PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE CALLADINE

Critère de récurrence pour les marches aléatoires dans les groupes abéliens dénombrables

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 15-19
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A13_0>

CRITERE DE RECURRENCE POUR LES MARCHES ALEATOIRES DANS LES GROUPES ABELIENS DENOMBRABLES

(Pierre CALLADINE)

INTRODUCTION.-

Spitzer et Kesten, dans [1] ont donné le critère suivant : Soit G un groupe abélien dénombrable discret, μ une probabilité apériodique sur G, Γ le groupe dual de G, P la mesure de Haar normalisée sur Γ (qui est compact) $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ :

$$\mu \text{ est récurrente} \Longleftrightarrow \int_\Gamma \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma) = +\infty \qquad (1)$$

Le but de cette note est de donner, dans le cas où G est une torsion (tous les éléments sont d'ordre fini) des critères s'exprimant directement en terme de μ. Les notations ci-dessus seront utilisées dans la suite. G est donc un groupe abélien dénombrable de torsion, μ une probabilité apériodique sur G.

Nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est très facile.

Lemme.- Si G est un groupe abélien de torsion, dénombrable, il existe une suite croissante $(G_n)_{n\geq 0}$ de sous-groupes finis de G telles que $G_o = \{0\}$, $|G_n/G_{n-1}| = \alpha_n$ où $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres premiers, et telle que $G = \bigcup_{n\geq 0} G_n$.

Remarque : Cette suite $(G_n)_{n\geq 0}$ n'est évidemment pas unique, mais l'ensemble des valeurs prises par (α_n) ne dépend pas de $(G_n)_{n\geq 0}$. Nous supposerons $(G_n)_{n\geq 0}$ fixée dans la suite.

Soit $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma / \gamma(g) = 1 \ , \forall g \in G_n\}$.

La suite $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de sous-groupes de Γ tels que $\bigcap_{n\geq 0} \Gamma_n = \{e\}$ où e est l'élément neutre de

(voir [3])

$$\int_\Gamma \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma) = \sum_{n\geq 0} \int_{\Gamma_n - \Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma) \qquad (2)$$

Nous démontrons les deux résultats suivants :

Théorème 1.- (condition suffisante de récurrence)

Si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\left(1-\frac{1-\mu(G_{n+1})}{1-\mu(G_n)}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}}\right) = +\infty \qquad (S)$$

alors μ est récurrente.

Si la suite (α_n) est bornée (S) devient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\left(1-\frac{1-\mu(G_{n+1})}{1-\mu(G_n)}\right) = +\infty \qquad (S')$$

Théorème 2.- (condition nécessaire de récurrence)

Si μ vérifie la condition (A) suivante :

$$\exists C > 0 \ , \ \exists n_o \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_o \quad \frac{\mu(G_{n+1})-\mu(G_n)}{1-\mu(G_n)} \geq C > 0 \qquad (A)$$

la récurrence de μ implique la condition (N) suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} \frac{1}{(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})} = +\infty \qquad (N)$$

(N) devient lorsque (α_n) est bornée (N')

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} = +\infty \qquad (N')$$

On peut préciser ces critères dans des cas particuliers

Démonstration.- Pour obtenir (S), il faut minorer $\int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma)$; pour obtenir (N) il faut le majorer.

- Pour $\gamma \in \Gamma$, $1-\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{g\in G} \mu(g)(1-\gamma(g))$
- Si $\gamma \in \Gamma_n$, $1-\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{g\notin G_n} \mu(g)(1-\gamma(g))$ et donc

$$|1-\hat{\mu}(\gamma)|^2 \leq 4 \ \Big|\sum_{g\notin G_n} \mu(g)\Big|^2 = 4 \ |1-\mu(G_n)|^2 \qquad (3)$$

$$\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma)) \geq \sum_{g\in G_{n+1}-G_n} (1-\mathcal{R}e(\gamma(g)))\mu(g) \quad .$$

Si $\gamma \in \Gamma_{n+1} - \Gamma_n$, γ est constant sur les classes de G_{n+1} modulo G_n . Puisque $G_{n+1}/G_n \simeq Z/\alpha_{n+1}\mathbb{Z}$ ($\alpha_n = |G_n/G_{n-1}|$), pour $g \in G_{n+1}-G_n$, $\gamma(g)$ est de la forme $\exp(\frac{2i\pi k}{\alpha_{n+1}})$ où $1 \leq k \leq \alpha_{n+1}-1$.

Donc $\forall\gamma \in \Gamma_n-\Gamma_{n+1}$, $\forall g \in G_{n+1}-G_n$, $1-\mathcal{R}e(\gamma(g)) \geq 1 - \cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}}$ pour $\gamma \in \Gamma_n-\Gamma_{n+1}$,

$$\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma)) \geq (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(\mu(G_{n+1})-\mu(G_n)) \qquad (4)$$

$$\int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}]dP(\gamma) = \int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \frac{\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma))}{|1-\hat{\mu}(\gamma)|^2}\, dP(\gamma)$$

$$\geq \int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \frac{(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(\mu(G_{n+1})-\mu(G_n))}{4(1-\mu(G_n))^2}\, dP(\gamma)$$

$$P(\Gamma_n-\Gamma_{n+1}) = \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_1\cdots\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}}\ \frac{1}{|G_n|} \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}} \leq 1 \quad .$$

D'où la condition suffisante (S)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\ (1 - \frac{1-\mu(G_{n+1})}{1-\mu(G_n)})(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}}) = +\infty$$

Si la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est bornée, $1-\cos\frac{2\pi}{n+1} \geq k > 0$, d'où (S') .

. (4) peut s'écrire

$$\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma)) \geq (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(1-\mu(G_n))\ \frac{\mu(G_{n+1})-\mu(G_n)}{1-\mu(G_n)}$$

et donc si (A) est vérifié, pour $n \geq n_o$

$$\int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e(\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)})dP(\gamma) \leq \int_{\Gamma_n-\Gamma_{n+1}} \frac{1}{\mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma))}\, dP(\gamma)$$

$$\leq \frac{1}{C(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})(1-\mu(G_n))} \cdot \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}}\ \frac{1}{|G_n|}$$

Puisque la divergence de la série ne dépend pas des n_o premiers termes la récurrence de μ implique (N) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))}\quad \frac{1}{(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_{n+1}})} = +\infty$$

qui implique (N') lorsque (α_n) est bornée.

. <u>Cas particulier</u>

La méthode employée ici permet de retrouver facilement les résultats obtenus dans [2] , dans des cas particuliers pour G et μ .

<u>Exemple</u> : Soit $G = H \oplus (\bigoplus_{k=1}^{+\infty} Z/\beta_k\mathbb{Z})$ où (β_k) est une suite de nombres premiers, et μ une probabilité sur G apériodique, concentrée sur les facteurs directs H, $Z/\beta_k\mathbb{Z}$ $(k = 1,\ldots)$ (H est un groupe fini). Pour la suite $(G_n)_{n\geq 0}$ on peut prendre une suite telle que $G_{n_o} = H$ et $G_{n_o+m} = H \oplus (\bigoplus_{k=1}^{m} Z/\beta_k\mathbb{Z})$ $(\alpha_n = \beta_{n-n_o}\quad n > n_o)$

$$G = G_{n_o} \oplus (\bigoplus_{k=n_o+1}^{+\infty} Z/\alpha_n\mathbb{Z})$$

$$\Gamma = \hat{G}_{n_o} \times (\prod_{k=n_o+1}^{+\infty} Z/\alpha_k\mathbb{Z})$$

Pour $\gamma\in\Gamma$, $g \in G$, $\gamma = (\gamma_{n_o},\gamma_{n_o+1},\ldots)$ $g = (g_{n_o},g_{n_o+1},\ldots)$ $\gamma(g) = \prod_{k=n_o}^{+\infty} \gamma_k(g_k)$

Si $\gamma\in\Gamma_n - \Gamma_{n+1}$ $(n \geq n_o)$ $\qquad \gamma = (1,1,\ldots 1, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2},\ldots)$

$$1-\hat{\mu}(\gamma) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{g\in Z/\alpha_t\mathbb{Z} \\ g\neq 0}} \mu(g)(1-\gamma_k(g)) \Big)$$

Si $g \in Z/\alpha_k\mathbb{Z}$ $\quad \gamma_k \in Z/\alpha_k\mathbb{Z}$ $\qquad \gamma_k(g) = \exp(\frac{2ip\pi}{\alpha_k})$ $(1 \leq p \leq \alpha_k-1)$

d'où $\qquad \mathcal{R}e(1-\hat{\mu}(\gamma)) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu(G_k-1))$.

Une condition suffisante de récurrence est donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-(G_n))}\quad \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big[(1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu(G_{k-1}))\Big]}{(1-\mu(G_n))} = +\infty$$

Si (α_n) est bornée, puisque $\sum_{k=n+1}^{+\infty}[\mu(G_n)-\mu(G_{n-1})] = 1-\mu(G_n)$ un critère suffisant de récurrence est :

$$(S") \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\ (G_n))} = +\infty$$

. Dans les hypothèses de (S"), sans que la condition (A) soit vé ifiée, (6) donne, pour n assez grand

$$\int_{\Gamma_n - \Gamma_{n+1}} \mathcal{R}e\left[\frac{1}{1-\hat{\mu}(\gamma)}\right] dP(\gamma) \leqslant \frac{\alpha_{n+1}{}^{-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1}} \frac{1}{\sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\cos\frac{2\pi}{\alpha_k})(\mu(G_k)-\mu(G_{k-1}))}$$

une condition nécessaire de récurrence est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{|G_n|(1-\mu(G_n))} = +\infty$$

(S") est donc alors une condition nécessaire et suffisante de récurrence.

REFERENCES

1. SPITZER F. and KESTEN H. *Random walk on countable infinite abelian groups*. Acta Math. 5(1963), 237-264
2. FLATTO L. and PITT J. *Recurrence criteria for random walks on countable abelian groups*. Illinois J. of Maths 18 (1974), 1-19
3. HEWITT E. and ROSS K. *Abstract Harmonic Analysis*. Springer-Verlag vol. 1 (Berlin)

THEOREME CENTRAL LIMITE ET THEOREME CENTRAL LIMITE FONCTIONNEL SUR UN GROUPE DE LIE NILPOTENT

par H. HENNION

Le but de ce travail est de donner des démonstrations complètes des théorèmes limites obtenus par V.N. Tutubalin [1], puis de prolonger l'un d'eux en un théorème central limite fonctionnel. Il n'a pas été possible jusqu'ici d'en déduire des lois limites explicites pour les marches aléatoires par application du principe d'invariance.

__Hypothèses générales et notations__.-

1. G est le groupe de Lie nilpotent de classe 1 obtenu en munissant $\mathbb{R}^3$ du produit

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z'+\tfrac{1}{2}(xy'-yx'))$$

2. On considère sur G la distance invariante par translation à gauche (induisant la topologie initiale) définie par

$$\sigma,\rho \in G \qquad d(\sigma,p) = q(\sigma^{-1}\rho)$$

où

$$q(\tau) = \sup\{|x|,|y|,|z|^{1/2}\} \qquad \text{si } \tau = (x,y,z) .$$

3. Les éléments aléatoires $(U_n,V_n,W_n)_n$ désignent les accroissements successifs d'une marche aléatoire droite issue de $e = (0,0,0)$, la position à l'instant n de cette marche est

$$(X_n,Y_n,Z_n) = (U_1,V_1,W_1)\ldots(U_n,V_n,W_n)$$

avec

$$X_n = U_1 + \ldots + U_n$$
$$Y_n = V_1 + \ldots + V_n$$
$$Z_n = W_1 + \ldots + W_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (X_{i-1}V_i - Y_{i-1}U_i)$$