

P. BOLLEY

J. CAMUS

**Étude de la régularité de certains problèmes elliptiques dégénérés  
dans des ouverts non réguliers, par la méthode de réflexion**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1968-1969, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 4, p. 1-17

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1968-1969\\_\\_1\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__1_A4_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ETUDE DE LA REGULARITE DE CERTAINS PROBLEMES ELLIPTIQUES DEGENERES  
DANS DES OUVERTS NON REGULIERS, PAR LA METHODE DE REFLEXION

par P. BOLLEY et J. CAMUS

INTRODUCTION.

L'objet essentiel de ce travail est l'application de la méthode de réflexion pour l'étude d'un "problème avec coin" du type suivant : problème de Dirichlet associé à un opérateur elliptique dégénéré d'ordre 2.

Cette méthode permet aussi de retrouver les résultats de régularité du problème de Dirichlet associé à l'opérateur  $\Delta$  dans un cube de  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , donnés dans [4].

1. Un opérateur de prolongement.

$$\text{Soient } \Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y > 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$$

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}.$$

Pour une fonction  $u$  définie sur  $\Omega_1$ , on désigne par  $Pu$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^2$  par :

$$Pu(x,y) = u(x,y) \quad \text{si } x < 0$$

$$Pu(x,y) = -u(-x,y) \quad \text{si } x > 0.$$

L'opérateur  $P$  possède les propriétés suivantes :

Proposition 1.1. Pour toute fonction  $u$  de  $H^1(\Omega_1)$  telle que  $u(0,.) = 0$  (dans  $H^{1/2}(0,+\infty)$ ), alors  $Pu$  appartient à  $H^1(\mathbb{R}_+^2)$  et

$$\frac{\partial Pu}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \quad \text{si } x < 0$$

$$\frac{\partial Pu}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(-x,y) \quad \text{si } x > 0$$

$$\frac{\partial Pu}{\partial y}(x,y) = P \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

Soit  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ .

$$\left\langle \frac{\partial Pu}{\partial x}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)} = - \left\langle Pu, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)}$$

$$= - \int_{\Omega_1} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) dx dy + \int_{\Omega_2} u(-x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) dx dy.$$

Or  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$  appartiennent à  $L^2(-\infty, 0 ; L^2(0, +\infty))$ , on peut donc faire une intégration par parties par rapport à  $x$  dans chaque intégrale et comme  $u(0,.)$  est nul on en déduit que :

$$\left\langle \frac{\partial P u}{\partial x}, \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}'(\mathbb{R}_+^2) \times \mathfrak{D}(\mathbb{R}_+^2)} = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \varphi(x, y) dx dy + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x}(-x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Enfin la dérivation en y est immédiate.

**Proposition 1.2.** Pour toute fonction u de  $H^1(\Omega_1)$  telle que

(i)  $u(0, \cdot) = 0$  (dans  $H^{1/2}(0, +\infty)$ )

(ii)  $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}_+^2), \varphi u|_{\Omega_1} \in H^2(\Omega_1),$

on a :

$$\frac{\partial^2 P u}{\partial x^2}(x, y) = P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 P u}{\partial y^2}(x, y) = P \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y).$$

La vérification se fait comme précédemment.

## 2. Le problème.

Soit  $w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| < 1\}.$

On désigne par V l'espace :

$$\{u \in \mathfrak{D}'(w), \sqrt{1-y^2} D^\alpha u \in L^2(w), 0 \leq |\alpha| \leq 1\}$$

où  $D^\alpha = D_x^{\alpha_1} D_y^{\alpha_2} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$  pour  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  appartenant à  $\mathbb{N}^2$  et

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

V est un espace de Hilbert pour la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_V = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \|\sqrt{1-y^2} D^\alpha u\|_{L^2(w)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour m appartenant à  $\mathbb{N}$ , on désigne par  $H^m(-1, 1)$  l'espace :

$$\{u \in \mathfrak{D}'(-1, 1), \sqrt{1-y^2} D_y^p u \in L^2(-1, 1), 0 \leq p \leq m\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$u \rightarrow \|u\|_{H^m_{\sqrt{1-y^2}}(-1,1)} = \left( \sum_{0 \leq p \leq m} \|\sqrt{1-y^2} D_y^p u\|_{L^2(-1,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 2.1.** (i)  $\mathfrak{D}(\bar{w})$  est dense dans  $V$ .  
(ii) l'application  $u \rightarrow (u(-1, \cdot), u(1, \cdot))$  définie sur  $\mathfrak{D}(\bar{w})$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $V$  dans  $Z \times Z$  où  $Z = [H^1_{\sqrt{1-y^2}}(-1,1), H^0_{\sqrt{1-y^2}}(-1,1)]_{\frac{1}{2}}$ . Cette application est surjective et admet un relèvement linéaire continu.

Pour la définition de  $Z$  on renvoie à [3].

La densité de  $\mathfrak{D}(\bar{w})$  dans  $V$  se démontre de la façon suivante : avec une partition de l'unité convenable on isole chaque coin  $(\epsilon, \epsilon')$  avec  $\epsilon = -1, 1$  et  $\epsilon' = -1, 1$ , de l'ouvert  $w$  et ensuite à l'aide d'un prolongement de Babitch [6], on se ramène à l'espace

$$W_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^2) = \{u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}_+^2), \sqrt{y} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_+^2), 0 \leq |\alpha| \leq 1\}$$

muni de la norme

$$u \mapsto \|u\|_{W_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \|\sqrt{y} D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans [2], on démontre que  $\mathfrak{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^2)$  est dense dans  $W_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)$ .

**Remarque 2.1.** On peut montrer en résultat de densité plus précis que celui que l'on vient de voir : si l'on désigne par  $\mathfrak{D}^*(w)$  l'espace des fonctions de  $\mathfrak{D}(\bar{w})$  nulles dans un voisinage de  $y = 1$  et de  $y = -1$ , cet espace est dense

dans  $V$ . Pour cela on utilise la technique précédente et le fait que, d'après [3],  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$  est dense dans  $W_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)$ .

Proposition 2.2.  $V$  est inclus dans  $L^2(w)$  avec injection continue.

Soit  $u$  dans  $V$  nulle au voisinage de  $y = -1$  (ce qu'on peut toujours supposer en introduisant sur  $w$  une partition de l'unité convenable). Pour presque tout  $x$  appartenant à  $] -1, 1[$  on a :

$$u(x,y) = \int_{-1}^y \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) dy.$$

L'inégalité de Hardy [5] montre que :

$$\|u\|_{L^2(w)} \leq C \|(1-y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}\|_{L^2(w)} \leq C \|u\|_V.$$

On désigne par  $\overset{\circ}{V}$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(w)$  dans  $V$ . On peut caractériser  $\overset{\circ}{V}$  par :

Proposition 2.3.  $\overset{\circ}{V}$  coïncide avec l'ensemble des éléments de  $V$  tels que  $u(-1, \cdot) = u(1, \cdot) = 0$  (dans  $Z$ ).

Toute fonction  $u$  de  $\overset{\circ}{V}$  vérifie  $u(-1, \cdot) = u(1, \cdot) = 0$ .

Inversement soit une fonction  $u$  de  $V$  telle que  $u(-1, \cdot) = u(1, \cdot) = 0$ .

D'après la remarque 2.1, il existe une suite de fonctions  $\psi_n$  de  $\mathcal{D}^*(w)$  qui approchent  $u$  dans  $V$ . Soit la suite de fonctions  $\varphi_n$  paires sur  $] -1, 1[$  définies par :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 - \frac{2}{n} \\ &= -nx \text{ pour } 1 - \frac{2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ &= 0 \text{ pour } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

On vérifie que la suite de fonctions  $\phi_n$  définies par  $\phi_n(x,y) = \varphi_n(x) \psi_n(x,y)$  et qui sont continues et à support compact dans  $w$ , convergent vers  $u$  dans  $V$ . Il suffit ensuite de régulariser ces fonctions.

Le dual  $\overset{\circ}{V}'$  de  $\overset{\circ}{V}$  est un espace de distributions sur  $w$  et

$$\overset{\circ}{V} \subset L^2(w) \subset \overset{\circ}{V}' ,$$

les injections étant continues.

On considère la forme intégrro-différentielle définie sur  $V$  par :

$$a(u,v) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \int_w (1-y^2) D^\alpha u \overline{D^\alpha v} \, dx \, dy.$$

Cette forme est  $V$ -coercive. Le lemme de Lax Milgram montre alors que : pour tout  $f$  dans  $\overset{\circ}{V}'$ , il existe  $u$  unique dans  $\overset{\circ}{V}$  tel que pour tout  $v$  dans  $\overset{\circ}{V}$ , on a  $a(u,v) = \langle f, \overline{v} \rangle_{\overset{\circ}{V}' \times \overset{\circ}{V}}$ . L'interprétation de ce problème conduit au problème aux limites suivant : pour tout  $f$  dans  $\overset{\circ}{V}'$ , il existe  $u$  unique dans  $\overset{\circ}{V}$  tel que

$$\begin{cases} Au = f \text{ dans } \overset{\circ}{V}' \\ u(-1, \cdot) = u(1, \cdot) = 0 \end{cases}$$

où  $A$  est l'opérateur différentiel associé à  $a$  i.e. :

$$A = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha ((1-y^2) D^\alpha).$$

### 3. Un théorème de régularité.

Pour  $m$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on désigne par  $H_{1-y^2}^m(w)$  l'espace  $\{u \in \mathcal{D}'(w), (1-y^2) D^\alpha u \in L^2(w), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ .

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_{H_{1-y^2}^m(w)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|(1-y^2) D^\alpha u\|_{L^2(w)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $m$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on désigne par  $H_{1-y^2}^m(-1,1)$  l'espace  $\{u \in \mathcal{D}'(-1,1), (1-y^2) D_y^p u \in L^2(-1,1), 0 \leq p \leq m\}$ .

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$u \longrightarrow \|u\|_{H_{1-y^2}^m(-1,1)} = \left( \sum_{0 \leq p \leq m} \|(1-y^2) D_y^p u\|_{L^2(-1,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $m$  et  $k$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , avec  $m < k$ , on désigne par  $X_{m,k}$  l'espace :

$$X_{m,k} = \left[ H_{1-y^2}^k(-1,1), H_{1-y^2}^0(-1,1) \right]_{\frac{2m+1}{2k}}.$$

Pour la définition de ces espaces on renvoie à [3].

On désigne enfin par  $B$  l'opérateur différentiel défini sur  $\mathcal{D}'(-1,1)$

par :

$$g \in \mathcal{D}'(-1,1), \quad Bg = -\frac{1}{1-y^2} D_y ((1-y^2) D_y g) + g.$$

On a le théorème de régularité suivant :

**Théorème 3.1.** Pour tout  $k$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , l'opérateur  $A$  est un isomorphisme de  $H_{1-y^2}^{k+2}(w) \cap \overset{\circ}{V}$ , muni de la norme induite par celle de  $H_{1-y^2}^{k+2}(w)$  sur l'espace

$Y^k(w)$  défini par :

pour  $k = 0$ ,  $Y^k(w) = L^2(w)$ ,

pour  $k \geq 1$ ,  $Y^k(w) = \{f \in H^k(w), \sum_{h=0}^{m-1} B^h \left( -\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-2-2h} f}{\partial x^{2m-2-2h}}(\varepsilon, y) \right) \in X_{2m, k+2} \}$  ;

$$\varepsilon = -1, 1 ; m = 1, 2, \dots, p \text{ si } k = 2p \text{ ou si } k = 2p-1,$$

et muni de la norme canonique.



lère étape. On démontre que si  $u$  appartient à  $H_{1-y}^{k+2}(w)$ , alors  $Au$  appartient à  $Y^k(w)$ , pour  $k$  appartenant à  $\mathbb{N}$ .

On montre d'abord que si  $u$  appartient à  $H_{1-y}^{k+2}(w)$ , alors  $Au$  appartient à  $H^k(w)$ . Avec une partition de l'unité convenable, on isole chaque coin  $(\epsilon, \epsilon')$  avec  $\epsilon = -1, 1$  et  $\epsilon' = -1, 1$ , de l'ouvert  $w$  et à l'aide d'un prolongement de Babitch, on se ramène à l'espace :

$$W_1^{k+2,2}(\mathbb{R}_+^2) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^2), y D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_+^2), 0 \leq |\alpha| \leq k+2\}.$$

Dans [2] on montre que si  $u$  appartient à  $W_1^{k+2,2}(\mathbb{R}_+^2)$ , alors  $u$  (resp.  $yu$ ) appartient à  $H^{k+1}(\mathbb{R}_+^2)$  (resp.  $H^{k+2}(\mathbb{R}_+^2)$ ). On en déduit facilement que si  $u$  appartient à  $H_{1-y}^{k+2}(w)$ , alors  $Au$  appartient à  $H^k(w)$ .

On examine ensuite les conditions aux limites pour  $k \geq 1$ . On applique l'opérateur  $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$  à la relation  $Au = f$  puis l'opération trace sur les bords  $x = 1$  et  $x = -1$  de  $w$  et comme on peut permuter cette opération trace et la dérivation en  $y$ , on obtient que :

pour  $m = 0, 1, \dots, k-1$ ,

$$\frac{\partial^{m+2} u}{\partial x^{m+2}}(\epsilon, y) = -\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(\epsilon, y) + B\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(\epsilon, y)\right).$$

Par récurrence, on établit que pour  $m = 1, 2, \dots, p$  si  $k = 2p-1$  ou si  $k = 2p$  et pour  $\epsilon = -1, 1$ .

$$(3.1) \quad \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(\epsilon, y) = -\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-2} f}{\partial x^{2m-2}}(\epsilon, y) + B\left(-\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-4} f}{\partial x^{2m-4}}(\epsilon, y)\right) + \dots + \\ + B^{m-1}\left(-\frac{1}{1-y^2} f(\epsilon, y)\right).$$

(avec la convention suivante :  $B^0 g = g$  et pour  $m = 1$ , la relation (3.1)

s'écrit  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\epsilon, y) = -\frac{1}{1-y^2} f(\epsilon, y)$ ).

Or si  $u$  appartient à  $H_{1-y^2}^{k+2}(w)$ , alors

$$\begin{cases} u \in L^2(-1,1 ; H_{1-y^2}^{k+2}(-1,1)) \\ \frac{\partial^{k+2} u}{\partial x^{k+2}} \in L^2(-1,1 ; H_{1-y^2}^0(-1,1)) \end{cases}$$

donc pour  $m = 0, 1, \dots, k+1$  et  $\epsilon = -1, 1$  on a :

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(\epsilon, y) \in X_{m, k+2}.$$

Ainsi les relations (3.1) ou bien un sens et la fonction  $f (=Au)$  vérifie les conditions aux limites de l'espace  $Y^k(w)$ .

2ème étape. On démontre maintenant que pour tout  $f$  appartenant à  $Y^k(w)$  la solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} u \in V^0 \\ Au = f \text{ dans } w \end{cases}$$

appartient à  $H_{1-y^2}^{k+2}(w)$ .

L'idée de la démonstration est la suivante : en adaptant l'opérateur  $P$  introduit précédemment, on se ramène au problème de M.M. BAOUENDI et GOULAOUIC traité dans [1]. Utilisant les notations de [1], on montre grâce à [2], que l'espace

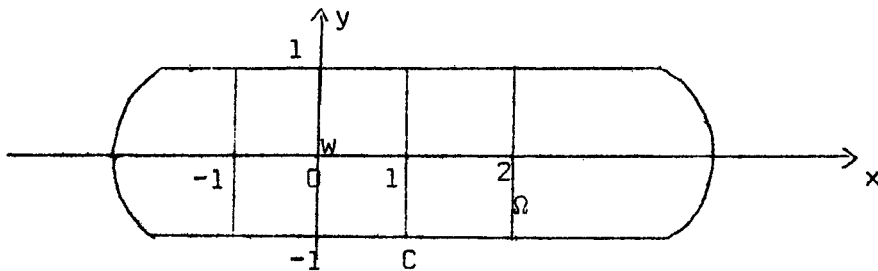
$$D^k(\Omega) = \{u \in H^{k+1}(\Omega), \varphi u \in H^{k+2}(\Omega)\}$$

coïncide avec l'espace :

$$H_{\varphi}^{k+2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi D^{\alpha} u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k+2\}.$$

Il est bien évident que les seuls ennuis de régularité proviennent des coins de  $w$ . On localisera par la suite au voisinage d'un coin, par exemple  $C = (+1, -1)$ , de telle façon que le support des nouvelles fonctions soit contenu dans  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ . On introduit alors un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^2$ ,

dont le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^\infty$ , et prolongeant l'ouvert  $w$  de la façon suivante :



Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) > 0\}. \\ \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x,y) = 0\}. \\ d\varphi(x,y) \neq 0 \text{ pour } (x,y) \in \partial\Omega \quad (\text{où } d\varphi \text{ est la différentielle de } \varphi) \\ \varphi(x,y) = 1-y^2 \text{ dans } w. \end{array} \right.$$

Le cas où  $k = 0$  se traite à part, puisqu'il n'y a pas de conditions aux limites dans  $Y^0(w)$ . Après localisation du problème au voisinage de  $D$ , on étudie la solution  $u$  du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \overset{\circ}{V} \\ Au = f \text{ dans } w, f \in L^2(w) \\ \text{supp } u \subset \{(x,y) \in \bar{w}, 0 < x \leq 1\}. \end{array} \right.$$

On adapte l'opérateur de prolongement introduit précédemment, au cas présent, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} Pu(x,y) = u(x,y) \text{ si } x < 1. \\ Pu(x,y) = -u(2-x,y) \text{ si } x > 1. \end{array} \right.$$

On définit par  $V(\Omega)$  l'espace :

$$\{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \sqrt{\varphi} D^\alpha u \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq 1\}.$$

La proposition 1.1 montre que  $Pu$  appartient à  $V(\Omega)$  et la proposition 1.2 montre que :

$A(x,y;D) Pu = P(Au)$  et donc appartient à  $L^2(\Omega)$ , où

$$A(x,y;D) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\varphi D^\alpha)$$

Or d'après [1], cet opérateur est un isomorphisme de  $D^k(\Omega)$  sur  $H^k(\Omega)$  pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ . Donc ici,  $Pu$  appartient à  $H_\varphi^2(\Omega)$  et par restriction à  $w$ ,  $u$  appartient à  $H_{1-y^2}^2(w)$ .

Pour  $k \geq 1$ , la démonstration se fait par récurrence, en distinguant les cas où  $k$  est pair et impair.

$k = 1$ .

Soit  $f$  appartenant à  $H^1(w)$  tel que  $-\frac{1}{1-y^2} f(\epsilon,y)$  appartienne à  $X_{2,3}$ .

Soit  $W$  appartenant à  $H_{1-y^2}^3(w)$  tel que

$$\begin{cases} W(\epsilon,y) = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(\epsilon,y) = -\frac{1}{1-y^2} f(\epsilon,y). \end{cases}$$

La fonction  $\beta = u - W$  vérifie :

$$\begin{cases} \beta \in \overset{\circ}{V} \\ A\beta = f - AW \in H^1(w) \\ A\beta(\epsilon,y) = 0. \end{cases}$$

On va montrer que  $\beta$  appartient à  $H_{1-y^2}^3(w)$  et par différence, on en déduira que  $u$  appartient à  $H_{1-y^2}^3(w)$ . On utilise la méthode employée pour  $k = 0$ . Après localisation au voisinage de  $C$ , on étudie la solution  $\beta$  du problème :

$$\begin{cases} \beta \in \overset{\circ}{V} \\ A\beta \in H^1(w) \\ A\beta(\epsilon, y) = 0 \\ \text{supp } \beta \subset \{(x, y) \in \bar{w}, x > 0\}. \end{cases}$$

A l'aide de l'opérateur de prolongement P, on se ramène au problème

$$\begin{cases} P\beta \in V(\Omega) \\ A(x, y; D) P\beta = P(A\beta) \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

D'après [1],  $P\beta$  appartient à  $H_{\varphi}^3(\Omega)$  et par restriction à  $w$ ,  $\beta$  appartient à  $H_{1-y^2}^3(w)$ .

$k = 2$ .

Soit  $f$  appartenant à  $H^2(w)$  tel que  $-\frac{1}{1-y^2} f(\epsilon, y)$  appartient à  $X_{2,4}$ .

Soit  $W$  appartenant à  $H_{1-y^2}^4(w)$  tel que :

$$\begin{cases} W(\epsilon, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(\epsilon, y) = -\frac{1}{1-y^2} f(\epsilon, y). \end{cases}$$

La fonction  $\beta = u - W$  vérifie

$$\begin{cases} \beta \in \overset{\circ}{V} \\ A\beta = f - AW \in H^2(w) \\ A\beta(\epsilon, y) = 0. \end{cases}$$

On termine comme précédemment.

$k > 2$ .

Ecrivant  $k$  sous la forme  $2h+1$  ou  $2h+2$  suivant la parité de  $k$ , avec  $h \geq 1$ , on fait la démonstration par récurrence sur  $h$ . On vient de vérifier la

propriété pour  $h = 0$ . L'hypothèse de récurrence est la suivante : pour tout  $\ell$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell \leq h-1$ , pour tout  $f$  appartenant à  $Y^{2\ell+1}(w)$  (resp.  $Y^{2\ell+2}(w)$ ), la solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} u \in \overset{\circ}{V} \\ Au = f \text{ dans } w \end{cases}$$

appartient à  $H^{2\ell+3}_{1-y^2}(w)$  (resp.  $H^{2\ell+4}_{1-y^2}(w)$ ).

On fait la démonstration maintenant pour  $k = 2h+1$ . Soit donc  $f$  appartenant à  $Y^{2h+1}(w)$ . Puisque  $X_{2m,2h+3}$  est inclus dans  $X_{2m,2h+2}$ , l'hypothèse de récurrence appliquée avec  $\ell = h-1$  et avec l'espace  $Y^{2h}(w)$ , montre que  $u$  appartient à  $H^{2h+2}_{1-y^2}(w)$ . Il reste à vérifier que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  appartient à  $H^{2h+1}_{1-y^2}(w)$ .

Soit  $W$  appartenant à  $H^{2h+1}_{1-y^2}(w)$  tel que

$$\begin{cases} W(\epsilon, y) = 0 \\ \frac{\partial^{2m} W}{\partial x^{2m}}(\epsilon, y) = \sum_{p=0}^{m-1} B^p \left( -\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-2-2p} f}{\partial x^{2m-2-2p}}(\epsilon, y) \right) \text{ pour } m = 1, 2, \dots, h+1 \\ \epsilon = -1, 1 \end{cases}$$

La fonction  $\beta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  vérifie

$$\begin{cases} \beta \in \overset{\circ}{V} \\ A\beta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - A \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \in H^{2h-1}. \end{cases}$$

On examine le deuxième membre  $F = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - A \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$ . Soit  $m$  appartenant à  $\{1, 2, \dots, h\}$ . On a :

$$-\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-2-2p} F}{\partial x^{2m-2-2p}}(\epsilon, y) = -\frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-2p} f}{\partial x^{2m-2p}}(\epsilon, y) - \frac{\partial^{2m-2p-2} W}{\partial x^{2m-2p-2}}(\epsilon, y) + B \left( \frac{\partial^{2m-2p} W}{\partial x^{2m-2p}}(\epsilon, y) \right)$$

d'où :

$$\sum_{p=0}^{m-1} B^p \left( - \frac{1}{1-y^2} \frac{\partial^{2m-2-2p} F}{\partial x^{2m-2-2p}} (\epsilon, y) \right) = 0.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée avec  $\ell = h-1$  et avec l'espace  $\gamma^{2h-1}$  montre alors que  $\beta$  appartient à  $H_{1-y^2}^{2h+1}(w)$ . Comme  $W$  appartient à  $H_{1-y^2}^{2h+3}(w)$ , par différence on en déduit que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  appartient à  $H_{1-y^2}^{2h+1}(w)$ .

Pour montrer que  $u$  appartient à  $H_{1-y^2}^{2h+3}(w)$ , il suffit de vérifier que

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+3}} \in L^2(w) \\ (1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+2} \partial x} \in L^2(w). \end{array} \right.$$

De l'équation  $Au = f$  on déduit que  $\frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2) \frac{\partial u}{\partial y})$  appartient à  $H_{1-y^2}^{2h+1}(w)$  (car  $u$  appartient à  $H_{1-y^2}^{2h+2}(w)$  qui est inclus dans  $H_{1-y^2}^{2h+1}(w)$ .) et donc que

$$\frac{\partial^{2h+2}}{\partial y^{2h+2}} ((1-y^2) \frac{\partial u}{\partial y}) \text{ appartient à } L^2(w).$$

Or :

$$(3.2) \quad \frac{\partial^{2h+2}}{\partial y^{2h+2}} ((1-y^2) \frac{\partial u}{\partial y}) = (1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+3}} - 2(2h+2)y \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}} + K \frac{\partial^{2h+1} u}{\partial y^{2h+1}}$$

$$\frac{1}{(1-y^2)^{2h+1}} \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}) = (1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+3}} - 2(2h+2)y \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}$$

Comme  $\frac{\partial^{2h+1} u}{\partial y^{2h+1}}$  appartient à  $L^2(w)$  on en déduit que :

$$(3.3) \quad \frac{1}{(1-y^2)^{2h+1}} \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}) \in L^2(w).$$

Par suite pour presque tout  $x$  appartenant à  $] -1,1[$  on a :

$$\left[ \begin{array}{l} [y \rightarrow \frac{1}{(1-y^2)^{2h+1}} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}})] \in L^2(-1,1) \\ [y \rightarrow \frac{1}{(1-y^2)^{2h+1}} \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}})] \in L^2(-1,1). \end{array} \right.$$

La trace de  $(1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, \cdot)$  est donc nulle sur les bords  $y = 1$  et  $y = -1$  et on peut alors écrire pour presque tout  $x$  appartenant à  $] -1,1[$  :

$$(1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, y) = \int_{-1}^y \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, y)) dy$$

$$\frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, y) = \frac{1}{(1-y^2)^{2h+2}} \int_{-1}^y \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, y)) dy.$$

On suppose que l'on a localisé  $u$  au voisinage, par exemple, du bord  $y = -1$ . L'inégalité de Hardy [5] permet d'écrire que :

$$\int_{-1}^{+1} \left| \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, y) \right|^2 dy \leq K \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1+y)^{4h+2}} \left| \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+2} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}}(x, y)) \right|^2 dy.$$

En intégrant ensuite par rapport à  $x$ , la relation (3.3) montre que :

$$\frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+2}} \in L^2(w).$$

Par différence la relation (3.2) montre que :

$$(1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+3}} \in L^2(w).$$



Il reste à vérifier que :

$$(1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+2} \partial x} \in L^2(w).$$

Du fait que  $\frac{\partial}{\partial y} (1-y^2) \frac{\partial u}{\partial y}$  appartient à  $H^{2h+1}(w)$  on déduit que

$$\frac{\partial^{2h+1}}{\partial y^{2h+1}} ((1-y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) \text{ appartient à } L^2(w).$$

Or

$$\frac{\partial^{2h+1}}{\partial y^{2h+1}} ((1-y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = (1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial x \partial y^{2h+2}} - 2(2h+1) y \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+1} \partial x} + K \frac{\partial^{2h+1} u}{\partial y^{2h} \partial x}$$

$$(3.4) \frac{1}{(1-y^2)^{2h}} \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+1} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+1} \partial x}) = (1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial x \partial y^{2h+2}} - 2(2h+1) y \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+1} \partial x}.$$

Comme  $\frac{\partial^{2h+1} u}{\partial y^{2h} x}$  appartient à  $L^2(w)$  on déduit que

$$\frac{1}{(1-y^2)^{2h}} \frac{\partial}{\partial y} ((1-y^2)^{2h+1} \frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+1} \partial x}) \text{ appartient à } L^2(w).$$

On termine comme précédemment : l'inégalité de Hardy permet de montrer que  $\frac{\partial^{2h+2} u}{\partial y^{2h+1} \partial x}$  appartient à  $L^2(w)$  et on en déduit d'après que (3.4)

que  $(1-y^2) \frac{\partial^{2h+3} u}{\partial y^{2h+2} \partial x}$  appartient à  $L^2(w)$ .

On a donc la régularité pour  $k = 2h+1$ . Pour  $k = 2h+2$ , la démonstration est du même type.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. BAOUENDI .                      Compte-rendus tome 226. Série A; 1968 p. 336.  
C. GOULAOUIC
- [2] G. GEYMONAT                        Problemi ai limiti lineari ellitici negli spazi  
P. GRISVARD                        di Sobolev con peso. Le Matematiche. Vol. XXII.  
Fasc. 2. 1967.
- [3] P. GRISVARD                        Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev  
avec poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa ; série 3 ;  
t. 17 ; 1963 ; p. 255.
- [4] P. GRISVARD                        Equations différentielles abstraites. Nice.
- [5] G.H. HARDY                         Inequalities. Cambridge.  
H.E. LITTLEWOOD                    Univ. Press. 1934.  
G. POLYA
- [6] J.L. LIONS                         Problèmes aux limites non homogènes.  
E. MAGENES                         Dunod. 1968.
- [7] J. NECAS                         Sur une méthode pour résoudre les équations aux  
dérivées partielles du type elliptique , voisine  
de la variationnelle. Ann. Scuola Norm. Sup.  
Pisa. t. 16 ; 1962 ; p. 305.