P. BOLLEY
J. CAMUS

Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1973, fascicule 2
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 6, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1973___2_A6_0>

REGULARITE POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES DEGENERES VARIATIONNELS

par

P. BOLLEY - J. CAMUS

Introduction

On étudie la régularité de certains problèmes aux limites varitionnels (Problème de Neumann et Problème de Dirichlet) associés aux formes intégro-différentielles

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega \varphi(x)^k \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u . \overline{D^\beta v}\, dx$$

où k et m sont deux entiers $\geqslant 0$ et φ une fonction régulière équivalente à la distance au bord Γ de l'ouvert Ω.

Lorsque m = k = 1, on retrouve en particulier que l'opérateur

$$A \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1 \\ |\beta|\leqslant 1}} D^\beta \left(a_{\alpha\beta}(x)\ \varphi(x)\ D^\alpha\right)$$

correspondant est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (cf. [2]), et on montre que, plus généralement ce résultat est encore valable lorsque $m = k \geqslant 1$.

D'une manière générale, on montre que pour $k \geqslant m$ le Problème de Neumann est régulier (i.e. : possède la régularité attendue sur la solution en fonction de la régularité du second membre), et que le Problème de Dirichlet n'est pas régulier (*).

La méthode utilisée consiste à interpréter le Problème de Neumann comme un problème aux limites en "sortant" de l'ouvert Ω. On peut alors utiliser la méthode des quotients différentiels pour atteindre la régularité tangentielle, ce qui permet de ramener la régularité normale à celle d'une équation différentielle scalaire.

(*) Ce phénomène avait déjà été observé par M.M. Baouendi-Goulaouic pour l'opérateur AA^*.

TABLE DES MATIERES

I - LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS $W^m_{k/2}(\Omega)$

Dans ce chapitre, on rappelle quelques propriétés élémentaires des espaces de Sobolev avec poids $W^m_{k/2}(\Omega)$ afin de préciser la nature des problèmes aux limites variationnels envisagés au chapitre II.

Pour k et m entier $\geqslant 0$, on désigne par $W^m_{k/2}(\Omega)$ l'espace de Sobolev avec poids :

$$W^m_{k/2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega)^{(*)} \;;\; \varphi^{k/2} \; D^\alpha u \in L^2(\Omega), \;\; |\alpha| \leqslant m\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et où φ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \;;\; \varphi(x) = 0\}, \\ \text{Grad } \varphi(x) \neq 0, \text{ pour tout } x \in \Gamma. \end{cases}$$

On munit l'espace $W^m_{k/2}(\Omega)$ de la norme canonique : c'est un espace de Hilbert.

On désignera par $\overset{\circ}{W}{}^m_{k/2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)^{(*)}$ dans $W^m_{k/2}(\Omega)$. On a alors les résultats suivants :

Proposition 1.1.

(i) $W^m_{k/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ si et seulement si $k \leqslant 2m$

(ii) L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^m_{k/2}(\Omega)$ si et seulement si $k \geqslant 2m-1$

(iii) L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^{(*)}$ est dense dans $W^m_{k/2}(\Omega)$

(iv) Pour $k < 2m-1$, on désigne par J le plus grand entier strictement inférieur à $m - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$. Alors, l'application "trace"

$$u \longmapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_J u),$$

où $\gamma_j u$ désigne la trace sur Γ au sens usuel de la dérivée normale d'ordre j,

---

(*) On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ de Ω dans $\mathbb{C}$ à support compact dans Ω, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $C^\infty(\Gamma)^{J+1}$ se prolonge en une application linéaire continue surjective encore notée $u \longmapsto \gamma u$ de $W^m_{k/2}(\Omega)$ sur $\prod_{j=o}^{J} H^{m-j-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Démonstration : Les démonstrations sont classiques et peuvent être trouvées par exemple dans [4].

On va maintenant identifier l'espace dual $[W^m_{k/2}(\Omega)]'$ à un sous-espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on introduit l'espace suivant :

$$W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n) = \text{complété de } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ pour la norme}$$

$$u \longmapsto \|u\|_{W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \| \, |\varphi|^{k/2} \, D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2},$$

φ étant supposée égale à -1 pour x assez grand (ce que l'on peut toujours supposer). Grâce aux inégalités de Hardy, on déduit facilement que, pour $k \leq 2m$, on a : $W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Il en résulte que l'espace dual $[W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'$ est un espace de distributions sur $\mathbb{R}^n$. On a alors :

Proposition 1.2. : Pour $k \leq 2m$, l'espace dual $[W^m_{k/2}(\Omega)]'$ s'identifie algébriquement et topologiquement au sous-espace $[W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'_{\bar{\Omega}}$ des distributions de $[W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'$ à support dans $\bar{\Omega}$.

Démonstration : Soit j l'application de $[W^m_{k/2}(\Omega)]'$ dans $[W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'_{\bar{\Omega}}$ définie par $T \longrightarrow j(T)$ où :

$$j(T) : \phi \longrightarrow \langle T \;\; \phi|_\Omega \rangle_{[W^m_{k/2}(\Omega)]' \times W^m_{k/2}(\Omega)}.$$

Cette application est linéaire continue. D'autre part, j est injective car $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^m_{k/2}(\Omega)$. Enfin, j est surjective car le lemme suivant montre qu'il existe un opérateur de prolongement P linéaire continu de $W^m_{k/2}(\Omega)$ dans $W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Soit alors $U \in [W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'_{\bar{\Omega}}$, on définit

$$T \in [W^m_{k/2}(\Omega)]' \quad \text{par :} \quad \phi \longmapsto \langle U, P\phi \rangle.$$

Montrons que $j(T) = U$ dans $[W^m_{k/2,\varphi}(R^n)]'$: pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$< j(T),\phi > = < T,\phi|_\Omega > = < U,P\,\phi|_\Omega > .$$

Or $< U,P\,\phi|_\Omega - \phi > = 0$ puisque $P\,\phi|_\Omega - \phi \in W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{Supp}\,P\,\phi|_\Omega - \phi \subset \mathbb{R}^n - \Omega$ et, par suite, $j(T) = U$. Il reste donc à établir le

Lemme 1.1. : Il existe un opérateur de prolongement P linéaire continu de $W^m_{k/2}(\Omega)$ dans $W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : Soit P un prolongement de Babitch d'ordre m+1 ; on a donc : $P\,\mathscr{D}(\overline{\Omega}) \subset C^m_o(\mathbb{R}^n)$ (on peut toujours se ramener au cas où $P\,\phi$ est à support dans un voisinage compact de $\overline{\Omega}$). Ensuite, il suffit de vérifier que

$$C^m_o(\mathbb{R}^n) \subset W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

En effet, si $U \in C^m_o(\mathbb{R}^n)$ et si $(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille régularisante, on a évidemment : $U_\varepsilon = j_\varepsilon * U \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ et U_ε converge vers U dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ et donc aussi dans $W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

II - LES FORMES INTEGRO-DIFFERENTIELLES $a(u,v)$

Pour k et m entiers ≥ 0, on pose

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega \varphi(x)^k \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x) \; D^\alpha u \,.\, \overline{D^\beta v}\, dx \,,$$

où $a_{\alpha\beta}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. On s'intéresse à celles de ces formes $a(u,v)$ qui sont coercives sur l'espace $W^m_{k/2}(\Omega)$, i.e. : à celles pour lesquelles il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que : pour tout $u \in W^m_{k/2}(\Omega)$, on ait :

$$\operatorname{Re} a(u,u) \geq C.\, \|u\|^2_{W^m_{k/2}(\Omega)} - \lambda\, \|u\|^2_{W^0_{k/2}(\Omega)} \,.$$

Une telle forme $a(u,v)$ sera dite fortement coercive si on peut prendre $\lambda = 0$ dans cette inégalité. Avant d'expliciter les types de problèmes aux limites attachées à de telles formes $a(u,v)$, on énoncera des conditions nécessaires et suffisantes de coercivité.

II.1. Coercivité des formes intégro-différentielles $a(u,v)$

Le théorème suivant est dû à Pavec (résultat non publié) et à Boéro-Pavec [3] dans un cas particulier (cf. aussi [6]).

Théorème 2.1. : Pour que la forme $a(u,v)$ soit coercive sur l'espace $W^m_{k/2}(\Omega)$, il faut et il suffit que :

(A) $\forall\, x \in \Omega\,,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\},\quad \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\ \ \xi^{\alpha+\beta} > 0$

(B) $\forall\, x \in \Gamma\,,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, cotangent en x à Γ, la forme $a_x(u,v)$ définie par :

$$a_x(u,v) \equiv \int_0^{+\infty} t^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\ (\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)D_t)^\alpha u.\overline{(\xi+\operatorname{grad}\varphi(x)D_t)^\beta v}\ dt$$

soit fortement coercive sur l'espace $W^m_{k/2}(\mathbb{R}_+)$.

Démonstration : La démonstration est calquée sur celle de [1] dans le cas où $k=o$.

Cependant, la condition (B) n'est pas très facile à expliciter dans le cas général. Toutefois, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1. : Pour que la forme $a_x(u,v)$ soit fortement coercive sur l'espace $W^m_{k/2}(\mathbb{R}_+)$ il suffit que la forme

$$a'_x(u,v) \equiv \int_0^{+\infty} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\ (\xi+\mathrm{grad}\ \varphi(x)D_t)^\alpha u.\overline{(\xi+\mathrm{grad}\ \varphi(x)D_t)^\beta v}\ dt$$

soit fortement coercive sur l'espace $H^m(\mathbb{R}_+)$.

Et cette condition suffisante est aussi nécessaire pour m=k=1 (cf. [3]).

Enfin, rappelons que dans [1], on donne des conditions nécessaires et suffisantes de coercivité pour de telles formes $a'_x(u,v)$ sur l'espace $H^m(\mathbb{R}_+)$.

Remarque 2.1. : Il est facile de voir que les conditions (A) et (B) impliquent la condition (A') suivante :

$$(A')\quad \forall\, x \in \bar{\Omega}\ ,\quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\},\qquad \mathrm{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\ \ \xi^{\alpha+\beta} > 0.$$

II.2. Les problèmes aux limites associés aux formes intégro-différentielles a(u,v)

Soit $a(u,v) \equiv \int_\Omega \varphi(x)^k \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x)\ D^\alpha u.\overline{D^\beta v}\ dx$

une forme intégro-différentielle fortement coercive sur l'espace $W^m_{k/2}(\Omega)$. Une telle forme est alors coercive sur tout sous-espace de $W^m_{k/2}(\Omega)$, et en particulier sur l'espace $\mathring{W}^m_{k/2}(\Omega)$.

D'après le lemme de Lax-Milgram, on en déduit :

Problème I : $\forall\ f \in [W^m_{k/2}(\Omega)]'$, $\exists\,!\ u \in W^m_{k/2}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a(u,v) = \langle f,\bar{v}\rangle \\ v \in W^m_{k/2}(\Omega). \end{cases}$$

<u>Problème II</u> : $\forall f \in [\overset{\circ}{W}{}^m_{k/2}(\Omega)]'$, $\exists ! \; u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{k/2}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} a(u,v) = \langle f,\bar{v}\rangle \\ v \in \overset{\circ}{W}{}^m_{k/2}(\Omega). \end{cases}$$

Par analogie avec la théorie variationnelle classique pour les opérateurs elliptiques, on désignera le Problème I par Problème de Neumann et le Problème II par Problème de Dirichlet associé à l'opérateur $L \equiv \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} D^\beta (\varphi^k(x)\; a_{\alpha\beta}(x)\; D^\alpha)$.

<u>Remarque 2.1.</u> : Il résulte de la coercivité de la forme $a(u,v)$ que l'opérateur L est elliptique à l'intérieur de Ω.

Evidemment, les problèmes I et II s'interprêtent comme des problèmes aux limites ; en particulier pour $k < 2m-1$, le problème II de Dirichlet est équivalent au problème aux limites II' suivant :

<u>Problème II'</u> : $\forall f \in [\overset{\circ}{W}{}^m_{k/2}(\Omega)]'$, $\exists ! \; u \in W^m_{k/2}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \gamma u = 0 & \text{dans } \prod_{j=0}^{J} H^{m-\frac{k}{2}-j-\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{cases}$$

L'interprétation du Problème I de Neumann est plus délicate et nécessite des théorèmes de traces et de formule de Green puisque pour $k \leq 2m-1$, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ n'est pas dense dans le domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L c'est-à-dire $D(L;\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \; ; \; Lu \in L^2(\Omega)\}$. Par ailleurs, pour $k \geqslant 2m-1$, on a $W^m_{k/2}(\Omega) \equiv \overset{\circ}{W}{}^m_{k/2}(\Omega)$, il en résulte que les problèmes de Neumann et de Dirichlet correspondants sont identiques ; cependant, on peut montrer que pour $k = 2m-1$, on a bien un problème du type Neumann (cf. [7] pour k=m=1).

On s'intéresse ici à la régularité de la solution u des problemes I et II selon la régularité du second membre f ; on montrera que, sous certaines conditions simples sur f, le problème I de Neumann est régulier, alors que le problème II de Dirichlet ne l'est pas.

III - REGULARITE DES PROBLEMES AUX LIMITES VARIATIONNELS

Le résultat essentiel de ce chapitre est le résultat suivant :

Théorème 3.1. : Pour $k \geqslant m$ et pour tout entier $p \geqslant o$, l'opérateur L est un isomorphisme de $W_k^{2m+p}(\Omega)$ sur $H^p(\Omega) \cap H_o^{\mathrm{Min}(p,k-m)}(\Omega)$. En particulier, l'opérateur L est un isomorphisme de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ sur $\mathscr{D}(\overline{\Omega}) \cap H_o^{k-m}(\Omega)$.

En d'autres termes, le problème I de Neumann est régulier dès que le second membre l'est (modulo certaines conditions de traces nulles sur le bord Γ). Il en résulte que le problème II de Dirichlet n'est pas régulier.

Pour la démonstration du théorème 3.1., nous distinguerons deux cas selon que $k \geqslant 2m$ ou que $m \leqslant k \leqslant 2m-1$.

III.1. Démonstration du théorème 3.1. lorsque $k \geqslant 2m$

On va considérer les conditions $H_1(p;\Omega)$; $H_2(p;\Omega)$ et $H_3(p;\Omega)$ de [5]. Pour tout $x \in \Gamma$, on est amené à considérer l'opérateur différentiel :

$$L(x;t;D_t) \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (\xi+\mathrm{grad}\,\varphi(x)D_t)^\beta \; a_{\alpha\beta}(x)\; t^k \; (\xi+\mathrm{grad}\,\varphi(x)D_t)^\alpha$$

où ξ est un vecteur cotangent non nul en x à Γ.

L'équation caractéristique $\phi(x,\rho)$ associée s'écrit :

$$\phi(x;\rho) \equiv i^k \Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (\mathrm{grad}\,\varphi(x))^{\alpha+\beta} \; a_{\alpha\beta}(x)\Big] \quad (m+\rho)(m+\rho-1)\ldots\ldots(m+\rho-k+1),$$

les racines sont donc $-m, -m+1,\ldots,-m+k-1$. Ainsi, la condition $H_1(p;\Omega)$ est s tisfaite i.e. : $\phi(x;\rho) = o$ n'a pas de racine ρ telle que $\mathrm{Re}\,\rho = -p-2m+k-\frac{1}{2}$ et le nombre r_p de racine ρ de $\phi(x;\rho) = o$ vérifiant $\mathrm{Re}\,\rho > -p-2m+k-\frac{1}{2}$ est égal à $r_p = \mathrm{Min}(m+p,k)$ et donc l'indice χ_p de $L(x;t;D_t)$, opérant de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ est égal à $\chi_p = m-r_p = -\mathrm{Min}(p,k-m)$; par suite $\chi_p \geqslant o$ si et seulement si $p=o$.

Par ailleurs, la forme même de l'opérateur $L(x;t;D_t)$ montre que $L\,W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+) \subset H^p(\mathbb{R}_+) \cap H_o^{\mathrm{Min}(p;k-m)}(\mathbb{R}_+)$; et par suite, il en résulte (grâce à la coercivité forte de la forme $a_x(u,v)$ sur $W^m_{k/2}(\mathbb{R}_+))$ que $L(x;t;D_t)$ est un isomorphisme de $W_k^{2m+p}(\mathbb{R}_+)$ sur $H^p(\mathbb{R}_+) \cap H_o^{\mathrm{Min}(p;k-m)}(\mathbb{R}_+)$, ce qui répond à la condition $H_3(p;\Omega)$.

De ces propriétés, on déduit que pour tout entier $p \geqslant o$, on a :

(3.1) $\forall\ u \in W_k^{2m+p}(\Omega)\ ;\quad \|u\|_{W_k^{2m+p}(\Omega)} \leqslant C_p.\{\|Lu\|_{H^p(\Omega)} + \|u\|_{W_k^{2m+p-1}(\Omega)}\}$.

Par ailleurs, de ce qui précède et de la forme (variationnelle) même de l'opérateur L, on déduit que si $u \in W_k^{2m}(\Omega)$ et si $Lu \in H^p(\Omega) \cap H_o^{\mathrm{Min}(p,k-m)}(\Omega)$ alors $u \in W_k^{2m+p}(\Omega)$.

D'autre part, pour p=o, $\chi_o = o$ et donc, d'après [5], L est un opérateur à indice de $W_k^{2m}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La coercivité implique que L est injectif. Pour montrer la surjectivité, on raisonne par dualité, et on est amené à montrer que si $u \in L^2(\Omega)$ vérifie $L^* \tilde{u} = o$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $u \equiv o$ (L^* désigne l'opérateur adjoint formel associé à L). Or ceci implique $u \in L^2(\Omega)$ et $L^* u = o \in L^2(\Omega)$, donc $u \in D(L^*,\Omega)$ domaine maximal dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L^* et puisque $k \geqslant 2m$, il résulte de [7] que $u \in W_k^{2m}(\Omega)$; la coercivité de L^* implique alors $u \equiv o$.

Finalement, le théorème 3.1. est démontré pour p=o et pour p> o, cela résulte de l'isomorphisme pour p=o et du résultat de régularité énoncé précédemment.

III.2. <u>Démonstration du théorème 3.1. lorsque $m \leqslant k < 2m$</u>

La démonstration qui va suivre est en fait valable pour $m \leqslant k \leqslant 2m$ et permettrait ainsi de retrouver les résultats obtenus pour $k \geqslant 2m$ par une méthode totalement différente.

On commence par remarquer que si $k \geqslant m$, le problème I de Neumann s'interprête de façon simple. Soit $f \in [W^m_{k/2}(\Omega)]'$ et u la solution du

Problème I :

$$\begin{cases} a(u,v) = \langle f,\overline{v}\rangle \\ \forall\ v \in W^m_{k/2}(\Omega) \\ u \in W^m_{k/2}(\Omega) \end{cases}$$

Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^m_{k/2}(\Omega)$, on a donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et en désignant par F l'élément f considéré comme élément de $[W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'_{\overline{\Omega}}$:

$$\int_\Omega \varphi^k \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq m}} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u \,.\, \overline{D^\beta\phi|_\Omega}\, dx = \langle F,\overline{\phi}\rangle .$$

Or, puisque $k \geq m$, on a : $\widetilde{\varphi^k D^\alpha u} = \varphi^k D^\alpha \tilde{u}$ pour $|\alpha| \leq m$, où $\tilde{\cdot}$ désigne le prolongement par 0 hors de Ω. Finalement, le problème I de Neumann est équivalent au problème I' suivant :

Problème I' : $\forall\ F \in [W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'_{\overline{\Omega}}$, $\exists!\ u \in W^m_{k/2}(\Omega)$ tel que : $L\tilde{u} = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
En d'autres termes, l'application

$$u \longmapsto L\tilde{u} : W^m_{k/2}(\Omega) \longrightarrow [W^m_{k/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)]'_{\overline{\Omega}}$$

est un isomorphisme.

Remarquons de plus, puisque $k \geq m$, que si $u \in W^{2m+p}_k(\Omega)$ avec p entier ≥ 0, on a : $L\tilde{u} = \widetilde{Lu}$.

Par ailleurs, il résulte de III.1 que l'on a encore les estimations a priori (3.1.), de sorte que L est un isomorphisme de $W^{2m+p}_k(\Omega)$ sur un sous-espace fermé de $H^p(\Omega) \cap H_0^{\mathrm{Min}(p,k-m)}(\Omega)$. Il reste à établir que l'image $LW^{2m+p}_k(\Omega)$ est dense dans $H^p(\Omega) \cap H_0^{\mathrm{Min}(p,k-m)}(\Omega)$ et il suffit de l'établir pour p=o. Pour cela, soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et u la solution du problème I ; on a donc

(3.2.) $$L\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

On va démontrer que $u \in W^{2m}_k(\Omega)$ en utilisant la méthode des quotients différentiels pour la régularité tangentielle et en revenant à l'équation (3.2.) pour la régularité normale.

1ère étape : Estimation a priori dans le demi-espace et régularité tangentielle

Soit $x_o \in \Gamma$ et Θ un difféomorphisme d'un voisinage $\mathcal{O}$ de x_o dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ avec $\Theta(x_o) = o$ et tel que $\varphi \circ \Theta^{-1}(x';t) \equiv t$, $t \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. L'opérateur L se transforme en un opérateur $\mathcal{L}$ de la forme

$$\mathcal{L} v \equiv \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} B_{\alpha\beta}\, D^{\beta}\, (A_{\alpha\beta}\, t^k\, D^{\alpha} v).$$

La coercivité de la forme a(u,v) implique l'existence de deux constantes $\rho > o$ et $c > o$ telles que pour tout $v \in W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+)$ avec Supp $v \subset B(o,\rho)$, boule de centre 0 et de rayon ρ, on ait :

$$(3.3.)\qquad \|v\|_{W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left\{ \|\mathcal{L}\tilde{v}\|_{[W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n)]'} + \|v\|_{W^o_{k/2}(\mathbb{R}^n_+)} \right\}$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, Supp $\phi \subset B(o,\rho)$ avec $\phi(x) \equiv 1$ dans un voisinage de 0 ; de (3.3.) on déduit que pour tout $u \in W^m_{k/2}(\Omega)$, en posant $v = \tilde{u}o\Theta^{-1}$, on a :

$$(3.4.)\qquad \|\phi v|_{\mathbb{R}^n_+}\|_{W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C.\Big\{\|\phi\mathcal{L}v\|_{[W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n)]'} + \|[\mathcal{L},\phi]\chi v\|_{[W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n)]'} + \|\phi v|_{\mathbb{R}^n_+}\|_{W^o_{k/2}(\mathbb{R}^n_+)}\Big\}$$

où χ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur le support de ϕ.

Le commutateur $[\mathcal{L},\phi]$ est un opérateur de la forme suivante :

$$[\mathcal{L}, \phi] \equiv \sum_{\substack{|\alpha| \leq m-1 \\ |\beta| \leq m}} c_{\alpha\beta}\, D^{\beta}\, (d_{\alpha\beta}\, t^k\, D^{\alpha}) + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m-1}} e_{\alpha\beta}\, D^{\beta}\, (f_{\alpha\beta}\, t^k\, D^{\alpha}),$$

les coefficients $c_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$ et $f_{\alpha\beta}$ étant des fonctions C^∞ à support dans Supp ϕ.

Soit alors la solution u de (3.2.) ; on peut appliquer l'inégalité (3.4.) à la fonction

$$\rho_{ih}\, v(x',t) = \frac{1}{h}\left[\tau_{ih} v(x',t) - v(x',t)\right]$$

avec $\tau_{ih} v(x',t) = v(x'_1,\ldots,x'_i+h,\ldots,x'_{n-1},t)$, $i = 1,\ldots,n-1$ et $h > o$ assez petit.

Par ailleurs, on a :

$$\mathcal{L}(\rho_{ih}v) = \rho_{ih}\,\mathcal{L}v + \rho_{ih}(B_{\alpha\beta})\,D^{\beta}\,(\tau_{ih}(A_{\alpha\beta})\,t^{k}\,D^{\alpha}\,(\tau_{ih}v)$$
$$+ B_{\alpha\beta}\,D^{\beta}\,(\rho_{ih}(A_{\alpha\beta})\,t^{k}\,D^{\alpha}\,(\tau_{ih}v))\ ;$$

et puisque $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, i.e. : $\phi\,\mathcal{L}v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, on a

$$\|\phi\,\rho_{ih}\,\mathcal{L}v\|_{[W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n)]'} \leqslant C$$

où C est une constante indépendante de h. En effet, on a : pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle\phi\,\rho_{ih}\,\mathcal{L}v, \Psi\rangle = \langle\rho_{ih}\,\mathcal{L}v,\ \phi\Psi\rangle$$
$$= \langle t^{-k/2}\,\rho_{ih}\,\mathcal{L}v,\ t^{k/2}\,\phi\Psi\rangle$$

donc

$$|\langle\phi\,\rho_{ih}\,\mathcal{L}v,\ \Psi| \leqslant \|t^{-k/2}\,\rho_{ih}\,\mathcal{L}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ \|t^{k/2}\,\phi\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ ;$$

il suffit ensuite de remarquer que $\|t^{-k/2}\,\rho_{ih}\,\mathcal{L}v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ est bornée indépendamment de h puisque $\mathcal{L}v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$.

L'estimation des autres termes de $\mathcal{L}(\rho_{ih}v)$ ne présente pas de difficultés.

Finalement, on obtient que $\phi\,\rho_{ih}v$ demeure dans un borné de $W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+)$ et par suite que

$$\phi\,\frac{\partial v}{\partial X'_i}\Big|_{\mathbb{R}^n_+} \in W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+),\qquad i = 1,\ldots,n-1.$$

Réitérant le procédé en remplaçant v par $\frac{\partial v}{\partial X'_i}$ dans (3.4.) et ainsi de suite, on obtient que, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, on a :

$$\phi\,D^{\alpha}_{x'}v\Big|_{\mathbb{R}^n_+} \in W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+).$$

<u>2ème étape</u> : <u>Régularité normale</u>

Revenant à l'équation (3.2.) et à l'expression de $\mathcal{L}(\phi,v)$, il résulte de la 1ère étape que :

$$(3.5.)\qquad \begin{cases} D^m_t\,t^k\,D^m_t(\phi v) \in H^{-m+1}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \\ \phi v\Big|_{\mathbb{R}^n_+} \in W^m_{k/2}(\mathbb{R}^n_+). \end{cases}$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 3.1. : Si $w \in W^m_{k/2}(\mathbb{R}_+)$ à support borné et si $t^k D^m_t w \in H^p(\mathbb{R}_+)$ avec p entier, $1 \leq p \leq m$, alors $t^k D^q_t \tilde{w} \in H^p(\mathbb{R})$ pour $q = o,\ldots,m$.

Supposons ce lemme démontré. D'après (3.5.), il résulte que $t^k D^m_t(\phi v) \in H^1(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ et donc, d'après ce lemme 3.1., $t^k D^q_t(\phi v) \in H^1(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour $o \leq q \leq m$.

Revenant ensuite à $\mathscr{L}(\phi v)$, on obtient donc que $D^m_t\, t^k\, D^m_t(\phi v) \in H^{-m+2}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Répétant alors le raisonnement ci-dessus (m-1) fois, on obient finalement que : $t^k D^q_t(\phi v) \in H^m(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour $q = o,\ldots,m$.

Lemme 3.2. : Si $w \in W^m_{k/2}(\mathbb{R}_+)$ à support borné et si $t^k D^q_t \tilde{w} \in H^m(\mathbb{R})$ pour $q = o,\ldots,m$, alors $\tilde{w} \in W^{2m}_k(\mathbb{R})$.

Supposons ce lemme démontré. Il résulte donc de ce qui précède et de ce lemme 3.2. que $\phi v \in W^{2m}_k(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$.

Finalement, on a démontré que $\phi v \in W^{2m}_k(\mathbb{R}^n)$ et donc, en revenant à Ω, que $u \in W^{2m}_k(\Omega)$. C.Q.F.D.

Démonstration du lemme 3.1. : On peut procéder de la façon suivante.:
On part de l'identité suivante :

$$\frac{d}{dt}(t^k v) - k\, t^{k-1} v = t^k \frac{dv}{dt}.$$

On pose $U = t^{k-1} \dfrac{d^q}{dt^q} \tilde{w}$; on a alors :

$$(3.6)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(tU) - kU = t^k \dfrac{d^{q+1}}{dt^{q+1}} \tilde{w} \in H^p(\mathbb{R}) \\ U \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{si} \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Remarquons que si k =1, alors m = 1 puisque $k \geq m$ et dans ce cas p=1, et le résultat cherché est facile à obtenir car :

$$\frac{d}{dt}(t\tilde{w}) = \tilde{w} + t\,\frac{d\tilde{w}}{dt} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Revenons à (3.6.) ; sur $\mathbb{R}_+$, on a donc

$$U(t) = -\int_1^{+\infty} \sigma^{-k} \quad f(t\sigma)\, d\sigma \text{ où } \quad f = t^k \frac{d^{q+1}\tilde{w}}{dt^{q+1}} .$$

D'autre part, il est facile de vérifier que cette solution est aussi solution de (3.6.) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Enfin, on a :

$$\frac{d^p}{dt^p} U(t) = -\int_1^{+\infty} \sigma^{-k+p} \quad f^{(p)} \quad (t\sigma)\, d\sigma \ .$$

Utilisant l'inégalité de Hardy, on en déduit que $\frac{d^p}{dt^p} U(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration du lemme 3.2. : On a $t^k\ D_t^m \tilde{w} \in H^m(\mathbb{R})$ et comme $w(t) = o$ pour $t < o$, on a aussi : $t^{k-1}\ D_t^m \tilde{w} \in H^{m-1}(\mathbb{R})$. Par suite,

$$t^k \quad D_t^{m+1} \tilde{w} = D_t(t^k\ D_t^m \tilde{w}) + ik \quad t^{k-1}\ D_t^m \tilde{w} \in H^{m-1}(\mathbb{R}).$$

Raisonnons par récurrence et supposons que $t^k\ D_t^{m+p} \tilde{w} \in H^{m-p}(\mathbb{R})$, $o \leqslant p \leqslant m-1$.
On en déduit que $t^{k-1}\ D_t^{m+p} \tilde{w} \in H^{m-p-1}(\mathbb{R})$ et donc

$$t^k\ D_t^{m+p+1} \tilde{w} = D_t(t^k\ D_t^{m+p} \tilde{w}) + ik\ t^{k-1}\ D_t^{m+p} \tilde{w} \in H^{m-(p+1)}(\mathbb{R}).$$

Finalement $\tilde{w} \in W_k^{2m}(\mathbb{R})$.

Remarque 3.1. : Lorsque $1 \leqslant k < m$, il est raisonnable de penser que le problème I de Neumann est encore régulier mais ceci nécessite pour l'interprétation du problème variationnel comme problème aux limites un théorème de traces et une formule de Green délicats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON : The coerciveness problem for integro-differential forms, J. Analyse Math. 6 (1958), 183-223.

[2] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés. Arch. Rat. Méc. Anal. 34, n° 5, 1969, p. 361-379.

[3] P. BOERO - R. PAVEC : Coercivité de formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids ; C.R.A.S. Paris, t. 270, (1970), 1416-1419.

[4] P. BOLLEY - J. CAMUS : "Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids" - Publications des séminaires de Mathématiques. Université de Rennes - Séminaires d'Analyse Fonctionnelle - Année 1968-1969.

[5] P. BOLLEY - J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables - Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, 1973, p. 55-140.

[6] P. BOLLEY - J. CAMUS : Régularité de certains espaces de distributions - Astérique 2 et 3 - 1973.

[7] P. BOLLEY - J. CAMUS : Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés A paraître dans Annali della Scnola Normale Superiore di Pisa.