r^{n-2} \frac{r^2 - \|x - x_o\|^2}{\|x - y\|^n} \cdot f(y)\, \sigma_{V^*}(dy) \Longrightarrow \text{ Axiome 2.}$$

Nous avons $\mu_x^V = P_x \sigma_{V*}$ avec $P_x(y) = r^{n-2} \cdot \dfrac{r^2 - \|x - x_o\|^2}{\|x - y\|^n}$

La densité P_x de μ_x^V par rapport à σ_{V*} est strictement positive et bornée sur V^*. Donc :

Si f est μ_x^V-intégrable pour un $x \in V \Longrightarrow$ f est σ_{V*}-intégrable $\Rightarrow$ f est μ_x^V-intégrable pour tout $x \in V$.

Parce que $x \longrightarrow \int P_x(y)\, f(y)\, \sigma_{V*}(dy)$ est une solution de $\Delta u = 0$ sur V $\Longrightarrow$ Axiome 3' $\Longrightarrow$ Axiome 3.

Comme $x \longrightarrow v(x) = 1$ est une fonction harmonique sur X, il suffit de démontrer que ${}_+\mathcal{H}_X^*$ sépare les points de X ; alors ${}_+\mathcal{H}_X^*$ sépare encroisant. Soient $x, y \in X$, $x \neq y$. Définissons u par :

$$z \longrightarrow u(z) = \frac{1}{\|z - y\|}$$

Alors $u \in {}_+\mathcal{H}_X^*$ avec $u(x) < +\infty$ et $u(y) = +\infty \Longrightarrow$ Axiome 4_+.

<u>Remarque</u> : R. M. Hervé a donné des exemples plus généraux.

<u>Théorème 2</u> :

(R.M. Hervé) Soit w un domaine dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$,

$$(*) \qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) = 0 ,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq 0 \qquad \forall x \in w , \quad \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

$a_{ij} = a_{ji}$,

a_{ij}, b_i , c réelles, localement lipschitziennes

$\mathcal{H}^2$ faisceau des solutions de $(*)$ 2-fois cont. diff.

Si donc (1) $c \leq 0$, $c \neq 0$ alors $(w, \mathcal{H}^2)$ est un espace harmonique strict,

(2) $c = 0$, w_0 ouvert, vel. comp , $\bar{w}_0 \subset w \Longrightarrow$

$(w_0, \mathrm{Rest}_{w_0} \mathcal{H}^2)$ est un esapce harmonique strict

(3) c sans restrictions : alors pour chaque $x \in w$ il existe un voisinage ouvert $V_x \subset w$ tel que $(V_x, \mathrm{Rest}_{V_x} \mathcal{H}^2)$ est un espace harmonique strict.

<u>Théorème 3</u> :

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné,

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) ;$$

$a_{ij} = a_{ji}$, a_{ij} bord mesurable ,

L uniformément elliptique : $\exists\ \lambda \geq 1$ tel que

$$\frac{1}{\lambda} \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leq \lambda \qquad \forall\, x \in X \ , \ \forall\, (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec $|(\xi_1, \ldots, \xi_n)| = 1$

Soit $W^{1,2}(X) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(X) \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(X) \ , \ i = 1, \ldots, n \right\}$

(au sens des distributions),

$$W^{1,2}_{loc}(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que : } \mathrm{Rest}_Y f \in W^{1,2}(Y) \quad \forall\, Y_{\text{ ouvert}} \subset X \right\}$$

$$\mathcal{H}^L_{loc} = \left\{ u \in W^{1,2}_{loc}(X) : \int_X \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, d\lambda^n \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(X) \right\}$$

Alors : $(X, \mathcal{H}^X_{loc})$ est un espace harmonique strict.

<u>Remarque</u> : Les théorèmes 1, 2, 3 donnent aussi des exemples pour la théorie selon M. Brelot. On obtient la théorie de M. Brelot à partir de celle de H. Bauer en remplaçant l'axiome 3 par :

Axiome 3_{Br} :

Soit G un domaine et (h_n) une suite croissante de fonctions harmonique. Alors $\sup h_n = +\infty$ ou $\sup h_n \in \mathcal{H}_G$, et l'axiome 4_+ par la condition :

(P). Il existe un potentiel strictement positif.

L'axiome 3_{Br} est un renforcement de l'axiome 3 et de plus on a :

Proposition 3 :

Pour tout espace harmonique $(X, \mathcal{H})$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour chaque $x \in X$ existe un potentiel p tel que $p(x) > v$.

(b) Pour $x, y \in X$, $x \neq y$ existent $u, v \in {}_+\mathcal{S}_X$ tel que $u(x)\, v(y) \neq u(y) v(x)$

Définition 6 :

Un espace harmonique $(X, \mathcal{H})$ est appelé élliptique au point $x \in X$ s'il existe un système fondamental $W(x)$ de voisinages réguliers de x, tels que ($S\mu_x^V$ étant le support de μ_x^V)

$$S\, \mu_x^V = V^* \quad , \quad \forall\, V \in W(x).$$

$(X, \mathcal{H})$ est appelé élliptique s'il est élliptique en chacun de ses points.

Maintenant on a la caractérisation suivante d'espaces élliptiques :

Proposition :

(a) Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique élliptique. Alors l'axiome 3_{Br} est satisfait.

(b) Si X est de plus localement convexe et si $(X, \mathcal{H})$ satisfait les axiomes 1, 2, 3_{Br}, 4, alors $(X, \mathcal{H})$ est un espace harmonique élliptique.

Remarque :

Si $(X, \mathcal{H})$ est un espace harmonique, alors X est mécessairement localement convexe.

Définition 6' :

Tout espace harmonique strict, élliptique est appelé un espace harmonique de Brelot.

Proposition 4' :

Si X est de plus convexe et localement convexe et si pour $(X, \mathcal{H})$ les axiomes 1, 2, 3_{Br} et (P) sont satisfaits, alors $(X, \mathcal{H})$ est un espace harmonique de Brelot.

Une notion centrale dans la théorie de H. Bauer est la suivante :

Définition 7 :

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique. Un ensemble $A \subset X$ est appelé un ensemble d'absorption, si A est fermé et si pour tout $x \in A$ et tout voisinage régulier V de x on a : $S\, \mu_x^V \subset A$.

Proposition 5 :

(Caractérisation et représentation des ensembles d'absorption)

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique. Pour tout ensemble $A \subset X$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) A est un ensemble d'absorption.

(2) A est fermé ; pour tout $x \in A$ il existe un système fondamental $W(x)$ de voisinages réguliers de x tel que $S\, \mu_x^V \subset A$ pour chaque $V \in W(x)$

(3) Il existe un $u \in \mathcal{H}_{+X}^{*}$ tel que $A = u^{-1}(0)$.

Proposition 6 :

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique élliptique. Si X est convexe, alors Ψ et X sont les seuls ensembles d'absorption.

<u>Théorème 4</u> :

(Décomposition de Riesz). Chaque $u \in {}_{+}\mathcal{S}_X$ est de la forme :

$u = p + h$,

où p est un potentiel et h un harmonique.

<u>Théorème 5</u> :

(Un principe du minimum pour des ensembles non nec. rel. comp.)

Soit $U \in \mathcal{U}$ et $u \in \mathcal{H}_u^*$ tel que :

(1) $\liminf_{\substack{x \to z \\ x \in U}} u(x) \geq 0 \quad \forall z \in U^*$;

(2) Il existe un potentiel p tel que $u(x) + p(x) \geq 0 \quad \forall x \in U$.

Alors $u \geq 0$ sur U.

<u>Théorème 6</u> :

(Inégalité de Harnack).

Si $(X, \mathcal{H})$ est un espace harmonique strict, on peut démontrer une inégalité du type de Harnack.

Des instruments importants dans la théorie axiomatique du potentiel sont constitués par la réduite et la balayée d'une fonction numérique relativement à un ensemble.

<u>Définition 8</u> :

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique. Soit $f \geq 0$ une fonction numérique sur X et soit $E \subset X$. Alors

$$R_f^E = \inf\{u \in {}_{+}\mathcal{H}_X^* \ : \ u(x) \geq f(x) \quad \forall x \in E\}$$

est appelé la <u>réduite</u> de f respectivement à E.

$\hat{R}_f^E$ désigne la régularisée de R_f^E, i.e. la plus grande minorante semi-continue inférieurement de R_f^E. $\hat{R}_f^E$ est appelée la <u>balayée</u> de f respectivement à E.

Proposition 7 :

Pour tout $u \in {}_{+}\mathcal{H}^*_X$ et tout ensemble $E \subset X$ on a :

$$\hat{R}^E_u(x) = R^E_u(x) \qquad \forall x \in \complement E.$$

Hypothèse :

Dans le reste de la partie I nous supposerons toujours que $(X, \mathcal{H})$ est un espace harmonique strict.

Définition 9 :

$P \subset X$ est appelé polaire (i.e. un ensemble polaire), s'il existe une fonction $s \in {}_{+}\mathcal{S}_X$ tel que $P \subset s^{-1}(+\infty)$

Proposition 8 :

(Caractérisation des ensembles polaires)

(a) Soit $P \subset X$ polaire, $f \geq 0$ une fonction numérique sur X. Alors :

$$R^P_f = 0 \quad \forall x \in \complement P \quad \text{et} \quad \hat{R}^P_f = 0.$$

(b) Soit $f \geq 0$ une fonction numérique sur X et soit $P \subset X$ tel que $f(x) > 0 \quad \forall x \in P$ et $\hat{R}^P_f = 0$, alors P est polaire.

Définition 10 :

$E \subset X$ est nommé effilé au point $x_o \notin E$ si $x_o \notin \bar{E}$ ou $x_o \in \bar{E}$ et si dans ce cas il existe un $u \in {}_{+}\mathcal{H}^*_X$ tel que $\lim\limits_{\substack{y \to X \\ y \in E}} u(y) > u(x)$.

Proposition 9 :

(a) P polaire $\Longrightarrow$ P est éffilé à chaque $x \notin P$

(b) A ensemble d'absorption $\Longrightarrow \complement A$ est éffilé en chaque $x \in A$.

Proposition 10 :

(Caractérisation de l'éffilement) Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{S} > 0$

Alors : $E \subset X$ est éffilé en $x \notin E \Longleftrightarrow \inf\limits_{X \in W(x)} R^{E \cap V}_{\mathcal{S}}(x) < \mathcal{S}(x)$

(W(x) filtre de voisinages de x).

Pour cette raison on peut définir :

Définition 10' :
$E \subset X$ effilé) $x \in X$ arbitraire, si $\inf\limits_{V \in W(x)} \hat{R}_1^{E \cap V}(x) < 1$.

Définition 11 :
(a) $E \subset X$ est totalement éffilé, si E est éffilé en chacun des points de l'espace.

(b) $E \subset X$ est nommé semi-polaire si E est union dénombrable des ensembles totalement éffilés.

Proposition 11 :
Soit $E \subset X$. On a alors :

E polaire $\Longrightarrow$ E totalement éffilé $\Longrightarrow$ E semi-polaire.

Proposition 12 :
Dans la théorie classique des fonctions harmoniques (solutions de $\Delta u = 0$) les trois notions polaires, totalement éffilés et semi-polairescoïncident.

Pour cette raison on a dans la théorie générale seulement un affaiblissement du théorème de Cartan :

Proposition 13 :
Pour chaque famille $(u_i)_{i \in I}$ des fonctions $u_i \in {}_+\mathscr{X}^*_X$ on a :

$$E = \{x \in X \ : \ \widehat{\inf_{i \in I} u_i}(x) < \inf_{i \in I} u_i(x)\} \quad \text{est semi-polaire.}$$

Proposotion 14 :
(Balayage des mesures) Soit μ une mesure de Radon sur X, $\mu \geqslant 0$, avec son support compact. Soit $E \subset X$. Alors il existe une et seule mesure $\mu^E \geqslant 0$ sur X telle que :

$$\int p \, d\mu^E = \int \hat{R}_p^E \, d\mu \qquad \forall p \in \mathcal{P}_X \text{ , } \quad p \text{ continue}$$

<u>Définition 12</u> :

μ^E est appelé la mesure balayée de μ relativement à E

<u>Proposition 15</u> :

$P \subset X$ polaire $\Longleftrightarrow (\varepsilon_x)^P = 0 \quad \forall x \in X$

(où ε_x est la mesure ponctuelle avec la masse 1 sur x).

<u>Definition 13</u> :

Pour $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_c$ et $x \in \mathcal{U}$ $\qquad \mu_x^{\mathcal{U}} = (\varepsilon_x)^{\complement \mathcal{U}}$ est nommée la <u>mesure harmonique</u> de x et $\mathcal{U}$.

<u>Remarque</u> :

Cette définition coïncide avec la définition précédente dans le cas où $\mathcal{U}$ est régulier. On a :

<u>Proposition 16</u> :

L'application $x \longrightarrow \int f \, d\mu_x$ est harmonique sur $\mathcal{U}$ pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{V}_c$, et $f \in \mathcal{C}(\mathcal{U}^*)$.

Si f est une fonction numérique sur $\mathcal{U}^*$, μ_x intégrable pour tout $x \in \mathcal{U}' \subset \overline{\mathcal{U}'} = \mathcal{U}$, alors f est $\mu_x^{\mathcal{U}}$ intégrable pour tout $x \in \mathcal{U}$ et $x \longrightarrow \int f d\mu_x$ est harmonique dans $\mathcal{U}$.

<u>Définition 14</u> :

Soit f une fonction numérique sur $\mathcal{U}^*$ ($\mathcal{U} \in \mathcal{V}_c$), $\mu_x^{\mathcal{U}}$ intégrablepour chaque $x \in \mathcal{U}$, on appelle l'application $x \longrightarrow \int f \, d\mu_x^{\mathcal{U}} \quad (x \in \mathcal{U})$ la <u>solution généralisée du problème de Dirichlet</u>.

Un point $z \in \mathcal{U}^*$ est nommé <u>régulier</u> (relativement à $\mathcal{U}$), si pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathcal{U}^*)$ on a :

$$\lim_{x \to z} \int f \, d\mu_x^{\mathcal{U}} = f(z)$$

<u>Remarque</u> :

$$z \in \mathcal{U}^* \text{ régulier} \Longleftrightarrow \lim_{x \to z} \text{ (vague) } \mu_x^{\mathcal{U}} = \varepsilon_z.$$

<u>Proposition 17</u> :

$\mathcal{U}$ régulier $\Longleftrightarrow$ $z \in \mathcal{U}^*$ régulier pour tout $z \in \mathcal{U}^*$

<u>Proposition 18</u> :

Un point $z \in \mathcal{U}^*$ est régulier $\Longleftrightarrow$ $\complement\mathcal{U}$ n'est pas éffilé en z.

<u>Corollaire</u> :

L'ensemble des points irréguliers de $\mathcal{U}$ est semi-polaire.

<u>Définition 15</u> :

Soit $z \in \mathcal{U}^*$ et V un voisinage ouvert de z. Une fonction $x : \mathcal{U} \cap V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est nommé une <u>barrière</u> (ou <u>fonction de Bouligand</u>) respectivement à z, si

(a) $w \in \mathcal{H}^*_W$ et $w(x) > 0 \quad \forall\, x \in W$

(b) $\lim\limits_{\substack{x \to z \\ x \in W}} w(x) = 0$

<u>Proposition 19</u> :

Un point $z \in \mathcal{U}^*$ est régulier $\Longleftrightarrow$ z il existe une barrière respectivement à z.

II) LES SOLUTIONS DE L'EQUATION

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

DU TYPE PARABOLIQUE

Hypothèse :

Soit L un opérateur différentiel du second ordre et du type parabolique, défini dans $X = \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

où $(x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n , t \in R)$

(1) $a_{ij} = a_{ji}$ $\quad \forall i, j \in \{1,\dots,n\}$

(2) Les fonctions a_{ij} , $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ sont localement α-Hölder continues

$(0 < \alpha < 1 ; \; i,j \in \{1,\dots,n\})$

(3) Il existe un $\lambda > 0$ tel que :

$$\lambda \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \, \xi_j \qquad \forall (x,t) \in X ,$$

$$\forall (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |(\xi_1,\dots,\xi_n)| = 1$$

(4) Pour chaque $t_o \in \mathbb{R}$ il existe un $\varepsilon > 0$ et des constantes positives M_1, M_2, M telles qu'on a :

$$|a_{ij}(x,t)| \leq M_1 (M + |x|^{2m}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\forall t \in]t_o-\varepsilon , t_o+\varepsilon]$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial x_k}\right| \leq M_2 (M + |x|^{2m}) \qquad "$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$ $\quad (i,j,k \in \{1,\dots,n\})$

Théorème 7 :
Si on prend pour $\mathcal{H}^L$ le faisceau, qui associe à chaque sous-ensemble $\mathcal{U}$ ouvert de X les fonctions $u \in \mathscr{C}^2(\mathcal{U})$ pour lesquelles $Lu = 0$ dans $\mathcal{U}$ alors $(X, \mathcal{H}^L)$ est un espace harmonique strict, i.e. $(X, \mathcal{H}^L)$ satisfait les axiomes $1, 2, 3, 4_+$

Remarques :
Nous appelons les fonctions $u \in \mathscr{C}^2(\mathcal{U})$ tel que $Lu = 0$ sur $\mathcal{U}$ les fonctions L-harmoniques sur $\mathcal{U}$.

Remarques sur la démonstration du théorème 7 :

L'axiome 1 est trivialement satisfait, parce que L est linéaire. Pour prouver l'axiome 2, on utilise deux lemmes de la théorie des équations paraboliques :

Lemme 1 : Tout cône ouvert $K = K_r(x_o, t_o, t_1)$ qui a la boule $B_r(x_o, t_o)$ de rayon r et de centre (x_o, t_o) pour base et (x_o, t_1) avec $t_1 > t_o$ pour sommet, est un ensemble L-régulier.

Remarque :
Pour démontrer cela on utilise la méthode de continuité selon Laray-Schauder et aussi la méthode des barrières.

Lemme 2 :
(Principe du minimum selon Nirenberg).

Soit $\mathcal{U}$ un sous ensemble ouvert de X, $u \in \mathscr{C}^2(\mathcal{U})$ et $Lu \leq 0$, u ayant un minimum négatif en $(x_o, t_o) \in \mathcal{U}$. Alors $u(x,t) = u(x_o, t_o)$ pour chaque $(x,t) \in \mathcal{U}$ tel que $t \leq t_o$.

Remarque :
Ici les ensembles d'absorption jouent un grand rôle. On peut démontrer :

Proposition 20 :

Soit u une fonction numérique sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset X$ telle que $Lu \leq 0$. Alors u est une fonction L-hyper-harmonique.

Proposition 21 :

Tout ensemble A de la forme :

$$A_\tau = \{(x,t) \in X \ : \ t \leq \tau\}$$

est un L-ensemble d'absorption.

Pour démontrer que l'axiome 3 est satisfait, nous utilisons :

Lemme 3 :

(Inégalité de Harnack selon J. Moser).

Soit R un rectangle $\subset X$ et soient R^- et R^+ sous rectangles de R définis par :

$$R = \{(x,t) : |x_k| < \zeta \quad , \quad 0 < t < \tau\}$$

$$R^- = \{(x,t) : |x_k| < \zeta_1 \quad , \quad \tau_1 < t < \tau_2\}$$

$$R^+ = \{(x,t) : |x_k| < \zeta_1 \quad , \quad \tau_3 < t < \tau\}$$

avec $0 < \zeta_1 < \zeta$ et $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau$. Alors il existe une constante $\gamma > 1$ tellequ'on a :

$$\sup_{R^-} u \leq \gamma \sup_{R^+} u \qquad \text{pour chaque fonction } u \geq 0 \text{ L-harmonique.}$$

Nous prouvons maintenant, que l'axiome 4^+ est satisfait aussi. La partie (b) de l'axiome 4_+ est triviale, parce que la fonction constante v = 1 est L-harmonique. A cause de cela il suffit aussi, pour démontrer que la partie (a) de l'axiome 4_+ est satisfaite, que les fonctions hyperharmoniques, non-négatives séparent les points de X. Soient (y,S) , $(z,r) \in X$ tels que $(y,S) \neq (z,r)$.

1er cas : $S \neq r$

Alors $\check{u}(x,t) = e^t$ est L-harmonique, ≥ 0 et sépare les deux points (y,S) et (z,r). (cas trivial).

<u>2ème cas</u> : $S = r$. Nous définissons :

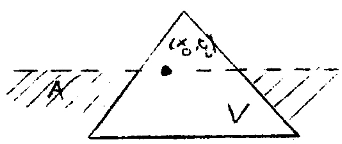
$$v(x,t) = \exp\left[(M + |x|^{2n})^{-1} + Dt\right]$$

$$w_i(x,t) = \text{ext}\left[x_i(M + |x|^{2n})^{-2} + Dt\right] \qquad (i \in \{1,\dots,n\})$$

$$u(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & \forall t \in]S-\varepsilon, S+\varepsilon] \quad , \text{ si } |y| \neq |z| \\ w_{i_0}(x,t) & \forall t \in]S-\varepsilon, S+\varepsilon] \quad , \text{ si } |y| = |z| \text{ mais } y_{i_0} \neq z_{i_0} \\ 0 & \forall t \leq S-\varepsilon \\ +\infty & \forall t > S+\varepsilon \end{cases}$$

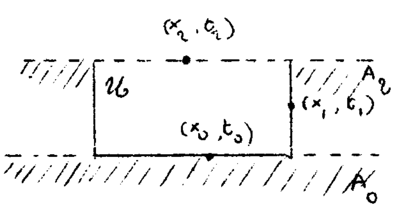
Pour $D > 0$ assez grand, u est L-harmonique et sépare (y,S) et (z,S)

<u>Remarques</u> : (1)



Soit V un cône ouvert comme au Lemme 1. Soit $(x_0,t_0) \in V$. Alors si A est l'ensemble d'absorption défini par $A = \{(x,t) \in X : t \leq t_0\}$, la mesure harmonique $\mu^V_{(x_0,t_0)}$ de V au (x_0,t_0) est supportee par $A \cap V.^*$

(2)



Soit $\mathcal{U}$ un rectangle à $n+1$ dimensions. Alors

(α) (x_0,t_0) est régulier

(β) (x_1,t_1) est régulier

(γ) (x_2,t_2) n'est pas régulier

(α) $A_0 = \{(x,t) \in X : t \leq t_0\}$ est un ensemble d'absorption. $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_c$,

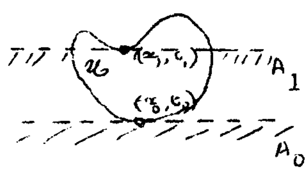
$\mathcal{U} \in \complement A_0$. $(x_0,t_0) \in \mathcal{U}^* \cap A_0^* \Longrightarrow$ Il existe un potentiel p continu sur X

tel que $A_o = p^{-1}(0) \Longrightarrow \mathrm{Rest}_{\mathcal{U}}\, p$ est une barrière respectivement à (x_o,t_o)

(γ) $A_2 = \{(x,t) \in X \ : \ t \leq t_2\}$ est un ensemble d'absorption. $(x_2,t_2) \in A_2$

$\Longrightarrow \complement A_2$ est éffilé en $(x_2,t_2) \Longrightarrow (x_2,t_2)$ ne peut pas être un point régulier.

(3) Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ de façon suivante :



Alors : (x_o,t_o) est un point régulier

(x_1,t_1) est un point irrégulier

Conséquence : Il n'existe pas d'ensembles réguliers arbitrairement grands.