MICHEL MÉTIVIER

Mesures vectorielles et intégrale stochastique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1972, fascicule 2
« Probabilités », , p. 52-82
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1972___2_52_0>

SEMINAIRE DE PROBABILITES

Année 1972

MESURES VECTORIELLES ET INTEGRALE STOCHASTIQUE

par Michel METIVIER

II - INTEGRALE STOCHASTIQUE - CAS REEL

CHAPITRE II

INTEGRALE STOCHASTIQUE

CAS REEL

La présentation qui suit de l'intégrale stochastique est un exposé qui reprend essentiellement la théorie développée par Monsieur J. Pellaumail dans sa thèse en cours d'achèvement. Cette théorie qui présente l'intégrale stochastique comme un cas particulier de l'intégration par rapport à une mesure vectorielle éclaire singulièrement la théorie générale classique. Nous ne présenterons ici que la théorie la plus simple : celle de l'intégrale L^2 . On trouvera dans [9] la théorie de l'intégrale L^p.

1 - <u>Notations - Cadre de l'étude</u> -

- On considère un espace probabilisé $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, fixé dans tout le chapitre

- $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une famille croissante de sous - tribus de $\mathfrak{F}$.

- $\mathfrak{R}$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la forme

$$F \times]s,t] \quad F \in \mathfrak{F}_s \quad s < t.$$

- $\mathfrak{R}$ est un semi anneau . On notera $\mathcal{A}$ l'anneau engendré par $\mathfrak{R}$, par $\mathfrak{A}$ le δ - anneau engendré par $\mathcal{A}$.

- On notera $\mathcal{C}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

- On rappelle que $\mathcal{C}$ est la tribu des ensembles dits " prévisibles ", et que cette tribu peut être considérée aussi bien comme engendrée par les parties de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la forme

$$]S,T] = \{(t,\omega) : S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$$

où $S < T$ sont deux temps d'arrêt relatifs à la famille $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de tribus, qu'engendrée par les fonctions aléatoires X , adaptées à $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et dont les trajectoires sont continues à gauche.

- Un processus dont les trajectoires sont continues à droite (resp. à variations bornées etc ...) sera dit en abrégé continu à droite (resp. à variation borné, etc ...)

2 - Mesures stochastiques.-

2-1 Définition 1

On appelle mesure stochastique sur $(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, adaptée aux $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, toute mesure m sur le δ - anneau $\mathcal{A}$, à valeurs dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, telle que

(S) $\forall\ (]s,t] \times F) \in \mathcal{R} \quad (]s,t] \times F) = 1_F . m\ (]s,t] \times \Omega)$

$$\in L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, P).$$

2-2 Exemples

1° - Mesure aléatoire adaptée sur $\mathbb{R}^+$ (ou processus croissant).

Supposons que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\ .\ , \omega\ )$ soit une mesure réelle sur $\mathbb{R}^+$, telle que $\forall\ s < t$ $Y(]s,t],\ .\ ) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Ceci est équivalent à se donner une fonction aléatoire A réelle, adaptée aux $\mathcal{F}_t$, à trajectoires croissantes continues à droite, nulles en 0, telle que

$$A_t - A_s = Y(]\,s,t\,],\ .)$$

Si on pose, pour un ensemble A de $\mathcal{A}$, inclus dans $[0, t] \times \Omega$

$$m\ (A)\ (\omega) = \int_0^t 1_A\ (s,w)\ Y\ (ds,\omega)$$

on vérifie immédiatement qu'on définit une mesure stochastique de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable.

2° - Cas particulier.-

Soit T un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ et Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable. On définit un processus adapté continu à droite et croissant en posant

$$X_t = Z\, 1_{[T \leq t]}$$

La mesure aléatoire associée à un tel processus s'exprime donc par :

$$\forall A \in \mathcal{C} \qquad A \subset]\, s,t\,] \times \Omega$$

$$m(A)(\omega) = 1_A\, (T(\omega),\omega)\, Z(\omega)$$

3° - Séries de mesures du type précédent.-

Soit (T_n) une suite de temps d'arrêts et (Z_n) des variables aléatoires respectivement $\mathcal{F}_{T_n}$ mesurables, et de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, telles que la série

$$\sum_n Z_n\, 1_{[T_n \leq t\,]}$$

converge dans $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},P)$

Montrons qu'il existe une mesure stochastique m telle que

$$\forall\ ]s,t] \times F \in \mathcal{R} \qquad m(]s,t] \times F) = 1_F \sum_n Z_n . 1_{]s < T_n \leq t]}$$

(convergence dans L^p)

Considérons en effet la mesure m_n associée à

$Z_n\, 1_{\{T_n \leq t\}}$

Pour tout n et tout A $\in \mathcal{C}$, $A \subset [0,t] \times \Omega$, on a , en reprenant les notations du chapitre I :

$$\|\, m_n \|\ (A) \leq 2 \sup_{B \subset A} \|\ m_n\ (B) \| = 2 \sup_{B \subset A} \sqrt[p]{\int \mid 1_B\ (T(\omega),\omega) Z_n(\ ) \mid^p dP}$$

$$\leq 2\ \ \| Z_n\ (\omega)\ 1_{[T_n \leq t]} \ \|_p$$

La série $\sum\limits_n m_n$ est donc normalement convergente pour les semi normes $m \rightsquigarrow \|\ m\ \|(A)$, et l'espace des mesures vectorielles sur $\mathcal{C}$ est complet pour ces semi - normes d'après le théorème 3 du chapitre 1. Pour tout A $\in \mathcal{C}$ on a alors :

$$m\ (A) = \sum_n\ m_n\ (A) \qquad \text{(convergence dans } L^p)$$

2.3 Mesures stochastiques à variation finie et processus croissant naturel associé.-

Théorème 1 (cf. [10]).

Soit α une mesure positive finie sur $\mathcal{A}$, telle que

$(A \in \mathcal{A}, \forall u \; 1_A(u,.) = 0 \text{ p.s.}) \Longrightarrow \alpha(A) = 0$

Alors, il existe un processus croissant, continu à droite, unique à l'indistingabilité près, tel que

$\forall s < t \quad \forall F \in \mathcal{F}_t$

(2.3.1)

$$E\left[1_F.(V_t-V_s)\right] = \int_{]s,t] \times \Omega} E(1_F \,|\mathcal{F}_{u^-})\, d\,\alpha$$

en notant $E(1_F \,|\mathcal{F}_{u^-})$ une version continue à gauche, (donc prévisible) de la martingale $(E(1_F \,|\mathcal{F}_u))_{u \leq t}$.

La mesure stochastique m dans L^1, définie par

$A \in \mathcal{A} \quad m(A) = \int 1_A(s,.)\, d\,V_s\,(.)$

(à variation bornée), admet α pour variation.

En outre, pour tout processus prévisible Y positif (resp. borné)

(2.3.2) $\quad E(\int Y\, d\, m) = \int Y\, d\,\alpha$.

Démonstration.-

L'unicité du processus V à l' indistingabilité près résulte de sa continuité à droite et de ce que V_t est défini presque sûrement pour tout t par

(2.3.3.) $\quad \forall F \in \mathcal{F}_t \quad E(1_F.V_t) = \int_{]0,t] \times \Omega} E(1_F \,|\mathcal{F}_{u^-})\, d\,\alpha$

Considérons la fonction sur $\mathcal{F}_t$:

$$a_t : F \rightsquigarrow \int_{]0,t] \times \Omega} E(1_F | \mathcal{F}_{u^-})\, d\,\alpha$$

C'est une fonction additive positive. Si (g_n) est une suite décroissante de fonctions $\mathcal{F}_t$-mesurables, bornée dans L^1, telle que

$$\lim_n \; g_n = 0 \quad \text{p.s.},$$

l'inégalité des martingales et le le lemme de Borel Cantelli montrent qu'on peut extraire une sous suite (g_{n_k}) telle que, si l'on considère le processus Y défini par

$$Y_k\,(u) = E\,(g_{n_k} | \mathcal{F}_{u^-}),$$

on ait

$$\text{presque sûrement} \;\; \lim_{k\to\infty} \;\; \sup_{0\leq u\leq s} |\; Y_k(u,w) \;| = 0$$

On en déduit immédiatement la σ - additivité de a_t, et comme a_t est évidemment absolument continue par rapport à la restriction de P à $\mathcal{F}_t$, on considère une expression $\tilde{A}_t$ de la densité $\frac{da_t}{dP}$ sur $\mathcal{F}_t$.

On déduit facilement de ce qui précède, en utilisant un lemme classique de prolongement par mesurabilité, que, pour toute $f \in \mathcal{L}^\infty\,(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ on a

$$E\,(f.\tilde{A}_t) = \int_{]0,t]\,\times\,\Omega} E(f \;|\, \mathcal{F}_{u^-}\,)\; d\,\alpha$$

D'où résulte pour tout $s < t$ et $f \in \mathcal{L}^\infty\,(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$:

$$E\,(f.(\tilde{A}_t-\tilde{A}_s)) = E\,(f.\tilde{A}_t) - E\,(E(f\;|\mathcal{F}_s).\tilde{A}_s)$$
$$= \int_{]s,t]\,\times\,\Omega} E(f\;|\,\mathcal{F}_{u^-})\; d\,\alpha$$

Ceci permet de conclure que

a) $\tilde{A}_t \geq \tilde{A}_s$ presque sûrement.

b) $\tilde{A}$ est continue à droite en moyenne.

c) L'égalité (2.3.1) est vraie si l'on remplace V_t par $\tilde{A}_t$.

D'après a) et b), on peut trouver une modification V du processus $\tilde{A}$ qui en fasse un processus croissant. Cette modification vérifie (2.3.1) d'après c).

Enfin, il est clair que si $A = \sum_k \left]s_k , u_k\right] \times F_k \in \mathcal{A}$,

on a

$$||m(A)||_1 = E|m(A)| = E\ m\ (A) = \sum_k \int_{]s_k,u_k]\times\Omega} 1_{F_k} d\alpha = \alpha\ (A).$$

d'où l'on voit que α est la variation de m.

Enfin, la relation (2.3.2) est vraie trivialement pour

$Y = 1_{]s,t[\ \times F}$, $F \in \mathcal{F}_s$. On passe aux processus prévisibles positifs (resp. bornés) par un principe de prolongement classique. ∎

Définition 2.-

Le processus croissant V associé à la mesure positive α , par le théorème 1, est appelé processus croissant naturel de la mesure α .

Si α est une mesure à variation bornée sur $\mathcal{C}$, α^+ sa partie positive, α^- sa partie négative, V^+ et V^- les processus croissants naturels associés à α^+ et α^- respectivement, on appellera $V = V^+ - V^-$ le processus à variation finie; naturel, de la mesure α .

Remarque 1.-

En utilisant la relation

$$E\ (Y_t\ .\ V_t) = E \int_0^t Y_s\ d\ V_s$$

pour une martingale positive Y_t et un processus croissant V_t , (Cf. [7] Chap. VII), on obtient immédiatement

$$E(\int_0^t Y_{s^-} dV_s) = \int_{]0,t]\ \times\ \Omega} Y_{s^-}\ d\alpha = \int_{]0,t]\ \times\ \Omega} E(Y_t\,|\,\mathcal{F}_{s^-})\ d\ \alpha$$

$$= E\ (Y_t . V_t) = E\int_0^t Y_s\ d\ V_s$$

ce qui prouve la " naturalité " du processus V ci dessus au sens de P.A. Meyer (cf. [7] Chap. VII - déf. 18)

3 - Processus associé à une mesure stochastique.-

3-1 Théorème 2.-

A toute mesure stochastique m sur $(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, adaptée aux $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, à valeurs dans $L^p(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ nul en 0 est associé un processus stochastique continu à droite, unique à l'indistinguabilité près X_m, tel que, pour tout $s < t$ et $F \in \mathcal{F}_s$, on ait :

(3-1-1) $\quad m(]s,t] \times F) = 1_F \cdot (X_m(t) - X_m(s)).\qquad$ p-s.

Le processus X_m a presque sûrement des limites à gauche.

Démonstration.-

L'unicité à l'indistingabilité près résulte de la continuité à droite, et de $X_m(t) = m(]0,t] \times \Omega)$ p.s.

Montrons l'existence.

On pose

$\tilde{X}_m(t) = m(]0,t] \times \Omega)$

D'après la condition (S) sur l'intégrale stochastique, on a

$\forall F \in \mathcal{F}_s$, $s < t$

$$m(]s,t] \times F) = 1_F\, (\tilde{X}_m(t) - \tilde{X}_n(s)) \quad \text{p.s.}$$

Montrons que p.s. les trajectoires de X_m ont la propriété suivante : $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $\lim\limits_{\substack{s \uparrow t \\ s \in Q}} X_m(s)$ et $\lim\limits_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} \tilde{X}_m(s)$ existent.

Soient a et b deux nombres réels, $a < b$. Considérons une suite finie croissante $S = \{t_1 < t_2 \ldots < t_{2n}\} \subset [0,\alpha]$ de nombres réels, et la famille de temps d'arrêt définie par récurrence

$$\sigma_1 = t_1 \qquad \sigma_{2k+1} = \inf\{t : t \in S,\ t > \sigma_{2k}\ \tilde{X}_m(t) \geq b\}$$

$$\sigma_{2k} = \inf\{t : t \in S \quad t > \sigma_{2k-1}\ \tilde{X}_m(t) \leq a\}$$

avec la convention $\inf\{t : t \in I \subset S\} = \infty$ si $I = \emptyset$

Soit $K = \sup\limits_{\substack{H \in \mathcal{B} \\ H \subset [0,\alpha] \times \Omega}} \| m(H) \|_p$

On considère les intervalles stochastiques $]\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.

Montrons alors le lemme.

Lemme 1.-

Soient σ et τ deux temps d'arrêts prenant leurs valeurs dans un ensemble fini $S = \{0 = t_o < t_1, \ldots < t_n\}$, $\sigma < \tau$, et X_m un processus tel que $\forall\ ]s,t] \times F \in \mathcal{R}$, avec $s,t \in S$ on ait

$$m\,(]s,t] \times F) = 1_F\,(X_m(t) - X_m(s)) ,$$

alors

$$m\,]\sigma, \tau] = X_m\,(\tau) - X_m\,(\sigma).$$

Démonstration.-

On peut écrire σ et τ simultanément sous la forme

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) 1_{A_j} \qquad A_j \in \mathcal{F}_{t_{j-1}} \qquad (A_i) \downarrow$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) 1_{B_j} \qquad B_j \in \mathcal{F}_{t_{j-1}} \qquad (B_j) \downarrow$$

la condition $\sigma \leq \tau$ se traduisant par

$$A_j \subset B_j \quad \text{pour tout } j$$

On a alors

$$]\sigma, \tau] = \bigcup_j\ ]t_{j-1}, t_j] \times (B_j - A_j)$$

et

$$\begin{aligned} m\,]\sigma, \tau] &= \sum m\,(]t_{j-1}, t_j] \times (B_j - A_j)) \\ &= \sum_j ((X_m(t_j) - X_n(t_{j-1})) 1_{B_j - A_j} \\ &= X_m(\tau) - X_m(\sigma) \end{aligned}$$

Fin de la preuve du théorème.-

On a donc, puisque

$$]0,\alpha] \times \Omega \supset \bigcup_{k=1}^{n-1}]\sigma_{2k+1} - \sigma_{2k}]$$

et en posant $X_\infty = a$

$$K^p \geq \int \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{X}_m(\sigma_{2k+1}) - \tilde{X}_m(\sigma_{2k})) \right|^p . dP \geq$$

$$\int \sum_{k=1}^{n-1} |\tilde{X}_m(\sigma_{2k+1}) - \tilde{X}_m(\sigma_{2k})|^p \, dP$$

(les termes $X_m(\sigma_{2k+1}) - X_m(\sigma_{2k})$ étant positifs par définition). Si $F^{(a,b)}_{(S,j)}$ désigne le sous ensemble de Ω, $\mathcal{F}_\alpha$ mesurable, où $\tilde{X}_m$ fait j passages montant sur $[a,b]$ dans S, (i.e. : $\omega \in F_{S,j}$ si j des $\tilde{X}_m(\sigma_{k+1},\omega) - \tilde{X}_m(\sigma_k,\omega)$ sont > 0), on a

$$K^p \geq \sum_{k=1}^{n-1} (b-a)^p \, j \, . \, P(F^{(a,b)}_{S,j}) .$$

Si S_n est alors une suite croissante de parties finies de $\mathbb{Q} \cap [0,\alpha]$, de réunion $\mathbb{Q} \cap [0,\alpha]$, on obtient que

$$P(F^{(a,b)}_{S_{n,j}}) \leq \frac{K^p}{(b-a)^p j} \qquad \text{pour tout } n.$$

On en déduit immédiatement que l'ensemble Ω^α_∞ des ω, tels que $t \leadsto \tilde{X}_m(t,\omega)$ ait une infinité de passages montants sur $[a,b]$ dans $\mathbb{Q} \cap [0,\alpha]$, pour un couple (a,b) de rationnels est de probabilité nulle. Soit $\Omega_\infty = \bigcup_\alpha \Omega^\alpha_\infty$. Pour tout $\omega \notin \Omega_\infty$ on a nécessairement

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+ \qquad \lim_{\substack{s\uparrow t \\ s\in\mathbb{Q}}} \tilde{X}_m(s) \text{ et } \lim_{\substack{s\downarrow t \\ s\in\mathbb{Q}}} \tilde{X}_m(s) \text{ existent.}$$

On peut alors poser :

$$\forall\ t \in \mathbb{R}^+ \qquad X_m(t) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} \tilde{X}_m(s)$$

La σ - additivité de m implique que, $\forall\ t \in \mathbb{R}^+$, $\forall\ F \in \mathcal{F}_s$, l'on peut extraire une suite décroissante (t_k) de rationnels convergeant vers t, telle que

$$\lim_k\ m\ (]s,t_k] \times F) = m\ (]s,t]) \times F \quad \text{p.s.}$$

d'où

$$m\ (]s,t] \times F) = 1_F\ (X_m\ (t) - X_m\ (s)) \quad \text{p.s.}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout s rationnel.

En considérant une suite décroissante (s_k) convergeant vers s, on montre de même que pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t > s$ (3.1.1) est encore vraie.∎

3.2 Théorème 3.-

Si m est une mesure stochastique, de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, avec $p \geq 1$, sur $\mathcal{A}$ et si X_m est le processus continu à droite associé, il existe une martingale (M_t) intégrable (adaptée aux $(\mathcal{F}_t)$) et un processus à variation bornée, continu à droite V, tel que

$$X_m = M + V$$

On peut prendre pour V le processus à variation finie naturel de la mesure

$$\nu : A \longrightarrow E\ (m(A))$$

Démonstration.-

La mesure $\nu\ : A \longrightarrow E\ (m(A))$ est σ - additive.

En effet, $|\ E\ (m(A))| \leq E\ (m(A)) \leq ||m\ (A)||_p$ et la σ - additivité de $A \longrightarrow m\ (A) \in L^p\ (\Omega,\mathcal{F},P)$ implique la σ - additivité de ν .

On applique le théorème 1 à ν^+ et ν^- successivement.

On obtient deux processus croissants V^+ et V^- tels que si on pose $V = V^+ - V^-$, on a

$$\forall\, H \in \mathcal{F}_t \qquad E(1_H.(V_t - V_s)) = \int_{]s,t] \times \Omega} E(1_H \mid u^-)\, d\nu$$

Considérons alors le processus $M = X - V$.

Pour tout $H \in \mathcal{F}_s$

$$E(1_H.(M_t - M_s)) = E(1_H.(X_t - X_s)) - \int_{]s,t]} 1_H\, d\nu$$

$$= \nu(H) - \nu(H) = 0$$

Ceci exprime pour M la propriété de martingale.∎

3.3 <u>Remarque 2 et Définition</u>.-

En raisonnant comme dans la remarque 1, on montrerait facilement que la décomposition $X_m = M + V$ est unique à l'indistingabilité près si l'on impose à V d'être " naturel " au sens de [7] .

Le processus V sera appelé processus à variation fini naturel de m.

3.4 <u>Proposition 1</u>.-

Si X est le processus continu à droite, associé à la mesure m, pour tout intervalle stochastique $]S,T]$, S et T borné, on a :

$$m(]S,T]) = X_T - X_S$$

Utilisons le lemme 1 . Celui ci exprime que la propriété est vraie pour S et T étagés.

On passe ensuite à un intervalle stochastique quelconque $]S,T]$ en approchant S et T par des suites décroissantes de temps d'arrêt étagés en utilisant la continuité à droite de X et la σ - additivité de m. ■

Théorème 3 bis.-

Si le processus X associé à la mesure stochastique m est continu, la mesure m se prolonge de façon unique en une mesure sur le δ - anneau $\mathcal{B}$ des ensembles bien mesurables, ne chargeant aucun graphe de temps d'arrêt.

Démonstration.-

La proposition 1 montre que, si X est continu, le graphe de tout temps d'arrêt prévisible est de mesure nulle. On prolonge donc m de façon σ - additive à l'anneau des intervalles stochastiques $[S,T[$, engendrant $\mathcal{B}$, en posant $m\,[S,T[\; = m\,]S,T]$. Si λ est une mesure positive associée à m sur $\mathcal{C}$, telle que $||m||$ est continu par rapport à λ (th. 4 du chapitre I), avec $\lambda \leq ||m||$, cette mesure admet un prolongement sur ne chargeant aucun graphe de temps d'arrêt. On applique alors le théorème 6 du chapitre I (équivalence a $\Longrightarrow$ c). ■

3-5 Théorème 4.-

Soit (m_n) une suite de mesures stochastiques, sur $\mathcal{C}$, convergeant vers m, pour les semi normes définies par la semi variation.

Alors m est une mesure stochastique et il existe une sous suite (m_{n_k}) telle que la sous suite correspondante $(X_{n_k})_k$ des processus associés possède la propriété suivante :

p.s. les trajectoires de (X_{n_k}) convergent uniformément sur tout intervalle compact vers les trajectoires de X_m.

Démonstration.-

Comme par hypothèse

$$m(]s,t] \times F) = \lim_n 1_F (X_n(t) - X_n(s)) \quad \text{dans } L^p$$

$$= 1_F \lim_n m_n (]s,t] \times \Omega) \quad \text{dans } L^p$$

$$= 1_F \; m(]s,t] \times \Omega) =$$

m est une mesure stochastique.

Soit n_k tel que

$$n \geq n_k \Longrightarrow \forall B \subset]0,t] \times \Omega \;, \quad B \in \mathcal{C},$$

$$||(m - m_{n_k})(B)||_p \leq \frac{1}{4^k p}$$

Soit Y le processus continu à droite associé à $m - m_n$.

Soit σ_k le temps de sortie du processus de $\left] \frac{-1}{k^2}, \frac{1}{k^2} \right[$, et

soit $\Omega_k = [\ \sigma \leq t] \supseteq [\sup\limits_{0 \leq s \leq t} |\ Y_s| > \frac{1}{k^2}]$

Pour $B =]\ 0, \sigma_k \wedge t\ ] \in \mathcal{C}$ on a, d'après la proposition 1,

$$(m - m_n)\ B = Y_{\sigma_k \wedge t}$$

d'où

$$\frac{1}{k^{4p}} \geq \int |Y_{\sigma_k \wedge t}|^p \quad d\,P \geq \frac{1}{k^{2p}}\ P\,(\Omega_k)$$

donc

$$P\,(\Omega_k) \leq \frac{1}{k^{2p}}$$

Finalement, $\forall$ k

$$P\,[\sup_{0 \leq s \leq t} |\ X_m(s) - X_{n_k}(s)| \geq \frac{1}{k^2}] \leq \frac{1}{k^{2p}}$$

On applique Borel Cantelli pour obtenir le théorème. ∎

4 - Construction d'une mesure stochastique.-

Les résultats suivants concernent l'étude de la réciproque du théorème 1-3.

4-1 Théorème 5.- (Théorème fondamental de Pellaumail)

Soit m une fonction additive sur $\mathcal{A}$ vérifiant la condition (S) , de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable ($p \geq 1$).

On suppose qu'existe une fonction positive finie α sur $\mathcal{A}$, simplement additive possédant les propriétés suivantes

(j) $\forall F \in \mathcal{F}_s \quad , s < t$

$$\lim_{t \downarrow t} \alpha (]s,t] \times F) = \alpha(]s,t] \times F)$$

(jj) $\forall F_n \in \mathcal{F}_\infty \qquad$ si $F_n \downarrow \emptyset \quad$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \sup \{\alpha (A) : A \in \mathcal{A}$$

$$A \subset (]0,t] \times F_n) \} = 0$$

(jjj) $\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists \eta > 0 \quad$ tel que

$$\forall H \in \mathcal{A} \quad H \subset A \qquad \alpha (H) \leq \eta \Longrightarrow ||m (H)||_p \leq \varepsilon \ .$$

Alors m se prolonge en une mesure σ - additive sur $\mathcal{C}$.

Démonstration.-

Elle repose d'abord sur le lemme

Lemme 2.-

Toute fonction **positive** sur $\mathcal{A}$ simplement additive, vérifiant (j) et (jj) se prolonge en une mesure σ - additive sur $\mathcal{C}$.

Preuve du lemme.-

$\mathcal{R}$ est un semi anneau engendrant $\mathcal{A}$, il suffit de vérifier la σ - additivité sur $\mathcal{R}$. Pour utiliser le théorème de prolongement classique, il suffit de montrer que α est σ-additive sur $\mathcal{R}$. Soit alors (H_n) une famille d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{R}$, telle que

$$\bigcup_n H_n = H \in \mathcal{R}.$$

L'additivité et la positivité de α impliquent que

$$\sum \alpha(H_n) \leq \alpha(H).$$

Posons :

$$H_n =]s_n,t_n] \times F_n \qquad F_n \in \mathcal{F}_{s_n}$$

$$H =]s,t] \times F \qquad F \in \mathcal{F}_s$$

D'après (j), on peut trouver $s' > s$ tel que

$$\alpha(]s,s'] \times F) \leq \varepsilon$$

et $\forall n$ t'_n tel que

$$\alpha(]t_n,t'_n] \times F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$$

On a alors :

(4-1-1) $\alpha(H_n) \leq \alpha(]s_n,t'_n] \times F_n) \leq \alpha(H_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

et

(4-1-2)

$$\alpha(H) - \varepsilon \leq \alpha(]s',t] \times F) \leq \alpha(H)$$

Comme l'hypothèse $H = \bigcup_n H_n$ implique

$$[\, s',t\,] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \,]\, s_n, t'_n \,[$$

on a, d'après la compacité de $[s',t]$ et en posant

$$\Omega_k = \{\omega : \sum_{0 \leq n \leq k} 1_{F_n}(\omega) . 1_{]s_n t'_n[} \geq 1_{[s't]} \} \in \mathcal{F}_\infty$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = F.$$

Notant :

$$H'_n =]s_n, t'_n] \times F$$

$$H' =]s',t] \times F$$

on a

$$H' - \bigcup_{n=1}^{k} H'_n \subset]s' \; t] \times (\complement \Omega_k \cap F)$$

Comme

$$\bigcap_k \complement \Omega_k \cap F = \emptyset$$

l'hypothèse (jj) implique

$\exists\, k$ tel que

$$(4\text{-}1\text{-}3) \qquad \alpha\,(H' - \bigcup_{n-1}^{k} H'_n) \leq \varepsilon$$

Les relations (4-1-1), (4-1-2) et (4-1-3) donnent alors

$$\sum_{n=1}^{k} \alpha\,(H_n) \geq \sum_{n=1}^{k} \alpha\,(H'_n) - \varepsilon \geq \alpha(H') - 2\,\varepsilon \geq \alpha(H) - 3\,\varepsilon$$

ce que nous voulions prouver.

Fin de la démonstration du théorème.-

On considère alors le prolongement de α à $\mathfrak{C}$.
L'hypothèse (jjj) permet d'appliquer le théorème de prolongement du chapitre I. ■

Pour nos besoins ultérieurs, nous utiliserons le

Lemme 2 bis.-

Toute fonction réelle α sur $\mathcal{A}$ simplement additive, à variation bornée sur tout ensemble $]0,t] \times \Omega$, vérifiant (j) et (jj), se prolonge en une mesure σ - additive sur $\mathfrak{C}$.

Démonstration.-

On vérifie facilement que la variation de $|\alpha|$, vérifie (j) et (jj).Cette variation est donc σ - additive.
Il en est de même de α^+ et α^-. ■

4-2 Théorème 6.-

Soit M une martingale de Carré intégrable continue à droite. Posons

$$\forall F \in \mathfrak{F}_s , s < t \qquad m(]s,t] \times F) = 1_F.(M(t) - M(s))$$

$$\alpha(]s,t] \times F) = \int_F (M(t) - M(s))^2 \, dP$$

Alors m se prolonge en une mesure stochastique de carré intégrable; et α en une mesure positive sur $\mathfrak{C}$.
Tout processus de $L^2(\Omega,\mathfrak{T}(\mathfrak{C}),\alpha)$ est intégrable par rapport à m et l'application $X \rightsquigarrow \int X \, dm$ est une isométrie de $L^2(\Omega,\mathfrak{T}(\mathfrak{C}),\alpha)$ dans $L^2(\Omega,\mathfrak{F},P)$.
Le processus croissant naturel V de α possède la propriété :

$(M_t^2 - V_t)$ est une martingale.

<u>Démonstration.-</u>

On obtient facilement l'additivité de α sur le semi-anneau des rectangles en remarquant que la propriété de martingale de M implique, pour $A =]s,t] \times F \in \mathcal{R}$:

(4.2.1) $\alpha\,(]s,t] \times F) = E\,[1_F . (M_t^2 - M_s^2)]$.

La propriété de continuité à droite de la martingale M implique immédiatement la propriété (j).

Montrons que α vérifie la propriété (jj). Soit

(4.2.2) $A_n = \sum_{k \leq p}]s_k^n , u_k^n] \times F'_{n,k} \subset]0,t] \times F_n$

avec

$F'_{n,k} \in \mathcal{F}_{s_k^n}$

On peut dans l'expression de A_n, comme réunion finie de rectangles de $\mathcal{R}$, supposer que les intervalles $]s_k^n , u_k^n]$ sont disjoints avec $u_k^n \leq s_{k+1}^n$, pour tout $k \leq p$. Comme α est positive, par définition, si on pose

$$F_{n,k} = \bigcup_{r \leq k} F'_{n,r}$$

on a

$$\alpha\,(A_n) \leq \sum_{k \leq p} \alpha\,(]s_k^n , u_k^n] \times F_{n,k})$$

$$\leq E\,(\sum_{1 \leq k \leq p} 1_{F_{n,k}} . (M^2_{u_k^n} - M^2_{s_k^n}))$$

Si on pose $G_{n,k} = F_{n,k} - F_{n,k-1}$ $(F_{n,0} = \emptyset)$

on a

$$\alpha\,(A_n) \leq E\,(\sum_{1 \leq k \leq p} 1_{G_{n.k}} (M^2_{u_p^n} - M^2_{s_k^n}))$$

D'où

$$\alpha\,(A_n) \leq E\,(\sum_{1 \leq k \leq p} 1_{G_{n,k}} . M_t^2)$$

Enfin, comme les $G_{n,k}$ sont disjoints et

$$\bigcup_k G_{n,k} \subset F_n$$

on a

$$\alpha\ (A_n) \leq \int_{F_n} M_t^2\ d\ P$$

D'où la propriété (jj).

Pour $A \in \mathcal{A}$ avec

$$A = \sum_{k \leq p} \left]s_k, u_k\right] \times F_k$$

(on peut supposer comme précédemment les $]s_k, u_k]$ disjoints et $u_k \leq s_{k+1}$), on a

$$\|\ m(A)\|_2^2 = E \left| \sum_{k \leq p} 1_{F_k} \cdot (M_{u_k} - M_{s_k})\right|^2$$

Comme la propriété de martingale donne pour $r > 0$

$$E\ (1_{F_k} \cdot 1_{F_{k+r}} (M_{u_{k+r}} - M_{s_{k+r}})\ (M_{u_k} - M_{s_k})) = 0$$

on obtient

$$\|\ m(A)\|_2^2 = \sum_{k \leq p} \alpha\ (]s_k, u_k] \times F_k) = \alpha\ (A).$$

Cette égalité montre que m possède la propriété (jjj). Elle exprime en outre la propriété d'isométrie de l'application $A \rightsquigarrow m(A)$. Cette isométrie se prolonge en une isométrie de $L^2(\Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \alpha)$ dans $L^2\ (\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui donne l'intégrale en moyenne d'ordre 2 (cf. chapitre I - 4 - 3).

Enfin, pour tout $]s,t] \times F \in \mathcal{C}$ on a par définition de V

$$0 = \alpha\ (]s,t] \times F) - E\ [1_F \cdot (V_t - V_s)] = E\ [1_F \cdot\ [(M_t^2 - V_t) - (M_s^2 - V_s)]]$$

ce qui exprime la propriété de martingale pour $(M_t^2 - V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

4.3 Remarque et Notations.-

La démonstration précédente montre que le processus $Y_t = M_t^2$ définit également une mesure stochastique ℓ à valeurs dans L^2 , de mesure associée positive :

$$A \rightsquigarrow E\,(\ell(A)) = \alpha\,(A).$$

Le processus croissant " naturel " V est noté d'ordinaire $< M;M >$ ou simplement $<M>$.

Si M et N sont deux martingales de carré intégrable, l'identité $(M_t + N_t)^2 - (M_t - N_t)^2 = 4\,M_t\,N_t$ montre que le processus $(M_t \cdot N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est également associé à une mesure stochastique.

Si on considère les processus croissants $<M + N>$ et $<M - N>$, le processus à variation borné naturel de la mesure stochastique associé à $M \cdot N$ est donc $\frac{1}{4}(< M + N > - < M - N >)$ On le note $< M\, ,\, N >$.■

4.4 Définition.-

Dans la suite, nous appellerons variation quadratique de la mesure m, associé à la martingale M, la mesure positive α qui est la variation de la mesure stochastique associée au processus croissant $< M\, ,\, M >$.

5 - Définition de l'intégrale stochastique.-

5.1 Définition 3 (Pellaumail)

Soit m une mesure stochastique de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable. Soit X un processus prévisible. On dit que X est intégrable par rapport à m si l'application $(t,\omega) \rightsquigarrow X(t,\omega)$ est fortement intégrable au sens de Bartle (cf. chapitre I § 3).

On appelle processus intégral de X (noté $\int X\, d\, m$), le processus à trajectoires continues à droite, unique à l'indistinguabilité près, associé à la mesure stochastique

$$\mathcal{A} \ni A \longrightarrow \int_A X\, d\, m$$

(cf. th. 1 du chapitre I)

5.2 Proposition 2.-

Si le processus associé à m est à trajectoires continues, le processus $\int X\, d\, m$ est également à trajectoires continues.

Démonstration.-

La proposition est immédiate dans le cas d'un processus $X = 1_A$ $A \in \mathcal{R}$. On pense à un processus borné quelconque en appliquant le théorème 7 du chapitre I , le théorème 4 ci dessus et un principe classique de prolongement par mesurabilité. En appliquant à nouveau le théorème 3, on passe au cas d'un X intégrable quelconque. ∎

5.3 Proposition 3.-

Soit X intégrable par rapport à m.

Si Z est $\mathcal{F}_s$ mesurable et borné, on a, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A \subset \left]s,t\right] \times \Omega$

$$\int_A Z \,.\, X\, d\, m = Z \int_A X\, d\, m$$

Démonstration.-

La propriété est vraie, d'après la propriété (5) de l'intégrale stochastique (définition 1), pour tout $X = 1_A$, $A \in \mathcal{R}$ et $Z = 1_F$, $F \in \mathcal{F}_s$. On passe d'abord au cas d'un Z $\mathcal{F}_s$-mesurable borné quelconque en utilisant le corollaire 2 du théorème 7 du chapitre I, le théorème 4 ci dessus et un principe classique de prolongement par mesurabilité. La même méthode permet de passer immédiatement à un processus X intégrable.

5. 3 Proposition 4.-

Soit Y le processus intégral de X par rapport à la mesure stochastique m. Pour tout temps d'arrêt borné σ, on a

$$Y_\sigma = \int_{]0,\, \sigma]} X \, d\, m$$

Démonstration.-

Considérons d'abord un temps d'arrêt étagé σ, prenant les valeurs $0 = t_o < t_1 < \dots < t_n$. En posant $u_i = t_i - t_{i-1}$, on a

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} u_i \, 1_{F_i} \qquad F_i = [\sigma > t_{i-1}] \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$$

On a

$$Y_\sigma = \sum_{i=1}^{n} 1_{F_i} \, (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) \tag{5.4.1}$$

et d'après la proposition précédente

$$1_{F_i} \, (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}) = \int_{]t_{i-1}, t_i] \times F_i} X \, d\, m \tag{5.4.2}$$

Comme

$$\bigcup_{i=1}^{n} \;]t_{i-1},\, t_i] \times F_i = \;]0,\, \sigma]$$

on a immédiatement de (5.4.1) et (5.4.2) l'égalité souhaitée.

On passe aux temps d'arrêts bornés quelconques, en approchant un tel temps d'arrêt σ par une suite décroissante de temps d'arrêts étagés (σ_n). La continuité à droite de Y implique

$$Y_\sigma = \lim_n Y_{\sigma_n} \quad \text{p.s.}$$

La σ - additivité de la mesure $A \rightsquigarrow \int_A X\, d\, m$ implique

$$\int_{]0,\, \sigma]} X\, d\, m = \lim_{n\to\infty} (L^p) \int_{]0,\sigma_n]} X\, d\, m$$

d'où

$$Y_\sigma = \int_{]0,\, \sigma]} X\, d\, m \qquad \text{p.s.} \ \blacksquare$$

Dans toute la suite, nous considérerons des mesures stochastiques associées à des processus $X = V + M$ où V est un processus à variation bornée dans L^1 et M une martingale dans L^2. Nous allons détailler cette intégrale en considérant successivement les mesures associées à un processus croissant et à une martingale de carré intégrable.

5.5 <u>Proposition 4</u>.-

Soit V un processus croissant dans L^1 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. La mesure stochastique dans L^1 associée m est à variation bornée. Un processus X est intégrable en moyenne d'ordre 1 (cf. définition - chap. I-4-3) si et seulement si

$$\forall\, t \qquad E\left(\int_0^t |X_s|\, d\, V s\right) < \infty$$

$\int_A X\, d\, m$ est alors égal p.s. à la v.a

$$\omega \qquad \int 1_A (s,\omega)\, X(s,\omega)\, d\, V_s(\omega).$$

Le processus Y associé à la mesure $A \rightsquigarrow \int_A X\, d\, m$ est un processus à variation finie intégrable.

Démonstration.-

Pour tout $]s,t] \times F \in \mathcal{R}$, on a

$$m(]s,t] \times F) = 1_F . (V_t - V_s) = \int_{]s,t]} 1_F(\omega)\, d\, V_u(\omega)$$

Comme l'application

(5.5.1) $A \rightsquigarrow \int 1_A (u,\omega)\, d\, V_u\, (\omega)$

est, en restriction à $\mathcal{C} \cap (]0,t] \times \Omega)$, une mesure σ - additive à valeurs dans L^1, c'est le prolongement de m.

De même

$$|| m(]s,t] \times F) ||_1 = E \int_{]s,t]} 1_F\, (\omega)\, d\, V_u\, (\omega)$$

D'où l'on déduit que la mesure positive

$$A \rightsquigarrow E\left(\int 1_A\, (u,.)\, d\, V_u\, (.)\right)$$

est la variation de m, avec

$$\int |f|\, d\, |m| = E\left(\int |f\, (u,.)|\, d\, V_u\, (.)\right).$$

D'où la condition d'intégrabilité en moyenne d'ordre 1.

On passe immédiatement de la formule (5.5.1) à la formule

$$\int_A X\, d\, m = \int 1_A\, (s,.)\ X\, (s,.)\, d\, V_s\, (.)$$

pour les variables étagées, de là, aux variables positives en considérant une suite (X_n) qui croît vers X presque partout pour $|m|$, donc aussi dans $L_1(|m|)$, de là, enfin, aux variables m - intégrables quelconques.

Le processus associé Y à $\int X\, d\, m$ est par définition tel que

$$Y_t = \int_{]0,t] \times \Omega} X\, d\, m = \int_{]0,t]} X_s\, d\, V_s$$

D'où la proposition. ∎

5.6 Proposition 5.-

Soit m la mesure stochastique à valeurs dans L^2 (P), associée à une martingale de carré intégrable M. Soit α la variation quadratique de m.

Pour tout processus X intégrable en moyenne quadratique par rapport à m, le processus Y associé à $A \rightsquigarrow \int_A X\,d\,m$ est une martingale de carré intégrable.

La variation quadratique α_Y de la mesure stochastique associée à Y est donnée par

(5.6.1) $\quad \alpha_Y(A) = \int_A |X|^2\,d\,\alpha$

et

(5.6.2) $\quad \langle Y \rangle_t = \int_0^t |X_s|^2\,d\,\langle M\rangle_s$

Démonstration.-

D'après la proposition 4, pour tout $F \in \mathcal{F}_s$ et $s < t$ on a

$$E\,(1_F \cdot Y_t - Y_s) = E\,\left(\int_{]s,t] \times F} X\,d\,m\right).$$

On passe de là aux fonctions étagées sur $\mathcal{A}$, et par continuité dans $L^2(\alpha)$ à tous les processus intégrables en moyenne quadratique.

Pour $A =]s,t] \times F \in \mathcal{R}$, on a, par définition

$$\alpha_Y(A) = E\,(1_F \cdot (Y_t - Y_s)^2) = (\|m_Y(A)\|_2)^2$$

D'où, puisque $X \rightsquigarrow \int X\,d\,m$ est ici une isométrie de $L^2(\alpha)$ dans $L^2(P)$

$$\alpha_Y(A) = \int_A |X|^2\,d\,\alpha$$

L'unicité du prolongement de α_Y ainsi définie sur $\mathcal{R}$ en une mesure sur $\mathcal{G}$, implique la validité de (5.6.1) pour tout $A \in \mathcal{G}$

Pour montrer (5.6.2), nous avons à montrer que pour tout $F \in \mathcal{F}_t$

$$E\,\left(1_F \cdot \int_0^t |X_u|^2\,d\,\langle M\rangle_u\right) = \int_{]0,t] \times \Omega} |X|^2\,E\,(1_F \mid \mathcal{F}_{u^-})\,d\,\alpha$$

On démontre cette relation en la vérifiant d'abord pour un $X = 1_{]s,s'] \times G}$, $s < s'$, $G \in \mathcal{F}_s$.

On a en effet alors

$$E\left(1_t \cdot \int_0^t X_u^2 \, d\langle M\rangle_u\right) = E\left(1_{F\cap G}\left(\langle M\rangle_{s'\wedge t} - \langle M\rangle_{s\wedge t}\right)\right)$$

$$= \int_{]s\wedge t,\, s'\wedge t] \times \Omega} 1_G \, E(1_F | \mathcal{F}_{u-}) \, d\alpha$$

$$= \int_0^t |X|^2 \, E(1_F | \mathcal{F}_{u-}) \, d\alpha \, .$$

On applique un principe de prolongement par mesurabilité pour passer à un $X \in L^2(\Omega, \mathcal{T}(\mathcal{C}), \alpha)$ quelconque. ∎

REFERENCES

[1] DELLACHERIE C.
" La théorie générale des processus "
Séminaire de Strasbourg - Probabilités - 1969

[2] DOLEANS C. - DADE
" Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales "
Séminaire de ProbabilitésIV - Lecture Notes in Math. Vol. 24
Springer Verlag 1970

[3] ITO K.
" Lecture Notes on stochastic processes "
Tata Institute for fundamental research . Bombay 1961

[4] ITO K.
" Stochastic integral "
Proc. Imperial Acad., Tokyo, 20, P. 519-524 (1944)

[5] Mc KEAN P.
" Stochastic integral "
Academic Press. 1968

[6] MEYER P.A.
" Intégrales stochastiques I et II "
Séminaire de Probabilités I. Lecture Notes in Math. Vol. 39
Springer Verlag. 1967.

[7] MEYER P.A.
" Probabilités et Potentiel "
Hermann. 1966

[8] PELLAUMAIL J.
" Thèse " A paraître . Rennes

[9] PELLAUMAIL J.
" Sur la décomposition de Doob-Meyer d'une quasi-martingale "
C.R.A.S.

[10] PELLAUMAIL J.
" Décomposition de Doob-Meyer pour une quasi martingale "
C.R.A.S. Paris. 1972