JEAN-CLAUDE TOUGERON

Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A9_0>

POINTS DE NON-PLATITUDE D'UN MORPHISME D'ESPACES ANALYTIQUES

par Jean-Claude TOUGERON

Nous proposons une démonstration du théorème suivant, démontré par J. FRISCH dans [3] :

Théorème. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques et soit $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. L'ensemble Z des points $x \in X$ en lesquels $\mathfrak{F}$ n'est pas f-plat est un sous-ensemble analytique fermé de X (i.e. Z est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace analytique fermé de X).

Cette démonstration diffère sensiblement de celle de FRISCH, mais s'appuie, comme cette dernière, sur le théorème du paragraphe 1 de [3].

Si Y' est un sous-espace analytique fermé de Y, désignons par i l'immersion fermée de $f^{-1}(Y')$ dans X et par f' l'application induite par f de $f^{-1}(Y')$ dans Y'. On désignera par $\Omega(Y')$ l'ensemble des points $x \in f^{-1}(Y')$ en lesquels $i^*(\mathfrak{F})$ n'est pas f'-plat. Nous devons démontrer que $Z = \Omega(Y)$ est un sous-ensemble analytique fermé de X.

Nous démontrons d'abord quelques lemmes :

Lemme 1. Avec les notations précédentes :

$$\Omega(Y) \cap f^{-1}(Y') = \Omega(Y') \cup \operatorname{Supp}\left[\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_{Y'})\right]$$

Puisque $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_{Y'})_x = \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y,f(x)}}(\mathfrak{F}_x, \mathcal{O}_{Y',f(x)})$, ce lemme est une conséquence du résultat bien connu (cf. [1], théorème 1, chapitre III, § 5) :

<u>Lemme 2</u> . Soient A et B deux anneaux locaux noethériens et soit $\varphi : A \to B$ un morphisme local de A dans B. Si M est un module de type fini sur B et si I est un idéal propre de A, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) M est un A-module plat.

(2) M/IM est un module plat sur A/I et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = (0)$.

Pour la démonstration du lemme suivant, nous renvoyons à [2], chapitre 4, § 6.9 :

<u>Lemme 3.</u> Soient A un anneau intègre noethérien, B une A-algèbre de type fini et M un module de type fini sur B. Il existe $f \in A - (0)$ tel que M_f soit un module plat sur A_f.

<u>Corollaire.</u> Soit p un idéal premier d'un anneau noethérien A et soit M un module de type fini sur A. Il existe $f \in A-p$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}$, $p^i.M_f/p^{i+1}.M_f$ soit un module plat sur $A_f/p.A_f$.

<u>Démonstration.</u> Le module gradué $Gr_p(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (p^i.M/p^{i+1}.M)$ est de type fini sur $Gr_p(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (p^i/p^{i+1})$ et $Gr_p(A)$ est une algèbre de type fini sur A/p. D'après le lemme 3, il existe $f \in A-p$ tel que $[Gr_p(M)]_f = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (p^i.M_f/p^{i+1}.M_f)$

soit un module plat sur $A_f/p.A_f$. Cela entraîne évidemment que $\forall i \in \mathbb{N}$, $p^i.M_f/p^{i+1}.M_f$ soit un module plat sur $A_f/p.A_f$.

<u>Lemme 4.</u> Soit K un compact de Stein d'un espace analytique X. Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X, l'application canonique $j : \mathfrak{F}(K) \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathfrak{F}_x$ est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u>. Le faisceau $\mathcal{G}|K$ admet une présentation finie :

$$(\mathcal{O}_X|K)^m \xrightarrow{\varphi} (\mathcal{O}_X|K)^n \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}|K \longrightarrow 0$$

Puisque K est de Stein, on a une suite exacte :

$$(\mathcal{O}_X(K))^m \xrightarrow{\varphi(K)} (\mathcal{O}_X(K))^n \xrightarrow{\Psi(K)} \mathcal{G}(K) \longrightarrow 0$$

D'où un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}_X(K))^m \otimes \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "\varphi(K)\otimes 1"] \arrow[d, "s"'] & (\mathcal{O}_X(K))^n \otimes \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "\Psi(K)\otimes 1"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{G}(K) \otimes \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
(\mathcal{O}_{X,x})^m \arrow[r, "\varphi_x"] & (\mathcal{O}_{X,x})^n \arrow[r, "\Psi_x"] & \mathcal{G}_x \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, j est un isomorphisme.

Soit X un espace analytique et soit X' un sous-espace analytique fermé de X. <u>Supposons X' réduit</u> (i.e. sans nilpotents) <u>et irréductible en un point $x_0 \in X'$</u> (i.e. $\mathcal{O}_{X',x_0}$ est un anneau intègre). On sait qu'il existe un voisinage compact K de x_0 dans X et un système fondamental de voisinages ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ de K dans X tels que :

(1) Si X'_0 est l'ensemble des points réguliers de X' de dimension $p = \dim(X'_{x_0})$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $U_\alpha \cap X'_0$ est connexe et dense dans $U_\alpha \cap X'$.

(2) K est un compact de Stein semi-analytique.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et soit $\mathcal{I}$ le faisceau sur X des germes de fonctions analytiques nuls sur X'. Puisque X' est réduit, $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X|\mathcal{I}$. En outre $\mathcal{I}(K) = \{f \in \mathcal{O}_X(K) \ ; \ f_{x_0} \in \mathcal{I}_{x_0}\}$: en effet, si

$f_{x_o} \in \mathfrak{J}_{x_o}$, soit F un représentant de f sur un ouvert U_α ; F = 0 sur $U_\alpha \cap X'_o$ au voisinage de x_o, donc F = 0 sur la variété connexe $U_\alpha \cap X'_o$ et donc sur $U_\alpha \cap X'$: il en résulte que $f \in \mathfrak{J}(K)$. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{J}(K)$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_X(K)$. D'après (2), $\mathcal{O}_X(K)$ est un anneau noethérien (cf [3]). Enfin, puisque K est un compact de Stein, $\mathfrak{F}(K)$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_X(K)$.

Appliquons le corollaire du lemme 3 à l'anneau $A = \mathcal{O}_X(K)$; à l'idéal premier $p = \mathfrak{J}(K)$ et au module $M = \mathfrak{F}(K)$. Il existe $f \in \mathcal{O}_X(K)$, $f_{x_o} \notin \mathfrak{J}_{x_o}$ tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad (\mathfrak{J}(K)^i . \mathfrak{F}(K) \,/\, \mathfrak{J}(K)^{i+1} . \mathfrak{F}(K))_f \text{ soit un module plat}$$

sur $(\mathcal{O}_X(K) \,/\, \mathfrak{J}(K))_f$.

Si $x \in X' \cap K$ et si $f(x) \neq 0$, on a un diagramme commutatif de morphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(K) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_X(K)_f \arrow[dl] \\
& \mathcal{O}_{X,x} &
\end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement que

$[\mathfrak{J}(K)^i.\mathfrak{F}(K)/\mathfrak{J}(K)^{i+1}.\mathfrak{F}(K)] \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{F}^i_x$ est un module plat (donc libre) sur $[\mathcal{O}_X(K)/\mathfrak{J}(K)] \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} = [(\mathcal{O}_X/\mathfrak{J})(K)] \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X',x}$ (d'après le lemme 4). Puisque $\mathfrak{J}(K)^i.\mathfrak{F}(K)/\mathfrak{J}(K)^{i+1}.\mathfrak{F}(K) = (\mathfrak{J}^i.\mathfrak{F}/\mathfrak{J}^{i+1}.\mathfrak{F})(K)$, le lemme 4 entraîne aussi que : $\mathfrak{F}^i_x = \mathfrak{J}^i_x . \mathfrak{F}_x \,/\, \mathfrak{J}^{i+1}_x . \mathfrak{F}_x$. Nous avons démontré le :

<u>Lemme 5.</u> Avec les notations précédentes, il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans X et un sous-ensemble analytique fermé X'' de $X' \cap V$ tel que $X''_{x_0} \neq X'_{x_0}$ et $\forall x \in X' \cap V - X''$, $\forall i \in \mathbb{N}$, le module $\mathfrak{I}^i_x . \mathfrak{F}_x / \mathfrak{I}^{i+1}_x . \mathfrak{F}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_{X',x}$.

<u>Démonstration du théorème</u>. Le théorème étant de nature locale, on peut supposer que X est un sous-espace analytique fermé d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. On a : $f : \Pi \circ \varphi$, où φ est l'immersion fermée : $X \ni x \rightsquigarrow (x, f(x) \in \Omega \times Y$ et Π la projection : $\Omega \times Y \ni (\omega, y) \rightsquigarrow y \in Y$. Remplaçant le faisceau $\mathfrak{F}$ par $\varphi_*(\mathfrak{F})$, on peut donc supposer que $X = \Omega \times Y$ et que f est la projection de $\Omega \times Y$ sur Y.

Considérons le diagramme commutatif de morphismes d'espaces analytiques :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega \times Y & \xrightarrow{\phi} & \Omega \times Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ \Omega \times Y & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

où $\forall (\omega, \omega', y) \in \Omega \times \Omega \times Y$, $\phi(\omega, \omega', y) = (\omega, y)$ et $f'(\omega, \omega', y) = (\omega', y)$ et f, φ sont les projections évidentes sur Y. Ce diagramme est le produit fibré des morphismes f et φ ; en outre φ est un morphisme plat. Désignons par Z' l'ensemble des points de $\Omega \times \Omega \times Y$ en lesquels $\phi^*(\mathfrak{F})$ n'est pas f'-plat. D'après la proposition 2.4 et le corollaire 2.5 de l'exposé 13 de [4], $Z' = \phi^{-1}(Z)$.

Si Δ désigne la diagonale de $\Omega \times \Omega$, ϕ induit un isomorphisme de $\Delta \times Y$ sur $\Omega \times Y$. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que $(\Delta \times Y) \cap Z'$ est un sous-ensemble analytique fermé de $\Omega \times \Omega \times Y$. Puisque f' induit un isomorphisme de $\Delta \times Y$ sur $\Omega \times Y$, on est ramené à démontrer le théorème suivant :

Soit X' un sous-espace analytique fermé de $\Omega \times Y = X$ tel que f induise un isomorphisme de X' sur Y. Alors l'ensemble $Q(Y) \cap X'$ des points $x \in X'$ en lesquels $\mathfrak{F}$ n'est pas f-plat est un sous-ensemble analytique fermé de X'.

Soit $x_o \in X'$ et posons $y_o = f(x_o)$. Montrons, par récurrence sur $p = \dim(Y_{y_o})$, que $Q(Y) \cap X'$ est analytique au voisinage de x_o. Remplaçant si nécessaire Y par un voisinage ouvert de y_o, on peut supposer que $Y = \bigcup_{i=1}^{s} Y_i$, où les Y_i sont des sous-espaces analytiques fermés réduits de Y, irréductibles au point y_o. D'après le lemme 1 :

$$Q(Y) = \bigcup_{i=1}^{s} Q(Y_i) \quad \bigcup_{i=1}^{s} (\mathrm{Supp}\ [\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_{Y_i})])$$

Puisque le support d'un faisceau analytique cohérent est un sous-ensemble analytique fermé, tout revient à montrer que les $Q(Y_i) \cap X'$ sont analytiques au voisinage de x_o. On peut donc supposer Y réduit et irréductible au point y_o. Dans ce cas X' est réduit et irréductible au point x_o.

Soit $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux sur X tel que $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X | \mathfrak{I}$. D'après le lemme 5 (en remplaçant si nécessaire Y par un voisinage ouvert du point y_o), il existe un sous-espace analytique fermé Y'' de Y tel que $Y''_{y_o} \neq Y_{y_o}$ (donc $\dim(Y''_{y_o}) < \dim(Y_{y_o})$) et $\forall x \in X' - f^{-1}(Y'')$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, le module $\mathfrak{I}_x^i \cdot \mathfrak{F}_x / \mathfrak{I}_x^{i+1} \cdot \mathfrak{F}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_{X',x}$, donc sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)} = A_x$. Il en résulte que $\mathfrak{F}_{i,x} = \mathfrak{F}_x / \mathfrak{I}_x^{i+1} \cdot \mathfrak{F}_x$ est un module libre sur A_x. Pour tout module N de type fini sur A_x, le complété de $\mathrm{Tor}_1^{A_x}(\mathfrak{F}_x, N)$ pour la topologie $\mathfrak{I}_x$-adique est égal à $\varprojlim \mathrm{Tor}_1^{A_x}(\mathfrak{F}_{i,x}, N) = (0)$. Ainsi $\mathbf{Tor}_1^{A_x}(\mathfrak{F}_x, N) = (0)$

et $\mathcal{F}_x$ est un A-module plat. On en déduit l'inclusion :

$$Q(Y) \cap X' \subset f^{-1}(Y'') \cap X'.$$

D'après le lemme 1 :

$$Q(Y) \cap f^{-1}(Y'') = Q(Y'') \cup \operatorname{supp} \left[\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y''})\right]$$

Donc :

$$Q(Y) \cap X' = (Q(Y'') \cap X') \cup (\operatorname{supp} \left[\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y''})\right] \cap X').$$

Par hypothèse de récurrence, $Q(Y'') \cap X'$ est analytique au voisinage de x_0 ; il en sera de même de $Q(Y) \cap X'$, c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI — Algèbre commutative.

[2] A. GROTHENDIECK — "Eléments de géométrie algébrique", publ. Math. de l'I.H.E.S., Paris.

[3] J. FRISCH — "Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques", Inventiones Mathematicae, vol. 4, Fasc. 2, 1967.

[4] H. CARTAN — Séminaire, 13è année : 1960/1961.