GAPAILLARD

Théorème maximal de Ionescu - Tulcea

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A4_0>

THEOREME MAXIMAL DE IONESCU - TULCEA

par

Monsieur GAPAILLARD

1°) Lemme 1.

Soit (X,T,μ) *un espace mesuré*, $(A_n)_{n\in N}$ *: suite de parties de* X

$$\left.\begin{array}{l} n \in N \\ x \in A_n \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{l} U(n,x) \in T \\ U^*(n,x) \end{array}\right. \quad \textit{avec}$$

1) $\mu^*\left(\bigcup_{x\in A_n} U(n,x)\right) < \infty \qquad \forall\, n \in N$

2) $\inf_{x\in A_n} \mu(U(n,x)) > 0 \qquad \forall\, n \in N$ *tel que* $A_n \neq \emptyset$

3) $$\left.\begin{array}{l} p,q \in N\ ,\ p \leq q \\ x \in A_p \\ y \in A_q \cap \complement U^*(p,x) \end{array}\right| \Longrightarrow U(p,x) \cap U(q,y) = \emptyset$$

Alors, il existe une suite $(U(u(j),x(j)))_{j\in I}$ $(I \subset N\ ,\ u : I \longrightarrow N)$ *disjointe telle que*

4) $A_\infty = \bigcup_{n\in N} A_n \subset \bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j))$

Remarque.

Si dans 3) on fait $p = q = n$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} x \in A_n \\ x \in A_n \cap \complement U^*(n,x) \end{array}\right| \Longrightarrow U(n,x) \cap U(n,x) = \emptyset$$

impossible d'après 2). Donc :

$$x \in A_n \Longrightarrow x \in U^*(n,x)$$

Démonstration.

α : le plus petit $n \in N$ tel que $A_n \neq \emptyset$

$\mathcal{U}$: ensemble des suites $(U(u(j),x(j)))_{j \in I}$

avec : | I : intervalle de N

| $u : I \longrightarrow N$ application croissante vérifiant :

i) $0 \in I$, $u(0) = \alpha$, $x(0) \in A_{u(0)}$

ii) $j \in N$, $j+1 \in I$

$$\Longrightarrow x(j+1) \in A_{u(j+1)} - \bigcup_{0 \leq s \leq j} U^*(u(s),x(s))$$

iii) $j \in N$, $j+1 \in I$

$$\Longrightarrow A_h - \bigcup_{0 \leq s \leq j} U^*(u(s),x(s)) = \emptyset$$

$\forall h$, $0 \leq h < u(j+1)$ (si un tel h existe).

$\mathcal{U} \neq \emptyset$ car $(U(u(0),x(0))) \in \mathcal{U}$ si $I = \{0\}$, $u(0) = \alpha$ et $x(0) \in A_\alpha$.

Soit $(U(u(j),x(j)))_{j \in I} \in \mathcal{U}$.

Alors : - $x(j) \in A_{u(j)}$ (définition des $U(n,x)$)

- les ensembles de cette suite sont disjoints. En effet :

soient $i,j \in I$, $i < j$ donc $p = u(i) \leq u(j) = q$.

Alors : $x(i) \in A_p$ (1),

et $x(j) \in A_q - \bigcup_{0 \leq s \leq j-1} U^*(u(s),x(s))$ ii)

$$\Longrightarrow x(j) \in A_q \cap \complement U^*(u(i),x(i)) \quad (2)$$

1), 2), (3) $\Longrightarrow U(u(i),x(i)) \cap U(u(j),x(j)) = \emptyset$.

Il reste à trouver dans $\mathcal{U}$ une suite vérifiant (4).

1ère partie.

S'il existe dans $\mathcal{U}$ une suite infinie $(U(u(j),x(j)))_{j\in N}$, cette suite satisfait à (4).

1) $\lim\limits_{j\in N} u(j) = \infty$.

Autrement : $\exists\, q \in N$ tel que $u(j) \leq q$, $\forall\, j \in N$.

Alors, par définition des $U(n,x)$:

$$x(j) \in A_o \cup A_1 \cup \ldots \cup A_q \quad , \quad \forall\, j \in N.$$

D'autre part, d'après (1), $\exists\, B \subset X$ tel que

$$\mu^*(B) < \infty \quad \text{et} \quad \bigcup_{j\in N} U(u(j),x(j)) \subset B$$

(il suffit de prendre $B = \bigcup\limits_{\substack{o\leq n\leq q \\ x\in A_n}} U(n,x)$).

Alors

$$\mu(\bigcup_{j\in N} U(u(j),x(j))) = \sum_{j\in N} \mu(U(u(j),x(j))) \leq \mu^*(B) < \infty$$

D'où $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(U(u(j),x(j))) = 0$

mais $u(j)$ est constant à partir d'un certain rang, soit $u(j) = n$. Alors la limite ci-dessus montre que

$$\inf_{x\in A_n} \mu(U(n,x)) = 0 \quad , \quad \text{contraire à (2).}$$

2) Soit alors $h \in N$. D'après (1), $\exists\, j \in N$ tel que $h < u(j+1)$.

Alors iii) $\Longrightarrow A_n \subset \bigcup\limits_{o\leq s\leq j} U^*(u(s),x(s)) \subset \bigcup\limits_{s\in N} U^*(u(s),x(s))$

et h arbitraire $\Longrightarrow$ (4).

2ème partie.

1) S'il existe dans $\mathcal{U}$ une suite finie vérifiant (4), c'est terminé.

2) Dans le cas contraire, soit $(U(u(j),x(j)))_{j\in I}$ une suite finie de

Elle ne vérifie pas (4) donc : $A_\infty - \bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j)) \neq \emptyset$.

Soit $p = \sup I$ et $I' = I \cup \{p+1\}$

Soit q le plus petit entier tel que $A_q - \bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j)) \neq \emptyset$

Soit enfin $u(p+1) = q$ <u>par définition</u>.

Par définition de α et puisque $A_q \neq \emptyset$, on a $q \geq \alpha$ donc $u(p+1) \geq u(p)$ si <u>$p=0$</u>

<u>Si $p > 0$</u> :

$$\text{iii)} \Longrightarrow A_h - \bigcup_{0\leq s\leq p-1} U^*(u(s),x(s)) = \emptyset \qquad \forall\, h\,,\ 0 \leq h < u(p)$$

$$A_h - \bigcup_{0\leq s\leq p} U^*(u(s),x(s)) = \emptyset \qquad \forall\, h\,,\ 0 \leq h < u(p)$$

$$\text{soit}\quad A_h - \bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j)) = \emptyset \qquad \forall\, h\,,\ 0 \leq h < u(p)$$

<u>d'où $q = u(p+1) \geq u(p)$</u>

Prenons alors arbitrairement $x(p+1) \in A_q - \bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j))$. LA suite $(U(u(j),x(j)))_{j\in I'}$ appartient alors à $\mathcal{U}$.

Ce qui précède donne donc un procédé pour obtenir par récurrence une suite $(U(u(j),x(j)))_{j\in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ qui, d'après la 1ère partie, vérifie (4).

2°) <u>Théorème maximal</u>.

On suppose en plus des hypothèses du lemme 1 que $A_n \in T$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

5) $\exists\, C \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mu^*(U^*(n,x)) \leq C\, \mu(U(n,x))$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in A_n$

ν *est une mesure sur* T *telle que :*

6) $\nu(U(n,x)) \geq \mu(U(n,x)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in A_n$

Alors

7) $\mu(A_\infty) \leq C\, \nu(\bigcup_{j\in I} U(u(j),x(j)))$

<u>Démonstration</u>.

$$A_\infty \subset \bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j))$$

$$\Longrightarrow \mu(A_\infty) \leq \mu^*(\bigcup_{j\in I} U^*(u(j),x(j)))$$

$$\leq \sum_{j\in I} \mu^*(U^*(u-j),x(j)))$$

$$\leq C \sum_{j\in I} \mu(U(u(j),x(j)))$$

$$\leq C \sum_{j\in I} \nu(U(u(j),x(j)))$$

$$= C\ \nu(\bigcup_{j\in I} U(u(j),x(j)))$$

A ajouter à l'énoncé de la "variante" :

On suppose qu'il existe un clan $T_o \subset T$ tel que :

$$\begin{cases} \text{i')} & A \in T\ ,\ B \in T_o \Longrightarrow A \cap B \in T_o \\ \text{ii')} & \mu(A) = \sup\limits_{B\in T_o} \mu(A \cap B) \end{cases}$$

3°) <u>Une variante du théorème maximal</u>.

$(A_n)_{n\in N}$ *suite de* T. *(et non de* T_o*)*

$$\left.\begin{array}{l} n \in N \\ x \in A_n \end{array}\right| \rightsquigarrow \left|\begin{array}{l} U(n,x) \in T \\ U^*(n,x) \end{array}\right.$$

On suppose

1)' $\mu^*(\bigcup_{x\in B\cap A_n} U(n,x)) < \infty \qquad \begin{array}{l}\forall\, B \in T_o \\ \forall\, n \in N\end{array}$

2)' *Les conditions 2), 3), 5), 6) sont satisfaites.*

Alors :

$$\mu(A_\infty) \leq C\ \nu(X) \quad \textit{si} \quad \text{si } A_\infty = \bigcup_{n\in N} A_n .$$

Pour tout $n \in N$, soit $A'_n \subset A_n$ avec $A'_n \in T_o$. On considère alors les $U(n,x)$ et $U^*(n,x)$ correspondant aux x appartenant aux A'_n.

Les conditions d'application du théorème maximal précédent sont alors remplies pour la suite $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'où :

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n) \leq C\, \nu(X).$$

Alors, d'après ii)' :

$$\mu(A_\infty) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{B \in T_o} \mu((\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cap B)$$

$$= \sup_{B \in T_o} \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_n \cap B}_{\substack{A'_n \\ \in \\ T_o \text{ d'après i)'}}})) \leq C\, \nu(X)$$

4°) Conséquence du théorèpe maximal de Tulcea.

(X,T,μ) expace mesuré

T_o clan des $A \in T$ tels que $\mu(A) < \infty$

β : mesure sur T telle que $\beta(X) < \infty$

Théorème.

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *: suite croissante de sous-tribus de* T

$f_n \in L^1(X,T,\mu)$: *fonction* F_n*-mesurable telle que :*

$$\beta(A) \geq \int_A f_n \, d\mu \quad , \quad \forall A \in F_n$$

Alors :

$$a\, \mu(\{x \; ; \; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > a\}) \leq \beta(X) \quad , \quad \forall a > 0.$$

Démonstration.

Posons : $\nu = (1/a)\, \beta$

$$A'_o = \{x \; ; \; f_o(x) > a\}$$

$$n > 1 : A'_n = \{x \; ; \; \sup_{o \leq j \leq n-1} f_j(x) \leq a \quad , \quad f_n(x) > a\}$$

Alors il est clair que

$$\{x \; ; \sup_{n \in N} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n \in N} A'_n$$

Posons alors :

$$A_n = A'_n \quad \text{si} \quad \mu(A'_n) \neq 0$$

$$A_n = \emptyset \quad \text{si} \quad \mu(A'_n) = 0$$

Soit : $U(n,x) = U^*(n,x) = A_n$, $\forall\, x \in A_n$, $\forall\, n \in N$ tel que $A_n \neq \emptyset$.

Alors :

* . $A'_n \in F_n \subset T \Longrightarrow \mu^*(\bigcup_{x \in A_n} U(n,x)) = \mu^*(A_n) = \mu(A_n) = \mu(A'_n) < \infty \Longrightarrow$ 1)

. $\nu(U(n,x)) = \nu(A_n) = \frac{1}{a}\,\beta(A_n) \geq \frac{1}{a}\int_{A_n} f_n \, d\mu =$

$$= \frac{1}{a}\int_{A'_n} f_n \, d\mu \geq \frac{1}{a}\, a\, \mu(A'_n) = \mu(A_n) = \mu(U(n,x))$$

$\Longrightarrow$ 5).

* . $\inf_{x \in A_n} \mu(U(n,x)) = \mu(A_n) > 0 \Longrightarrow$ 2)

* . $\mu(U^*(n,x)) = \mu(U(n,x)) \Longrightarrow$ 6) avec $C = 1$

* . $p, q \in N \qquad p \leq q$

$x \in A_p$

$y \in A_q \cap \complement\, U^*(p,x) = A_q \cap \complement\, A_p \Longrightarrow A_p \neq A_q \Longrightarrow p \neq q \Longrightarrow A_p \cap A_q = \emptyset$

$\Longrightarrow U(p,x) \cap U(q,y) = \emptyset \Longrightarrow$ 3)

(voir définition des A'_n).

Alors d'après le théorème maximal :

$$\mu(A_\infty) = \mu(\bigcup_{n \in N} A_n) = \mu(\bigcup_{n \in N} A'_n) \leq \nu(X) = \frac{1}{a}\,\beta(X).$$

D'où : $a\,\mu(\{x \; ; \sup_{n \in N} f_n(x) > a\}) \leq \beta(X)$ Q.E.D.

5°) Application à un lemme maximal de J. Neveu.

Lemme maximal de J. Neveu.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espace de probabilité* $\{\mathcal{A}_n\}$ *une suite de sous-algèbres de*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f \in L^1 \\ \Omega_f = \bigcup_n \{E^{\mathcal{A}_n} f > 0\} \end{array}\right| \Longrightarrow \int_{\Omega_f} f \, dP \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ f \in L^1,\ a > 0 \\ \Omega_{f,a} = \bigcup_n \{|E^{\mathcal{A}_n} f| > a\} \end{array}\right| \Longrightarrow \int_{\Omega_{f,a}} (|f| - a) \, dP \geq 0.$$

Démonstration du 2).

On pose :

$$A'_0 = \{x \ ; \ |(E^{\mathcal{A}_0} f)(x)| > a\}$$

$$A'_n = \{x \ ; \ \sup_{1 \leq i \leq n-1} |(E^{\mathcal{A}_i} f)(x)| \leq a \ , \ |(E^{\mathcal{A}_n} f)(x)| > a\} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n = \Omega_{f,a}$$

Puis

$$\left|\begin{array}{llll} A_n = A'_n & \text{si} & P(A'_n) \neq 0 \\ A_n = \emptyset & \text{si} & P(A_n) = 0 \end{array}\right| \quad \text{d'où} \quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu(\Omega_{f,a})$$

$\mu = P$

ν défini par $\nu(A) = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_A |f| \, dP$

$$\left.\begin{array}{l} n \\ x \in A_n \end{array}\right| \rightsquigarrow U(n,x) = U^*(n,x) = A_n \in \mathcal{A}$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_{x \in A_n} U(n,x)\Big) = \mu^*(A_n) = \mu(A_n) = P(A_n) < \infty \Longrightarrow 1)$$

$$\nu(U(n,x)) = \nu(A_n) = \frac{1}{a} \int_{A_n} |f| \, dP$$

$$= \frac{1}{a} \int_{A_n} E^{\mathcal{A}_n} |f| \, dP_{\mathcal{A}_n} \geq \frac{1}{a} \int_{A_n} |E^{\mathcal{A}_n} f| \, dP_{\mathcal{A}_n} \qquad \text{(Cours J. Neveu p. 116)}$$

car $A_n \in \mathcal{A}_n$

$$> \frac{1}{a}\, a\, P_{\mathcal{A}_n}(A_n) = P(A_n) = (A_n) = \mu(U(n,x)) \Longrightarrow 5)$$

$\inf\limits_{x \in A_n} \mu(U(n,x)) = \mu(A_n) = P(A_n) > 0 \Longrightarrow 2)$ par choix des A_n.

6) trivialement vérifié avec C = 1.

3) $p, q \in \mathbb{N} \quad p \leq q$

$$\begin{cases} x \in A_p \\ y \in A_q \cap \complement U^*(p,x) = A_q \cap \complement A_p \Longrightarrow p \neq q \Longrightarrow A_p \cap A_q = \emptyset \end{cases}$$

soit : $U(p,x) \cap U(q,y) = \emptyset$.

Conclusion.

Le théorème maximal de Tulcea s'applique et :

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \nu(\bigcup U(n,x)) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

d'où

$$P(\Omega_{f,a}) - \frac{1}{a} \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} |f| \, dP = \frac{1}{a} \int_{\Omega_{f,a}} |f| \, dP$$

puisque $\Omega_{f,a}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ne different que par un ensemble P-nul.

$$\int_{\Omega_{f,a}} dP \leq \frac{1}{a} \int_{\Omega_{f,a}} |f| \, dP$$

D'où

$$\int_{\Omega_{f,a}} (|f| - a) \, dP \geq 0.$$

Démonstration du 1).

$f = f^+ - f^-$ $\qquad$ $f^+ = \sup(f,0)$

$f^- = \sup(-f,0)$

$$\int_{\Omega_f} f \, dP = \int_{\Omega_f} f^+ \, dP - \int_{\Omega_f} f^- \, dP$$

On doit donc démontrer

$$\int_{\Omega_f} f^+ \, dP \geq \int_{\Omega_f} f^- \, dP$$

$A'_o = \{x \; ; \; (E^{\mathcal{Q}_o} f)(x) > 0\}$

$A'_n = \{x \; ; \; (E^{\mathcal{Q}_{n-1}} f)(x) \leq 0 \; , \; (E^{\mathcal{Q}_n} f)(x) > 0\}$

$$\mu : \mu(A) = \int_A f^- \, dP \quad ; \quad \nu : \nu(A) = \int_A f^+ \, dP$$

$\begin{cases} A_n = A'_n & \text{si} \quad (A_n) > 0 \\ A_n = \emptyset & \text{si} \quad (A_n) = 0 \end{cases} \qquad U(n,x) = U^*(n,x) = A_n$

. $\mu^*(\bigcup_{x \in A_n} U(n,x)) = \mu^*(A_n) = \mu(A_n) < \infty \implies$ 1) car $f^- \in L^1$

(Halmose p. 102)

. $f = f^+ - f^- \implies E^{\mathcal{Q}_n} f \underset{p.s.}{=} E^{\mathcal{Q}_n} f^+ - E^{\mathcal{Q}_n} f^-$ (Neveu Cours p. 115 b))

D'où : $x \in A_n$ (si $A_n \neq \emptyset$)

$$\implies (E^{\mathcal{Q}_n} f)(x) > 0 \implies (E^{\mathcal{Q}_n} f^+)(x) \underset{p.s.}{\geq} (E^{\mathcal{Q}_n} f^-)(x)$$

D'où

$$\nu(U(n,x)) = \nu(A_n) = \int_{A_n} f^+ \, dP = \int_{A_n} E^{\mathcal{Q}_n} f^+ \, dP_n \geq$$

$$\int_{A_n} E^{\mathcal{Q}_n} f^- \, dP_{\mathcal{Q}_n} = \int_{A_n} f^- \, dP = \mu(A_n) = \mu(U(n,x))$$

$$\implies 5)$$

. $\inf_{x \in A_n} \mu(U(n,x)) = \mu(A_n) > 0$ par choix des $A_n \implies$ 2)

. 6) trivialement vérifié : $C = 1$

. 3) vérifié comme précédemment car les A_n sont disjoints.

Conclusion.

On peut encore appliquer le théorème maximal de Tulcea :

$$\mu(\cup A_n) = \mu(\cup A'_n) = \mu(\Omega_f) \leq \nu(\cup U(n,x)) = \nu(\cup A_n) = \nu(\Omega_f)$$

D'où :

$$\int_{\Omega_f} f^- \, dP \leq \int_{\Omega_f} f^+ \, dP \Longrightarrow \int_{\Omega_f} (f^+ - f^-) \, dP \geq 0$$

soit :

$$\int_{\Omega_f} f \, dP \geq 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$