PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

Y. GUIVARC'H

Générateurs des groupes résolubles

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1967-1968
« Publications des séminaires du département de mathématiques », , exp. nº 1, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1967-1968____A1_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GENERATEURS DES GROUPES RESOLUBLES

PAR

Y. GUIVARC'H

Soit G un groupe topologique quelconque, $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G. On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de G si le plus petit sous-groupe fermé contenant les a_i $(i \in I)$ est égal à G.

L'objet de cette étude est de déterminer les systèmes de générateurs dans le cas où G est localement compact et est soit nilpotent, soit connexe résoluble.

Dans le cas G abélien, cette détermination résulte du théorème : Pour tout sous-groupe fermé H de G, il existe un homomorphisme φ de G dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que $\varphi(H) = \{o\}$ (Pontryagin).

Ce théorème s'étend sans modification au cas G nilpotent (théorème 1) et reste vrai dans le cas G résoluble connexe à condition de remplacer $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par le groupe $\mathcal{A}$ des homothéties translations du plan complexe et la condition $\varphi(H) = \{o\}$ par $\overline{\varphi(H)} \neq \varphi(G)$. [Théorème 3] .

Cette détermination se trouve donc ramenée dans ce dernier cas à celle des homomorphismes de G dans $\mathcal{A}$ [proposition 1] .

Le théorème 2 donne un résultat partiel dans le cas où G est résoluble localement compact mais non nécessairement connexe. Enfin, ces résultats sont appliqués à la détermination explicite des systèmes de générateurs pour le groupe des matrices triangulaires (n,n).

<u>Lemme 1</u> Soient H,K deux parties de G, $\Gamma(H,K)$, le sous-groupe engendré par les commutateurs des éléments de H avec ceux de K. On a

$$\Gamma\overline{(H,K)} = \overline{\Gamma(\overline{H},\overline{K})}$$

les inclusions $H \subset \overline{H}$, $K \subset \overline{K}$ entraînent $\Gamma(H,K) \subset \Gamma(\overline{H},\overline{K})$ donc $\overline{\Gamma(H,K)}$ $\overline{\Gamma(\overline{H},\overline{K})}$
D'autre part l'application continue de G x G dans G $(x,y) \longrightarrow x\ y\ x^{-1}\ y^{-1}$ transforme tout couple $(x,y) \in \overline{H} \times \overline{K}$ en un élément de $\overline{\Gamma(H,K)}$, c'est-à-dire $\Gamma(\overline{H},\overline{K}) \subset \overline{\Gamma(H,K)}$ donc $\overline{\Gamma(\overline{H},\overline{K})}$ $\overline{\Gamma(H,K)}$
Soient $D, \overline{D}$ (resp $C, \overline{C}$) les applications de $P(G)$ dans $P(G)$ qui à $H \subset G$ associent $\Gamma(H,H)$, $\overline{\Gamma(H,H)}$ [resp $\Gamma(G,H)$, $\Gamma(G,H)$] ; en particulier

$$\overline{D}(H) = \overline{D(H)}\ ,\ \overline{C}(H) = \overline{C(H)}$$

<u>Lemme 2</u> $\bar{D}^n(\bar{H}) = \overline{D^n(H)}$, $\bar{C}^n(\bar{H}) = \overline{C^n(H)}$

La propriété est vraie pour n=o. On raisonne par récurrence sur n :

$$\bar{D}^n(\bar{H}) = \bar{D}[\bar{D}^{n-1}(\bar{H})] = \bar{D}[\overline{D^{n-1}(H)}]$$

$$\bar{C}^n(\bar{H}) = \bar{C}[\bar{C}^{n-1}(\bar{H})] = \bar{C}[\overline{C^{n-1}(H)}]$$

par application de l'hypothèse de récurrence

D'autre part :

$$\overline{D^n(H)} = \overline{D[D^{n-1}(H)]} = \overline{D[\overline{D^{n-1}(H)}]}$$

$$\overline{C^n(H)} = \overline{C[C^{n-1}(H)]} = \overline{C[\overline{C^{n-1}(H)}]}$$

en appliquant le lemme 1.

Le lemme 2 résulte alors de la définition de $\bar{D}$(resp $\bar{C}$).

<u>Corollaire</u> Soit G un groupe topologique séparé et R [resp N] un sous-groupe résoluble (resp nilpotent) de G. Alors $\bar{R}$ [resp $\bar{N}$] est résoluble (resp nilpotent).

Soit n entier tel que $D^n R = \{e\}$ [resp $C^n N = \{e\}$] le lemme 2 entraîne :

$$D^n(\bar{R}) \subset \bar{D}^n(\bar{R}) = \overline{D^n(R)}$$

$$C^n(\bar{N}) \subset \bar{C}^n(\bar{N}) = \overline{C^n(N)}$$

Comme G est séparé $\overline{D^n(R)} = \overline{\{e\}} = \{e\}$, $\overline{C^n(N)} = \overline{\{e\}} = \{e\}$.

Comme $R \subset \overline{R}$ (resp $N \subset \overline{N}$) entraîne $D^p R \subset D^p \overline{R}$ (resp $C^p N \subset C^p \overline{N}$) pour tout p, on peut affirmer que la suite dérivée (resp centrale descendante) de $\overline{R}$ (resp $\overline{N}$) a même longueur que celle de R (resp N).

<u>Lemme 3</u> Soit G un groupe topologique, H et K deux sous-groupes et π l'application canonique de G sur G/K. Les conditions $\overline{HK} \neq G$ et $\overline{\pi(H)} \neq \pi(G)$ sont équivalentes.

En effet il est immédiat que si A est saturé pour la congruence à gauche modulo K, $\overline{A}$ l'est également ; donc $\pi(\overline{A})$ est fermé, contient $\pi(A)$ et aussi $\overline{\pi(A)}$. Comme $\pi(\overline{A}) \subset \overline{\pi(A)}$ car π est continue, on a bien $\overline{\pi(A)} = \pi(\overline{A})$. En particulier $\pi(\overline{HK}) = \overline{\pi(HK)} = \overline{\pi(H)}$ et $\overline{HK} = \pi^{-1}\left[\overline{\pi(H)}\right]$, d'où résulte la propriété énoncée par le lemme.

<u>Corollaire</u> Soit G un groupe résoluble séparé et H un sous-groupe distingué fermé propre. On a alors $\overline{H\, D^1 G} \neq G$.

Montrons d'abord cette propriété dans le cas $H = \{e\}$. L'hypothèse $\overline{D^1 G} = G$ entraîne $\overline{D}^n G = G$ pour tout n ; prenant n tel que $D^n G = \{e\}$ et tenant compte du fait que G est séparé on obtient d'après le lemme 2 :

$$G = \overline{D}^n G = \overline{D^n G} = \overline{\{e\}} = \{e\} \text{ ,}$$

ce qui contredit $G \neq \{e\}$.

Dans le cas général soit π l'homomorphisme canonique de G sur G/H . G/H est séparé car H est fermé et on a $\pi(D^1 G) = D^1(G/H)$. Le résultat précédant entraîne $\overline{D^1(G/H)} = \overline{\pi(D^1 G)} \neq \pi(G)$ et le lemme 3 permet de conclure $\overline{HD^1 G} \neq G$.

Soit G un groupe nilpotent topologique séparé. On désigne par $C^oG = G, C^1G, \dots, C^rG = \{e\}$ sa suite centrale descendante et l'on pose $G_1 = \overline{C^1G}$.

<u>Théorème 1</u> Si H est un sous-groupe fermé propre de G, alors $\overline{HG_1} \neq G$.

On note $p(H)$ l'entier p compris entre 1 et r $(1 \leq p \leq r)$ tel que $C^{p-1}G \not\subset H \quad C^pG \subset H$.

On démontre par récurrence sur p la propriété énoncée par le théorème :

Si $p = 1$ la propriété est **évidente.**

Sinon on a :

$$\forall\, x \in C^{p-1}G \;,\; \forall\, y \in H \quad x\,y\,x^{-1}\,y^{-1} \in C^pG$$

donc : $\quad \forall\, x \in C^{p-1}G \;,\; \forall\, y \in H \quad x\,y\,x^{-1} \in H$

$C^{p-1}G$ est donc contenu dans le normalisateur K de H qui est un sous-groupe fermé contenant H, e.

Si $K \neq G$ on a donc $p(K) \leq p(H) - 1$ et il résulte de l'hypothèse de récurrence que K, donc H possède la propriété du théorème.

Si $K = G$, H est distingué et la propriété résulte de la proposition du paragraphe précédent.

<u>Corollaire</u> Soit $(a_i)_{i \in I}$ un système d'éléments de G, $\bar{a}_i$ l'image de a_i dans G/G_1 par l'application canonique π.

Les conditions suivantes sont équivalentes

- $(a_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de G
- $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de G/G_1.

Soit H le sous-groupe engendré par les $(a_i)_{i \in I}$; $\pi(H)$ est alors le sous-groupe engendré par les $\bar{a}_i$ $(i \in I)$ et la condition (1) [resp 2] équivaut à $\bar{H} = G$ [resp $\overline{\pi(H)} = G/G_1$]. Comme $\pi(\bar{H}) \subset \overline{\pi(H)}$, la condition 1 entraîne la condition 2. Si la condition 2 est satisfaite, on a d'après le lemme 3 : $\overline{HG_1} = G$ et ceci d'après le théorème 1 entraîne $\bar{H} = G$.

Dans la suite G est un groupe résoluble séparé. On pose $G_1 = \overline{D^1 G}$, $G_2 = \overline{D^1 G_1}$.

<u>Lemme 4</u> Soit H un sous-groupe fermé propre de G, V un sous-groupe fermé distingué qui est un sous-groupe propre de G_1 et qui vérifie $H \cap G_1 \subset V$. Alors $\overline{HV} \neq G$. Si $\overline{HG_1} = G$, G/V n'est pas nilpotent.

Soit π l'application canonique de G sur G/V. D'après le lemme 3, la première assertion équivaut à $\overline{\pi(H)} \neq G/V$. Comme $V \supset H \cap G_1 \supset D^1 H$, $\pi(D^1 H) = D^1(\pi H)$ est réduit à l'élément neutre et $\pi(H)$ est abélien. G_1 étant saturé par rapport à V on en déduit que $\pi(G_1)$ est fermé ; comme il contient $\pi(D^1 G) = D^1(G/V)$ on en déduit $\overline{D^1(G/V)} \subset \pi(G_1)$; de plus π étant continue $\pi(G_1) = \pi(\overline{D^1 G}) \subset \overline{\pi(D^1 G)} = \overline{D^1 G/V}$. On en conclut $\pi(G_1) = \overline{D^1(G/V)}$ et l'hypothèse $V \neq G_1$ entraîne $\overline{D^1(G/V)} = \pi(G_1) \neq \{e\}$, donc G/V non abélien. $\pi(H)$ ne peut alors être dense dans G/V.

Si G/V était nilpotent on aurait d'après le théorème 1

$\overline{\pi(H)\ \pi(G_1)} \neq G/V$; comme $\pi(\overline{HG_1}) \subset \overline{\pi(H)\ \pi(G_1)} = \overline{\pi(H)\ \pi(G_1)}$ on aurait $\pi(\overline{HG_1}) \neq G/V$ contrairement à l'hypothèse $\overline{HG_1} = G$.

<u>Théorème 2</u> Soit G un groupe résoluble séparé tel que G_1 soit nilpotent, H un sous-groupe fermé propre tel que $\overline{HG_1} = G$. Le sous-groupe $\overline{(H \cap G_1) G_2}$ est alors distingué, distinct de G_1 et $\overline{HG_2} \neq G$.

Les automorphismes intérieurs associés aux éléments de H laissent invariant $H \cap G_1$ car G_1 est distingué ; les automorphismes intérieurs associés aux éléments de G_1 induisent modulo G_2, l'identité sur $H \cap G_1$, par définition de G_2 donc appliquent $H \cap G_1$ dans $(H \cap G_1)G_2$; enfin G_2 est évidemment stable par tout automorphisme intérieur. On en déduit que $\overline{(H \cap G_1)G_2}$ est un sous-groupe distingué de $\overline{HG_1} = G$. Comme H est propre et $\overline{HG_1} = G$, $H \cap G_1$ est un sous-groupe fermé propre de G_1 et le théorème 1 appliqué au groupe nilpotent G_1 entraîne $\overline{(H \cap G_1)G_2} \neq G_1$. Le lemme 4 appliqué au sous-groupe $V = \overline{(H \cap G_1)G_2}$ entraîne alors $\overline{HG_2} \subset \overline{HV} \neq G$.

<u>Corollaire</u> Soit G un groupe résoluble séparé tel que G_1 soit nilpotent, $(a_i)_{i \in I}$ un système d'éléments de G, $\bar{a}_i$ l'image canonique de a_i dans G/G_2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $(a_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de G
- $(\bar{a}_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de G/G_2

démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 1.

Dans la suite G est connexe localement compact. G_1 est alors nilpotent : le quotient de G par son centre est un groupe de lie connexe $\hat{G}(1)$ et l'image de D^1G dans $\hat{G}$ est le groupe $D^1\hat{G}$ qui est nilpotent ; D^1G, extension centrale d'un groupe nilpotent est nilpotent de même que $G_1 = \overline{D^1G}$.
On désignera par C l'image réciproque dans G_1 du sous-groupe compact maximal C_1 de G_1/G_2. Dans le lemme 5 on suppose $G_2 = \{e\}$ et l'on désigne par $\mathcal{F}$ la famille des sous-groupes fermés distingués K, contenus dans G_1, distinct de G_1 et vérifiant la condition $\overline{K.C^kG} = G_1 \quad \forall\, k \geq 1$; cette condition

équivalente à la suivante ; il n'existe pas de sous-groupes fermé distingué H distinct de G_1 vérifiant $K \subset H < G_1$ et G/H nilpotent.

Lemme 5 Tout élément de $\mathcal{F}$ est contenu dans un élément maximal ; tout élément maximal V est connexe, contient C et G_1/V est un espace vectoriel réel.

Montrons d'abord qu'un élément K de $\mathcal{F}$ est contenu dans un élément V de $\mathcal{F}$ tel que G_1/V soit un espace vectoriel réel : G_1/K est un groupe abélien connexe localement compact dont le sous-groupe compact maximal c'est caractéristique, donc invariant dans G/K. On a $C' \neq G_1/K$ car sinon C', groupe compact abélien distingué du groupe connexe localement compact G/K serait contenu dans le centre (1) et G/K serait nilpotent. L'image réciproque V de C' dans G_1 est un sous-groupe fermé distingué contenant K tel que G_1/V, isomorphe à $G_1/K/C'$ soit un espace vectoriel réel non réduit à $\{o\}$. On en déduit que V contient C et est connexe car G_1/V est simplement connexe.

Si V_1 est un élément maximal de $\mathcal{F}$; G_1/V_1 est donc un espace vectoriel réel. Pour obtenir un élément maximal de $\mathcal{F}$ contenant K, il suffit de prendre un élément V de $\mathcal{F}$, maximal parmi les éléments de $\mathcal{F}$ tel que G_1/V soit un espace vectoriel réel ; V est alors aussi maximal comme élément de $\mathcal{F}$ d'après la première partie de la démonstration.

Corollaire Soit G un groupe résoluble connexe localement compact tel que $G_2 = \{e\}$, H un sous-groupe fermé propre tel que $\overline{HG_1} = G$. Il existe alors un sous-groupe fermé propre L contenant H tel que $L \cap G_1$ soit un sous-groupe connexe distingué contenant C et que $G_1/L \cap G_1$ soit un espace vectoriel réel ne contenant aucun sous-groupe distingué fermé propre de $G/L \cap G_1$.

$H \cap G_1$ est un élément de $\mathcal{F}$ car c'est un sous-groupe fermé propre qui est distingué d'après le théorème 2 et d'autre part il ne peut être contenu dans un sous-groupe fermé distingué K contenu dans G_1 et distinct de G_1 tel que G/K soit nilpotent d'après le lemme 4. Soit alors U un élément maximal de $\mathcal{F}$ contenant $H \cap G_1$, donc tel que G_1/U soit un espace vectoriel réel ne contenant aucun sous-groupe fermé propre de G/U. Le sous-groupe fermé $\overline{HU} = L$ est propre d'après le lemme 4 et $\overline{HU} \cap G_1$ est élément de $\mathcal{F}$; comme U est maximal on a $\overline{HU} \cap G_1 = U$, d'où le corollaire.

Pour démontrer le théorème 3 on aura besoin de deux lemmes purement algébriques.

<u>Lemme 6</u> : Soit M un module artinien fidèle de type fini sur un anneau commutatif A. Alors A est artinien, ne possède qu'un nombre fini d'idéaux maximaux I^{α} et les sous-modules $M^{\alpha} = I^{\alpha}M$ possèdent les propriétés :

- Pour tout sous-modules maximal N, il existe α unique tel que $N \supset M^{\alpha}$

- M/M^{α} est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K^{α} de ses homothéties et si P est un sous-module de M tel que M/P soit isotypique semi-simple de type A/I^{α} , $P \supset M^{\alpha}$.

A étant commutatif et M de type fini sur A, le contre-module de M est de type fini et l'anneau A de ses homothéties est artinien.

(2). Si R(A) est le radical de A A/R(A) est un anneau commutatif semi-simple, donc un produit direct d'un nombre fini de corps K^{α}.

Les idéaux maximaux de A/RA sont définis par $I'^{\alpha} = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} K^{\beta}$ et leurs images réciproques I^{α} dans A sont les idéaux maximaux de A.

L'annulateur du module simple M/N est un idéal maximal I^{α} ; donc $N \supset I^{\alpha}M = M^{\alpha}$. Si $N \supset M^{\alpha}$, $N \supset M^{\beta}$ $\beta \neq \alpha$, l'annulateur de M/N est un idéal contenant I_{α} et I_{β}, ce qui est impossible.

Enfin M/M^{α} est un module de type fini sur $A/I^{\alpha} = K^{\alpha}$, donc un espace vectoriel de dimension finie sur K^{α}.

Si M/P est semi-simple isotypique, il est de type A/I^{α} et l'on a $I^{\alpha}M/P = o$, $P \supset I^{\alpha}M = M^{\alpha}$.

<u>Lemme 7</u> : Soit G un groupe résoluble non nilpotent tel que G_1 soit abélien. On suppose que G_1 est muni d'une structure d'espace vectoriel sur un corps K et que les automorphismes intérieurs de G induisent des homothéties sur G_1. Le quotient de G par son centre est alors isomorphe à un sous-groupe contenant les translations du groupe des homothéties - translations de G_1.

Soit $\alpha(g)$ l'élément de K^* correspondant à l'automorphisme intérieur défini par $g \in G$. Il existe $g_o \in G$ tel que $\alpha(g_o) \neq 1$ car sinon G_1 serait contenu dans le centre de G qui serait alors nilpotent. Notons $\langle g, g_o\rangle$ l'élément $g\, g_o\, g^{-1}\, g_o^{-1}$, $\beta(g) = \langle g, g_o\rangle$, $\lambda(g) = (\alpha(g), \langle g, g_o\rangle)$ et remarquons que l'application $g \longrightarrow \lambda(g)$ est un homomorphisme dans le groupe des homothéties-translations de l'espace vectoriel G_1 :

$\lambda(gg') = (\alpha(gg'), \beta(gg')$ $\beta(gg') = \left[g\langle g', g_o\rangle g^{-1}\right] \left[\langle g, g_o\rangle\right]$

$\beta(gg') = \alpha(g)\, \beta(g') + \beta(g)$ $\alpha(gg') = \alpha(g)\, \alpha(g')$.

Le noyau G^α de λ est tel que $G^\alpha \cap G_1 = \{o\}$ car les conditions $x \in G_1$ $o = \beta(x) = x\, g_o\, x^{-1}\, g_o^{-1}$ entraînent $\alpha(g_o)x = x$, soit $x = o$ car $\alpha(g_o) \neq 1$.

Il en résulte que G^α est le centre de G car il le contient par définition et d'autre part :

$$\forall\, g \in G^\alpha \quad \forall\, h \in G \quad \langle g,h\rangle \in G_1$$

et $\langle g,h\rangle \in G^\alpha$ car G^α est distingué, donc $\langle g,h\rangle = e$.

$\lambda(G_1)$ contient les translations de G_1 car, pour tout x de G_1 on a $\beta(x) = x-\alpha(g_o)x$ $\alpha(x) = 1$. Comme $\alpha(g_o) \neq 1$ $\beta(G_1) = G_1$.

Dans la suite on notera $\mathcal{H}(W)$ le groupe des homothéties translations de W, espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

<u>Théorème 3</u> Soit G un groupe résoluble localement compact, connexe. Il existe un nombre fini de sous-groupes distingués G^α contenant C tels que G/G^α soit isomorphe à un sous-groupe connexe contenant les translations d'un groupe d'homothéties-translations d'un espace vectoriel réel ou complexe et possédant la propriété suivante : pour tout sous-groupe fermé propre H de G, on a $\overline{HG_1} \neq G$ ou sinon il existe α tel que $HG^\alpha \neq G$.

Montrons d'abord le théorème dans le cas où G_1 est un espace vectoriel réel et où H possède les propriétés $\overline{HG_1} = G$, $H \cap G_1 \supset V$, V étant un sous-espace vectoriel stable par les automorphismes intérieurs et maximal parmi les éléments vérifiant ces conditions.

La restriction d'un automorphisme intérieur à G_1 étant un endomorphisme continu de la structure de groupe additif de G_1, est une application linéaire.

Soit A la sous-algèbre de $End_R(G_1)$ engendrée par ces automorphismes ; les générateurs de A commutent car si g,h désignent deux éléments de G, $\hat{g},\hat{h}$ les automorphismes de G_1 associés on a $\langle g,h\rangle \in G_1$ $o = \langle\hat{g},\hat{h}\rangle = \hat{g}\hat{h} - \hat{h}\hat{g}$; A est donc commutatif. G_1 est un A-module artinien de type fini et V est un sous-module maximal ; notant G_1^α les sous-modules définis par le lemme 6 , il existe d'après ce lemme α unique tel que $V \supset G_1^\alpha$. G_1^α est distingué car c'est un sous G-module de G_1 ; de plus G/G_1^α est non nilpotent car $G/H \cap G_1$ ne l'est pas d'après le lemme 4.

Posant $W^\alpha = G_1/G_1^\alpha$, considérons l'homomorphisme de G/G_1^α dans $\mathcal{H}(W^\alpha)$ défini par le lemme 7. Le noyau de cet homomorphisme est le centre de G/G_1^α et G^α, image réciproque de ce centre dans G est un sous-groupe distingué de G contenu dans le normalisateur de H dans G car $H \supset G_1^\alpha$. L'hypothèse $\overline{HG_1} = G$ et le corollaire du lemme 3 entraînent que H n'est pas distingué, donc que son normalisateur est un sous-groupe fermé propre. Donc $\overline{HG_1^\alpha} \neq G$. Le corps des homothéties du A-module G_1/G_1^α est une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{R}$, donc isomorphe à $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$. Enfin l'injection canonique G/G^α dans $\mathcal{H}(W^\alpha)$ est continue et l'image de G/G^α est un sous-groupe connexe contenant strictement les translations.

Cette image peut donc être caractérisée de la façon suivante. Si $K^\alpha = R$, elle est égale à $\mathcal{H}^+(W^\alpha)$, ensemble des homothéties-translations de W^α à rapport positif ; si $K^\alpha = \mathbb{C}$ elle est égale à $\mathcal{H}(W^\alpha)$ ou bien à un sous-groupe d'homothéties-translations dont le rapport décrit un sous-groupe à un paramètre de C^*.

Dans tous les cas l'injection canonique est bicontinue car le but est un espace de Baire et la source un groupe localement compact réunion dénombrable de compacts (Bourbaki, Intégration, chap 7, ap 1).

Soit maintenant G quelconque et H tel que $\overline{HG_1} = G$. Notons $\tilde{G}, \hat{G}$ respectivement les groupes quotients G/G_2 $G/C = \tilde{G}/C_1$ et G^α l'image réciproque de $\hat{G}^\alpha$ dans l'homomorphisme canonique de G sur $\hat{G}$. On désigne par $\tilde{H}$, $\hat{H}$, $\hat{H}^\alpha$ les adhérences des images canoniques de H dans $\tilde{G}$, $\hat{G}$, $G/G^\alpha = \hat{G}/\hat{G}^\alpha$. Le théorème et le lemme 3 entraînent $\tilde{H} \neq \tilde{G}$; le lemme 3 et le corollaire au lemme 5 $\hat{H} \neq \hat{G}$ et aussi $\hat{H} \subset \hat{L}$ avec $\hat{L}$ sous-groupe fermé propre vérifiant les hypothèses de la première partie de la démonstration. On en déduit qu'il existe α tel que $\hat{L}\,\hat{G}^\alpha \neq \hat{G}$ et d'après le lemme 3 $\hat{H}^\alpha \neq G/G^\alpha$, ce même lemme entraîne finalement $\overline{HG^\alpha} \neq G$.

<u>Corollaire</u> : Soit $(a_i)_{i \in I}$ un système d'éléments de G, $\bar{a}_i$, $\bar{a}_i^\alpha$ les images canoniques de a_i dans G/G_1 , G/G^α. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- $(a_i)_{i \in I}$ est un système de générateurs de G
- $(\bar{a}_i)_{i \in I}$, $(\bar{a}_i^\alpha)_{i \in I}$ sont des systèmes de générateurs de G/G_1 , G/G^α , pour tout α.

La proposition 1 ci-dessous donne une caractérisation des sous-groupes G^α introduits dans la démonstration du théorème 3.

<u>Proposition 1</u> : Soit G un groupe résoluble connexe localement compact, V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps valué complet K. Pour tout homomorphisme continu λ de G dans $\mathcal{H}(V)$ tel que $\lambda(G)$ contienne strictement V, il existe α unique tel que λ se factorise à travers G/G^α.

D'après le corollaire au lemme 5, on peut supposer que $H \cap W$ est un espace vectoriel réel stable par les automorphismes intérieurs.
Si $\rho(g)$ désigne le rapport de g élément de G on sait que la restriction à W de l'automorphisme intérieur $\tilde{g}$ est la multiplication par $\rho(g)$. Lorsque W est complexe il résulte alors de la nature de G que $H \cap W$ est aussi un espace vectoriel complexe. Si g et h sont deux éléments arbitraires de G de centres $a(g)$ et $a(h)$, le calcul montre que $\langle g,h \rangle$ est une translation de vecteur $\rho(g)\,[a(h)-a(g)]$; comme les translations de H sont les éléments du sous-espace $H \cap W$, on en déduit que si h,h' désignent deux éléments de H qui ne sont pas des translations, on a :

$$a(h') = a(h) + w \qquad w \in H \cap W$$

d'où la proposition.

<u>Exemple</u> G est le groupe des matrices triangulaires inférieures(n,n) à coefficients réels dont les termes diagonaux sont positifs. A étant une telle matrice on peut la décomposer suivant la base canonique

$$E_{ij} : A = a\left(E_{11} + \sum_{\underline{i \geq 1}}^{i=n-1} a_i \, E_{i+1,i+1}\right) + \sum_{i=1}^{i=n-1} b_i E_{i+1,i} + R$$

R étant combinaison linéaire des $E_{ij}(i>j+1)$, a et a_i étant positifs. G_1 est égal à l'ensemble des matrices A telles que $a = a_i = 1$ et $G_2 \subset G_1$ est l'ensemble des matrices A vérifiant $a = a_i = 1 \quad b_j = o$. G_1 est donc nilpotent et le théorème 3 s'applique à G. Le groupe quotient $G_1/G_2 = \hat{G}_1$ s'identifie au groupe additif R^{n-1} en associant à $A \in G_1$ l'élément $\beta = (b_1 \dots b_{n-1})$; l'automorphisme intérieur de $\hat{G}_1 = R^{n-1}$ associé à un élément A est l'application linéaire représentée par la matrice diagonale dont le $i^{\text{ème}}$ coefficient est a_i.

L'algèbre sur $\mathbb{R}$ engendrée par ces matrices est l'algèbre des matrices diagonales $(x_1,\dots,x_{n-1})$ $x_i \in \mathbb{R}$; les idéaux maximaux sont définis par une condition $x_i = o$ et $\hat{G}_1^i$ est donc l'ensemble des vecteurs β tels que $b_i = o$. G^i est alors le sous-groupe des A défini par $b_i = o$ $a_{i-1} = a_i$ et l'homomorphisme canonique de G sur G/G^i associe à A l'homothétie translation (a_i, b_i). Enfin G/G_1 s'identifie à l'ensemble des matrices diagonales (n,n) à coefficients positifs et l'homomorphisme G sur G/G_1 associe à A la matrice diagonale $(a, aa_1,\dots,aa_{n-1})$, le nombre minimum de générateurs de G/G_1 est $n+1$ et celui de G/G^i est 2. Le nombre minimum de générateurs de G est donc $n+1$ d'après le théorème et la condition nécessaire et suffisante pour que $(A^1,\dots,A^p)$ soit un système de générateurs de G est que :

1) il n'existe pas de réels $(\lambda, \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$ tels que les nombres $\lambda \operatorname{Log} a^r + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \operatorname{Log} a^r a_i^r$ soient simultanément entiers pour $r = 1,\dots,p$.

2) Pour tout i, il n'existe pas de réels (u,v) tels que $u\, b_i^r + v(1-a_i^r)$ soient simultanément nuls pour tout $r = 1,\dots,p$.

BIBLIOGRAPHIE

1) Malcev on solvable topological groups. Math Sbornik (recueil Math) N.S 1946 p.165-174

2) Montgomery-Zippin topological transformations groups. Interscience tracts 1955

3) Chevalley Theory of Lie groups. Princeton Univ. Press 1946

4) Bourbaki Algèbre chapitre VIII.