PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. F. ALLAIN

Approximation, par un processus de diffusion, des oscillations, autour d'une valeur moyenne, d'un processus de Markov de sauts pur

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 1-81
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A4_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPROXIMATION, PAR UN PROCESSUS DE DIFFUSION, DES OSCILLATIONS, AUTOUR D'UNE VALEUR MOYENNE, D'UN PROCESSUS DE MARKOV DE SAUTS PUR

- *M.F. ALLAIN* -

INTRODUCTION

Dans le présent travail on étudie les oscillations autour d'une valeur moyenne, d'une suite de processus de Markov de saut pur.

Des problèmes de ce type apparaissent dans de nombreux domaines (physique, biologie, étude de files d'attente...). Prenons par exemple le cas d'une population dont l'évolution est décrite par un processus de branchement de taux de croissance λ ; si X_t est la taille de la population à l'instant t, la moyenne $M_t = E\,(X_t)$ satisfait à l'équation :

$$\frac{d}{dt} M\,(t) = \lambda\, M(t)$$

De plus, si $(x^n(o))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de valeurs initiales telles que $\lim \frac{x^n(o)}{n} = M(o)$, en notant $x^n_{\cdot}$ le processus ayant même loi que X. pour $X(o)^n = x^n_o$, on sait que la suite $\left(\frac{x^n_{\cdot}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers M. uniformément sur $[0,T]$. On peut alors envisager d'étudier plus précisément la différence

$$\frac{x^n_{\cdot}}{n} - M.$$

Pour une classe de suites de processus de Markov de saut pur pour lesquels il existe une fonction déterministe X. solution d'une équation différentielle du 1er ordre telle que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_n \; P\left(\sup_{s \leq t} |x^n(s) - X(s)| > \varepsilon\right) = 0$$

T.G. Kurtz a montré que la suite obtenue, en normalisant convenablement la suite $(x^n_{\cdot} - X.)_{n \in \mathbb{N}}$, converge en loi vers une diffusion.

Dans la première partie de ce travail, nous étendons les résultats de T.G. Kurtz à une classe plus vaste de processus de Markov de saut pur.

Dans la deuxième partie, à partir de la page 51, nous étudions la vitesse de convergence.

- : -

THEOREMES DE CONVERGENCE

I - INTRODUCTION

Nous allons énoncer essentiellement deux théorèmes de convergence, du type central-limite ; pour leur démonstration, nous mettrons en oeuvre la technique des martingales de Stroock-Varadhan.

Les résultats et méthodes resteront valables si au lieu de la suite $(x^n_.)_{n \in \mathbb{N}}$ on considère une suite $\left(g(x^n_.)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pour des fonctions g suffisamment régulières.

Notons que, dans un article récent, T.G. Kurtz [10] donne des conditions suffisantes de convergence en loi de processus non markoviens vers une diffusion; Grigelionis, dans un article récent également, donne des conditions analogues, en particulier pour des processus ponctuels; ces conditions sont assez restrictives.

Nous restons ici, dans le cadre des processus markoviens du type décrit au paragraphe II, et pour ces processus nous pourrons dans la deuxième partie évaluer de façon précise la vitesse de convergence.

Le plan de cette première partie est le suivant :

II - HYPOTHESES GENERALES ET NOTATIONS

Tous les processus considérés sont définis sur l'espace canonique $(D, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t \in [0,T]})$

$$D = \{f \mid f : [0,T] \to \mathbb{R}^d \quad f \text{ c.a.d.l.a.g} \}$$

D étant muni de la topologie de Skorokhod (cf. Billingsley [4])

On se donne $(x^n_.)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus de Markov de saut pur à valeurs dans E_n, homogènes dans le temps, de loi P^n, de générateur infinitésimal (A^n, D^n) ; E est un ouvert contenant $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Soit $B = \{ \phi / \phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \ \phi$ bornée et mesurable $\}$

On sait que pour tout n, B est inclus dans D_n et que pour toute fonction ϕ de B, $A_n \phi(x)$ est de la forme :

$$A_n \phi(x) = \lambda_n(x) \int [\phi(z) - \phi(x)] \, \mu^n(x, dz)$$

où $\mu^n(x,.)$ est une probabilité de transition et $\lambda_n(x)$ le taux de croissance.

On suppose que pour tout n et tout élément x de E_n :

$$2.1. \quad \begin{cases} \lambda_n(x) \int \|z - x\| \, \mu^n(x, dz) < + \infty. \\ \lambda_n(x) \int \|z - x\|^2 \, \mu^n(x, dz) < + \infty. \end{cases}$$

Pour tout n, on définit les fonctions F_n et G_n sur E_n par :

$$2.2. \quad \begin{cases} F_n(x) = \lambda_n(x) \int (z - x) \, \mu^n(x, dz) \\ G_n(x) = \lambda_n(x) \int (z - x)^{\otimes 2} \, \mu^n(x, dz) \end{cases}$$

F_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et G_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$; ce sont respectivement les moments locaux d'ordre 1 et 2 ; on les prolonge par zéro en dehors de E_n.

2.3. Hypothèses

Dans toute la suite, on suppose qu'il existe :

1) Une constante K_1 telle que : $||F_n(x)|| \leq K_1 (1 + ||x||)$

2) Une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices d x d telle que $\lim_n ||\alpha_n|| = + \infty$

3) Une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, telle que $\lim_n \varepsilon_n = 0$

4) Une constante K_2 telle que : $||\alpha_n G_n(x) \alpha_n^*|| \leq K_2 (1 + ||x||)$

5) Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que

$$\begin{cases} \lim_n \dfrac{1}{a_n^2} = 0 \\ \beta_n(x) \leq \dfrac{K_2}{a_n^2} (1 + ||x||^2) \end{cases}$$

où $\beta_n(x) = \lambda_n(x) \displaystyle\int_{||\alpha_n(z-x)|| > \varepsilon_n} ||\alpha_n(z - x)||^2 \mu^n (x, dz)$

6) Une fonction H définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ continue et telle que pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$

$$\lim_n \sup_{x \in K} ||\alpha_n G_n(x) \alpha_n^* - H(x)|| = 0$$

7) Un élément x_o de $\mathbb{R}^d$ tel que : $\lim_n E(||x_o^n - x_o||^2) = 0.$

2.4. Remarque

On peut remplacer l'hypothèse

$$||\alpha_n G_n (x) \alpha_n^*|| \leq K_2 (1 + ||x||)$$

par

$$\begin{cases} ||\alpha_n G_n(x) \alpha_n^*|| \leq K_2 (1 + ||x||^2) \\ \lambda_n(x) \displaystyle\int ||z - x||^4 \mu^n(x, dz) \leq K_5 (1 + ||x||^4) \\ \sup_n E (||x_o^n||^4) < + \infty \end{cases}$$

Dans la suite, on notera 2.4. les hypothèses obtenues en faisant cette substitution dans les hypothèses 2.3.

2.5. Définition de X

Dans le cas où une sous-suite $(F_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, extraite de la suite (F_n), converge vers une fonction F, uniformément sur tout compact de E, on notera X (t, x_o) l'unique solution de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} X(t) = F(X(t)) \\ X(o) = x_o \end{cases}$$

2.6. Hypothèses sur la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$

La suite de processus $(x^n.)_{n \in \mathbb{N}}$ considérée plus loin satisfait toujours aux hypothèses (2.1, 2.3, 2.5) ou aux hypothèses (2.1, 2.4, 2.5)

Remarques

a) Dans toutes les démonstrations, on supposera que c'est la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers F sur tout compact ; les résultats obtenus s'étendent facilement au cas où $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à plusieurs points d'adhérence.

b) Dans [9], Kurtz adopte les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n} \sup\limits_{x} \|F_n(x) - F(x)\| = 0 \\ \text{et } \|F(x) - F(y)\| \leq K \ \|x - y\| \end{cases}$$

Les hypothèses choisies ici sont donc plus faibles et, dans le cas où $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite (uniforme sur tout compact), la conclusion que nous obtiendrons est aussi précise que celle donnée par Kurtz.

2.7. Hypothèses sur les équations différentielles stochastiques

On considère par la suite des équations différentielles stochastiques, par rapport au mouvement Brownien, du type :

2.7. $$x_t = x_o + \int_o^t \sigma(s)\ d\ \beta_s + \int_o^t m(s)\ x_s\ ds$$

$$\text{avec} \begin{cases} -\ \sigma(s) \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad ; \quad \sup\limits_{s \in [0,T]} \|\sigma(s)\| < +\infty \\ -\ m(s) \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \quad ; \quad \sup\limits_{s \in [0,T]} \|m(s)\| < +\infty \\ \sigma \text{ et } m \text{ continues} \end{cases}$$

Il convient de préciser en quel sens sont prises les solutions.

Or, nous allons étudier la convergence d'une suite de lois $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la limite Q sera caractérisée comme étant l'unique solution d'un certain problème de martingale, ce qui revient à considérer l'existence et l'unicité d'une solution faible pour une équation du type 2.7.

Notons cependant que par suite des hypothèses sur σ et m l'équation 2.7. possède une solution forte unique dès que l'on se fixe l'espace Brownien $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)\ P, (\beta_t))$ et donc aussi une solution faible unique (cf. [1] , [11] , [12] , [13]).

2.8. Remarque

Les résultats restent valables si le générateur de x^n. est de la forme :

$$A_s^n\ f(x) = \lambda_n(x) \int [f(z) - f(x)]\ \mu^n(s\ ,\ x,\ dz)$$

et si toutes les hypothèses sont vérifiées uniformément par rapport à s sur $[0,T]$.

Dans ce cas $X(., x_o)$ est solution de $\{ \frac{dX}{dt}\ (t) = F(X_t,\ t),\ X_o = x_o \}$

III - RAPPEL DE PROPRIETES FONDAMENTALES ET MAJORATIONS

Toutes les propriétés indiquées ci-après résultent de l'étude générale des processus (cf. par exemple, Dynkin [6])

Soit $z_t^n = x_t^n - x_o^n - \int_o^t F_n(x_s^n)\, ds$ où $(x_\cdot^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de processus du type défini en II.

3.1. Générateurs infinitésimaux

$\xi^n_\cdot = (x^n_\cdot, z^n_\cdot)$ est un processus de Markov de générateur $\mathcal{A}^n$.

Toute fonction $f\ (x,z) \equiv f(z)$ différentiable et telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{x,z} \lambda_n(x) \displaystyle\int |f(\omega-x+z) - f(z) - Df(z)(\omega-x)|\ \mu^n(x,d\omega) < +\infty \\ \text{Df absolument continue (cf. [7], p.285)} \end{array}\right.$$

est dans le domaine de $\mathcal{A}^n$; de plus, dans ce cas :

$$E_x\ [f(z_t^n) - f(z_o^n)] = \int_o^t E_x[\mathcal{A}^n f(x_s^n\ ,\ z_s^n)]\ ds$$

avec $\mathcal{A}^n f(x,z) = \lambda_n(x) \int [f(\omega-x+z) - f(z) - Df(z)(\omega-x)]\mu^n(x,d\omega)$

3.2. Martingalité

$(z_t^n)_{t\in[0,T]}$ est une martingale.

3.3. Inégalité de martingale pour toute fonction convexe Φ à valeurs dans $\mathbb{R}+$

$$P\left(\sup_{t_1\leq s\leq t_2} ||z_s^n - z_{t_1}^n|| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\Phi(\varepsilon)}\ E\left[\Phi\left(||z_{t_2}^n - z_{t_1}^n||\right)\right]$$

3.4. Majorations

Dans le cas où les hypothèses 2.3 et 2.5 sont satisfaites, on a également :

$$||F(x)|| \leq K_1 \left(1 + ||x||\right) \quad ; \quad ||G_n(x)|| \leq \frac{K_2}{||\alpha_n||^2} \left(1 + ||x||\right)$$

et $||H(x)|| \leq K_2 \left(1 + ||x||\right)$

On montre alors, en utilisant le lemme 6.1. donné en annexe, que pour tout élément t de $[0,T]$

$$E\left(\sup_{s\leq t} ||x^n(s)||^2\right) \leq [K_4(n)]^2\, e^{2\, K_3(n)}$$

avec
$$\left\{\begin{array}{l} K_3(n) = 4\ T\ \left[K_1^2\ T + \dfrac{K_2}{||\alpha_n||^2}\right] \\ [K_4(n)]^2 = 4\left(\dfrac{2\ K_2}{||\alpha_n||^2} T + 2\ K_1^2\ T^2 + E\left(||x_o^n||^2\right)\right) \end{array}\right.$$

En posant $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_3(n) = K_3$

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_4(n) = K_4$

on en déduit que :

3.4.1.
$$\left\{\begin{array}{l} E\left(\sup\limits_{s\leq t} ||x_s^n||^2\right) \leq K_4^2\ e^{2\ K_3} \\ E\left(\sup\limits_{s\leq t} ||G_n(x_s^n)||\right) \leq \dfrac{K_2}{||\alpha_n||^2} \left(1 + K_4\ e^{K_3}\right) \\ E\left(\sup\limits_{s\leq t} ||H\ (x_s^n)||\right) \leq K_2\left(1 + K_4\ e^{K_3}\right) \\ E\left(\sup\limits_{s\leq t} ||F_n(x_s^n)||\right) \leq K_1\left(1 + K_4\ e^{K_3}\right) \\ E\left(\sup\limits_{s\leq t} ||F(x_s^n)||\right) \leq K_1\left(1 + K_4\ e^{K_3}\right) \end{array}\right.$$

$$
\text{3.4.1.}\quad
\begin{cases}
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|G_n(x_s^n)\|^2\right) \leq \dfrac{4\,K_2^2}{\|\alpha_n\|^4}\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|H(x_s^n)\|^2\right) \leq 2\,K_2^2\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|\beta_n(x_s^n)\|\right) \leq \dfrac{K_2}{a_n^2}\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|z_s^n\|^2\right) \leq \dfrac{K_2 T}{\|\alpha_n\|^2}\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right)
\end{cases}
$$

Par ailleurs, si les hypothèses 2.4 et 2.5 sont satisfaites, on a :

$$
\|F(x)\| \leq K_1\left(1 + \|x\|\right) \quad ; \quad \|G_n(x)\| \leq \frac{K_2}{\|\alpha_n\|^2}\left(1 + \|x\|^2\right)
$$

et $\|H(x)\| \leq K_2\left(1 + \|x\|^2\right)$

on en déduit

$$
\text{3.4.2.}\quad
\begin{cases}
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|x_s^n\|^2\right) \leq K_4^2\ e^{2K_3},\quad E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|z_s^n\|^2\right) \leq \dfrac{K_2 T}{\|\alpha_n\|^2}\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|G_n(x_s^n)\|\right) \leq \dfrac{K_2}{\|\alpha_n\|^2}\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|H(x_s^n)\|\right) \leq K_2\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|F_n(x_s^n)\|\right) \leq K_1\left(1 + K_4\ e^{K_3}\right) \\
E\left(\sup\limits_{s \leq t} \beta_n(x_s^n)\right) \leq \dfrac{K_2}{a_n^2}\left(1 + K_4^2\ e^{2K_3}\right) \\
\sup\limits_{s \leq t} E\left(\|G_n(x_s^n)\|^2\right) \leq 2\ \dfrac{K_2^2}{\|\alpha_n\|^4}\left(1 + K_8\ e^{K_9}\right) \\
\sup\limits_{s \leq t} E\left(\|H(x_s^n)\|^2\right) \leq 2\,K_2^2\left(1 + K_8\ e^{K_9}\right)
\end{cases}
$$

3.4.3. Majoration de $P\left(\sup\limits_{|t-s|<\delta} \|\alpha_n(z_s^n - z_t^n)\| > \varepsilon\right)$

Il suffit d'utiliser le corollaire 6.1.3. de l'appendice en posant :

$\alpha = \alpha_n$; $\varepsilon' = \varepsilon_n$, $\mathcal{K}_1 = K_1$, $\mathcal{K}_2 = \dfrac{K_2}{\|\alpha_n\|^2}$, K_3 et K_4 (resp. K_8 et K_9)

définis précédemment, pour voir qu'il existe une constante K telle :

$$
P\left(\sup_{|t-s|<\delta} \|\alpha_n(z_s^n - z_t^n)\| > \varepsilon\right)
$$

$$
\leq \frac{K}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{\|\alpha_n\|} + \varepsilon_n^2 + \sup_{u \leq T} E\left(\beta_n(x_u^n)\right)\right]
$$

et compte-tenu de 3.4.1. et 3.4.2.

$$
P\left(\sup_{|t-s|<\delta} \|\alpha_n(z_s^n - z_t)\| < \varepsilon\right)
$$

$$
\leq \frac{K_0}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{\|\alpha_n\|} + \varepsilon_n^2 + \frac{1}{a_n^2}\right]
$$

3.5. Convergence en moyenne

A partir de maintenant, on suppose que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction F uniformément sur tout compact.

Proposition 3.5.

On suppose de plus qu'il existe une fonction κ croissante continue telle que

$$
\int_{0+} \frac{du}{\kappa(u)} = +\infty
$$

et que F_n vérifie l'une des hypothèses suivantes :

H_1 . $\|F_n(x) - F_n(y)\| \leq \kappa(\|x-y\|)$ et κ concave.

H_2 . $\|F_n(x) - F_n(y)\| \leq \dfrac{1}{\|\alpha_n\|^2}\,\kappa\left(\|\alpha_n{}^2\,(x-y)\|\right)$

et $\kappa(u) \leq K_o\left(1 + \|u\|\right)$

alors sous H_1 $\quad \lim\limits_n E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|\right) = 0$

et sous H_2 $\quad \lim\limits_n E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|^2\right) = 0.$

On a encore cette dernière convergence si l'hypothèse H_1 est satisfaite et si $\kappa(u) = bu$

<u>Démonstration</u>

On a : $\quad X(s, x_o) = x_o + \int_o^s F\left(X(u, x_o)\right)\, du.$

alors : $\|x_s^n - X(s, x_o)\| \leq \|x_s^n - x_o^n - \int_o^s F_n(x_u^n)\, du\| + \|x_o^n - x_o\|$

$$+ \|\int_o^s (F_n(x_u^n) - F\left(X(u, x_o)\right)\, du\|$$

d'où

$$\sup_{s \leq t} \|x_s^n - X(s, x_o)\| \leq \sup_{s \leq t} \|z_s^n\| + \|x_o^n - x_o\|$$

$$+ \sup_{s \leq t} \int_o^s \|F_n(x_u^n) - F_n(X(u,x_o))\|\, du$$

$$+ \sup_{s \leq t} \int_o^s \|F_n\left(X(u, x_o)\right) - F\left(X(u, x_o)\right)\|\, du$$

Posons $A_1 = 1$, $A_2 = 2^3$, $a_1 = 1$ et $a_2 = T$. On a alors :

$$\sup_{s \leq t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|^i \leq A_i\left(\sup_{s \leq t} \|z_s^n\|^i + \|x_o^n - x_o\|^i\right.$$

$$+ a_i \int_o^t \left(\sup_{u \leq s} \|F_n(x_u^n) - F_n\left(X(u, x_o)\right)\|\right)^i ds$$

$$\left.+ a_i \int_o^t \left(\sup_{u \leq s} \|F_n\left(X(u, x_o)\right) - F\left(X(u, x_o)\right)\|\right)^i ds\right)$$

d'où

<u>3.5.1.</u> $$E\left(\sup_{s \leq t} \|x_s^n - X(s,x_o)\|^i\right) \leq A_i\left\{\left[E\left(\sup_{s \leq t}\|z_s^n\|^2\right)\right]^{i/2} + E\left(\|x_o^n - x_o\|^i\right)\right.$$

$$+ a_i \int_o^t E\left(\sup_{u \leq s} \|F_n(x_u^n) - F_n\left(X(u, x_o)\right)\|^i\right) ds$$

$$\left.+ a_i\; T \sup_{u \leq T} \|F_n\left(X(u, x_o)\right) - F\left(X(u, x_o)\right)\|^i\right\}$$

F_n converge vers F uniformément sur tout compact et $X(., x_o)$ est continue sur $[0,T]$ donc

$$\lim_n \sup_{u \leq T} \|F_n\left(X(u, x_o)\right) - F\left(X(u, x_o)\right)\|^i = 0$$

de plus $\quad \lim\limits_n E\left(\|x_o^n - x_o\|^2\right) = 0$

et $\quad E\left(\sup\limits_{s \leq t} \|z_s^n\|^2\right) \leq \dfrac{K_2 T}{\|\alpha_n\|^2}\left(1 + K_4^2\, e^{2K_3}\right)$

Alors sous l'hypothèse H_1, κ étant concave et croissante, on a (Inégalité de Jensen) :

$$E\left(\sup_{s \leq t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|\right) \leq \frac{2}{\|\alpha_n\|}\left[(K_2)\, T\left(1+K_4\, e^{K_3}\right)\right]^{1/2} + E\left(\|x_s^n - x_o\|\right)$$

<u>3.5.2.</u> $$+ \int_o^t \kappa\left(E\left(\sup_{u \leq s} \|x_u^n - X(u, x_o)\|\right)\right) ds$$

$$+ T \sup_{u \leq T} \|F_n\left(X(u, x_o)\right) - F\left(X(u, x_o)\right)\|$$

De même, sous l'hypothèse H_2 comme $\kappa(u) \leq K_o\left(1 + ||u||\right)$,

on a :

3.5.3.
$$E\left(\sup_{s\leq t} ||x_s^n - x(s,x_o)||^2\right) \leq 2^3 \left\{ \frac{1}{||\alpha_n||^2} \left[(K_2 T(1+K_4\, e^{K_3}\right] + E\left(||x_o^n - x_o||^2\right) + T\, 2K_o^2 \int_o^t E\left(\sup_{u\leq s} ||x_u^n - X(u,x_o)||^2\right) ds + T^2 \sup_{u\leq T} ||F_n\left(X(u,x_o)\right) - F\left(X(u,x_o)\right)||^2 + 2\, K_o^2\, T \frac{1}{||\alpha_n||^4} \right\}$$

soit $$\delta_n^1 = \frac{2}{||\alpha_n||} \quad K_2 T(1 + K_4\, e^{K_3})^{1/2} + E\left(||x_o^n - x_o||\right) + T^2 \sup_{u\leq T} ||F_n\left(X(u,x_o)\right) - F\left(X(u,x_o)\right)||$$

$$\delta_n^2 = 2^3 \left\{ \frac{1}{||\alpha_n||^2} K_2 T\left(1+K_4\, e^{K_3}\right) + E\left(||x_o^n - x_o||^2\right) + 2K_o^2 T . \frac{1}{||\alpha_n||^4} + T^2 \sup_{u\leq T} ||F_n\left(X(u,x_o)\right) - F\left(X(u,x_o)\right)||^2 \right\}$$

$$\phi_n^1(t) = E\left(\sup_{s\leq t} ||x_s^n - X(s,x_o)||\right)$$

$$\phi_n^2(t) = E\left(\sup_{s\leq t} ||x_s^n - X(s,x_o)||^2\right)$$

Les deux inégalités précédentes sont du type :

3.5.4. $$\phi_n(t) \leq \delta_n + a \int_o^t \eta\left(\phi_n(s)\right) ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

3.5.4.

avec $\lim_n \delta_n = 0$

η fonction croissante continue

et $\int_{0+} \frac{du}{\eta(u)} = + \infty$

soit $N(u) = \int_{u_o}^{u} \frac{dv}{\eta(v)} \qquad u_o > 0 \qquad u \geq 0$

Une généralisation du lemme de Bellman due à Bihari [3] permet d'écrire :

3.5.5. $$\phi_n(t) \leq N^{-1}\left(N(\delta_n) + at\right)$$

Notons que, dans le cas particulier où $\eta(u) = u$, ceci n'est autre que l'inégalité de Gronvald

$$\phi_n^2(t) \leq e^{at}. \delta_n^2$$

Dans tous les cas, on a donc :

$\lim_n \phi_n(t) = 0$ ce qui achève la démonstration de la proposition 3.5.

Remarques

- l'hypothèse H_2 s'adapte au cas où considère un processus $(x_t)_{t \in [0,T]}$ à trajectoires croissantes, et dont le moment d'ordre 1 vérifie :

$$||F(x) - F(y)|| \leq \kappa\left(||x-y||\right)$$

si on définit $x_t^n = \frac{x_t}{n} \quad x_t^n = x_o$

alors $$||F_n(x) - F_n(y)|| \leq \frac{1}{n} ||F(nx) - F(ny)|| \leq \frac{1}{n} \kappa\, ||n(x-y)||$$

et $\alpha_n = \sqrt{n}$

donc $$||F_n(x) - F_n(y)|| \leq \frac{1}{||\alpha_n||^2} \kappa\left(||\alpha_n^2 \quad (x-y)||\right)$$

- si les fonctions F_n sont uniformément lipschitziennes, les hypothèses H_1 et H_2 sont identiques.

3.6. Corollaire

On considère l'hypothèse suivante :

H_3: la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction F vérifiant :

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \kappa\left(\|x-y\|\right)$$

où κ continue croissante concave telle que $\int_{0+} \frac{du}{\kappa(u)} = +\infty$

Si cette hypothèse H_3 est satisfaite, on a :

$$\lim_n E\left(\sup_{s\leqslant t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|\right) = 0$$

plus, si $\kappa(u) = u$, on a :

$$E\left(\sup_{s\leqslant t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|^2\right) = 0$$

Démonstration

On a $\|F_n(x)\| \leqslant K_1\left(1 + \|x\|\right)$

Il suffit alors d'écrire

$$\|F_n(x_s^n) - F\left(X(s, x_o)\right)\| \leqslant \|F_n(x_s^n) - F(x_s^n)\| + \|F(x_s^n) - F\left(X(s,x_o)\right)\|$$

d'où $\|F_n(x_s^n) - F\left(X(s,x_o)\right)\| \leqslant \sup_x \|F_n(x) - F(x)\| + \kappa(\sup_s \|x_s^n - X(s,x_o)\|$

pour retrouver une inégalité du type 3.5.4.

3.7. Corollaire

On considère l'hypothèse suivante :

H_4 : la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction bornée telle que :

$\forall C > 0$, il existe une fonction κ_C continue concave croissante telle que

$$\int_{0+} \frac{du}{\kappa(u)+u} = +\infty$$

et telle que pour tout x et y vérifiant $\|x\| \leqslant C$, $\|y\| \leqslant C$

on a : $\|F(x) - F(y)\| \leqslant \kappa_C\left(\|x-y\|\right)$

Si cette hypothèse H_4 est satisfaite, on a:

$$\lim_n E\left(\sup_{s\leqslant t} \|x_s^n - X(s, x_o)\|\right) = 0$$

De plus, si $\kappa_C(u) = bu$, on a : $\lim_n E\left(\sup_{s\leqslant t} \|x_s^n - X(s,x_o)\|^2\right) = 0$

Démonstration

Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\|F_n(x_u^n) - F\left(X(u,x_o)\right)\| &\leqslant \kappa_C\left(\|x_u^n - X(u,x_o)\|\right).1_{\left(\sup_{u\leqslant t} \|x_u^n - X(u,x_o)\|\leqslant 1\right)} \\ &+ 2\sup_x \|F(x)\| . 1_{\left(\sup_{u\leqslant t} \|x_u^n - X(u,x_o)\| > 1\right)} \\ &+ \|F_n(x_u^n) - F(x_u^n)\| 1_{\left(\sup_{u\leqslant t} \|x_u^n - X(u,x_o)\|\leqslant 1\right)} \\ &+ \|F_n(x_u^n) - F(x_u^n)\| 1_{\left(\sup_{u\leqslant t} \|x_u^n - X(u,x_o)\| > 1\right)}\end{aligned}$$

où $C = \sup_{u\leqslant t} \|X(u,x_o)\| + 1$

alors
$$\begin{aligned}E\left(\sup_{u\leqslant s} \|F_n(x_u^n) - F\left(X(u,x_o)\right)\|\right) &\leqslant \kappa_C(E(\sup_{u\leqslant s} \|x_u^n - X(u,x_o)\| \\ &+ 4\sup_x \|F(x)\|\ E\left(\sup_{u\leqslant s} \|x_u^n - x_u\|\right) \\ &+ \sup_{\|x\|\leqslant C} \|F_n(x) - F(x)\|.\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Notons que si $\kappa_C(u) = bu$, on a l'inégalité suivante :

$$E\Big(\sup_{u\leq s}||F_n(x_u^n)-F(X(u,x_o))||^2\Big)\leq K_o\Big[E\Big(\sup_{u\leq s}||x_u^n-X(u,x_o)||^2\Big)+\sup_{||x||\leq C}||F_n(x)-F(x)||^2\Big]$$

IV - THEOREME DE CONVERGENCE DE TYPE MARTINGALES

Théorème 4

- Soit $(x_.^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus de Markov de sauts purs satisfaisant aux hypothèses indiquées au paragraphe II ; on suppose de plus, que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'une des hypothèses H_1, H_2, H_3 ou H_4 (cf.3.5)

On pose $W_t^n = \alpha_n(x_t^n - x_o^n - \int_o^t F_n(x_s^n)\,ds)$

On note Q^n la loi de W^n.

Alors : la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une loi P^{x_o} unique solution du problème de martingales

$$(L_t^{x_o}\,,\,(0,0))\qquad \text{où}\quad L_t^{x_o}. = \frac{1}{2}\big(H\,(X(t,x_o)),\,D^2.\big)$$

Ceci équivaut à la propriété suivante :

La suite $\{W^n.\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers le processus de diffusion $W_.^{x_o}$ tel que

$$W_t^{x_o} = \int_o^t \big[H\big(X(s,x_o)\big)\big]^{1/2}\,d\,\beta_s$$

où $(\beta.)$ est un mouvement Brownien.

Démonstration

Nous ferons la démonstration en trois étapes.

4.1. La suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équitendue et toute loi $\tilde{Q}$ limite d'une sous-suite extraite de la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ véfifie $\tilde{Q}(C) = 1$ où $C = \mathcal{C}\big([0,T]\,,\,\mathbb{R}^d\big)$.

4.2. Pour toute sous-suite convergente extraite de la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la limite $\tilde{Q}$ est solution du problème des martingales :

$$\big(L_t^{x_o}.\,,(0,0)\big)$$

4.3 Le problème des martingales $(L_t^{x_o}, (0,0))$ possède une solution unique P^{x_o}.

Il résulte alors de 4.2 et 4.3 que la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers P^{x_o}.

Démonstration de la propriété 4.1.

D'après Billingsley [4] il suffit de vérifier que

4.1.1. $$\begin{cases} \text{i) } \forall \eta \; \exists a : \quad Q^n \{x : |x(0)| > a\} \leq \eta \\ \text{ii) } \forall \varepsilon \; \forall \eta \; \exists \delta \in]0,T[\text{ et } \exists \; n_o : \end{cases}$$

$$\forall n \geq n_o \quad Q^n \{x : \omega_x(\delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta$$

$$\text{où } \omega_x(\delta) = \sup_{|t-s|\leq\delta} |x(t) - x(s)|$$

i) $W_o^n = 0$ donc i) est satisfaite.

Il reste à prouver ii). On a :

$$Q^n(\{x : \omega_x(\delta) \geq \varepsilon\}) = P\left(\{\omega : \sup_{|t-s|\leq\delta} ||W_t^n - W_s^n|| \geq \varepsilon\}\right)$$

$$= P\left(\{\omega : \sup_{|t-s|\leq\delta} ||\alpha_n (z_t^n - z_s^n)|| \geq \varepsilon\}\right)$$

et d'après 3.4.3.

$$Q^n\left(\{x : \omega_x(\delta) \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{K_o}{1 \wedge \frac{\varepsilon^4}{6^4}} \left[\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon} \quad \frac{1}{||\alpha_n||} + \varepsilon_n^2 + \frac{1}{a_n^2} \right]$$

On peut supposer $||\alpha_n|| \geq 1 \quad \forall n$ puisque $\lim_n ||\alpha_n|| = +\infty$

Pour ε et η fixés, on pose :

$$\delta(\eta,\varepsilon) = \left(\frac{\eta}{3} \cdot \varepsilon \left(1 \wedge \frac{\varepsilon^4}{6^4}\right) \cdot \frac{1}{K_o T}\right)^2$$

et on choisit $n_o(\eta, \varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geq n_o(\eta,\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon_n \leq \frac{\eta}{3}\left(1\wedge\frac{\varepsilon^4}{6^4}\right) \cdot \frac{1}{K_o T} \\ \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{\eta}{3}\left(1\wedge\frac{\varepsilon^4}{6^4}\right) \cdot \frac{1}{K_o T} \end{cases}$$

ce qui est possible puisque

$$\begin{cases} \lim_n \varepsilon_n = 0 \\ \lim_n \frac{1}{a_n^2} = 0 \end{cases}$$

Alors ε et η étant fixés, on a :

$$Q^n\left(\{x : \omega_x(\delta(\eta,\varepsilon)) \geq \varepsilon\right) \leq \eta \qquad \text{dès que } n \geq n_o(\eta,\varepsilon)$$

ce qui achève la démonstration de la propriété 4.1.

Démonstration de la propriété 4.2.

Pour alléger les notations, on note $(W^n.)_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite extraite convergente. Il suffit de vérifier que

4.2.1. Pour toute fonction K, $\mathcal{D}_s$- mesurable, continue et bornée et pour toute fonction g de $\mathcal{C}_\infty^o(\mathbb{R}^d)$

$$E^{\tilde{Q}}\left(K\left(g(x_t) - g(x_s)\right)\right) = E^{\tilde{Q}}\left(K \int_s^t L_u^{x_o} g(x_u)\right) du$$

Pour cela, remarquons que, par suite du caractère Markovien de $\xi^n. = (x^n., z^n.)$, on a :

$$E^{Q^n}\Big(K\ \big(g(x_t) - g(x_s)\big)\Big) =$$

4.2.2. $$= E\Big(K \int_s^t du\ \lambda_n(x_u^n) \int \big[g(\alpha_n(\omega - x_u^n) + W_u^n) - g(W_u^n) - \langle Dg\ (W_u^n),\ \alpha_n(\omega - x_u^n)\rangle\big]\ \mu^n\ (x_u^n,\ d\omega\ \Big)$$

D'autre part,

4.2.3. $$E^{Q^n}\Big(K.\ \big(g(x_{(t)}) - g(x_s)\big)\Big) \to E^{\tilde{Q}}\Big(K\big(g(x_t) - g(x_s)\big)\Big)$$

Etudions alors le membre de droite de 4.2.2. On pose :

$$J_n(u) = \lambda_n(x_u^n) \int \big[g\big(\alpha_n(\omega - x_u^n) + W_u^n\big) - g(W_u^n) - \langle Dg(W_u^n), \alpha_n(\omega - x_u^n)\rangle\big]\mu^n(x_u^n,\ d\omega\ )$$

$$K_n(u) = \lambda_n(x_u^n) \int\ \Psi\big(\alpha_n(\omega - x_u^n),\ W_u^n\big)\ \mu^n(x_u^n\ ,\ d\omega\ )$$

4.2.4. $$L_n(u) = \frac{1}{2}\lambda_n(x_u^n\ ) \int \langle\ D^2 g(W_u^n)\alpha_n(\omega - x_u^n), \alpha_n(\omega - x_u^n)\rangle\ \mu^n(x_u^n,\ d\omega\ )$$

où $\Psi(y,z) = g(y+Z) - g(z) - \langle\ Dg(z), y\ \rangle - \frac{1}{2}\ \big(D^2 g(z)\ y,\ y\big)$

On a donc $J_n(u) = K_n(u) + L_n(u)$

4.2.5. $$L_n(u) = \frac{1}{2}\lambda_n(x_u^n)\ \int \Big(D^2 g(W_u^n),\ [\alpha_n(\omega - x_u^n)]^{\otimes 2}\Big)\ \mu^n(x_u^n,\ d\omega\ )$$

$$= \frac{1}{2}\ \big(D^2 g(W_u^n)\ ,\ \alpha_n\ G_n(x_u^n)\ \alpha_n^*\big)$$

$$= \frac{1}{2}\ \big(D^2 g(W_u^n)\ ,\ H(X(u,x_o))\big)$$

$$+ \frac{1}{2}\ \big(D^2 g(W_u^n)\ ,\ \alpha_n\ G_n(x_u^n)\ \alpha_n^* - H(x_u^n)\big)$$

$$+ \frac{1}{2}\ \big(D^2 g(W_u^n)\ ,\ H(x_u^n) - H(X(u,x_o))\big)$$

$$= L_n^1(u) + L_n^2\ (u) + L_n^3\ (u)$$

$$E\ \Big(K \int_s^t L_n^1\ (u)\ du\Big) = \frac{1}{2}\ E^{Q_n}\ \Big(K \int_s^t \big(D^2 g(W_u^n),\ H\ (X(u,x_o)\big)\ du\Big)$$

d'où

4.2.6. $$E\ \Big(K \int_s^t L_n^1(u)\ du\Big) \to \frac{1}{2}\ E^{\tilde{Q}}\ \Big(K \int_s^t \big(D^2 g\ (x_u),\ H\ (X(u,x_o)\big)\ du\Big)$$

pour $L_n^2\ (u)$ et $L_n^3\ (u)$

remarquons que :

$$|\ L_n^2\ (u)\ | \leq \frac{1}{2}\ \ \sup_x ||D^2 g(x)||\ \ \sup_{u\leq T} ||\alpha_n G_n(x_u^n)\ \alpha_n^* - H(x_u^n)||$$

$$|\ L_n^3\ (u)\ | \leq \frac{1}{2}\ \ \sup_x ||D^2 g(x)||\ \ \sup_{u\leq T} ||H\ (x_u^n) - H\big(X(u,x_o)\big)||$$

du lemme 6.1.4. de l'appendice, on déduit que

4.2.7. $$\begin{cases} \lim_n\ \Big|\ E\Big(K \int_s^t L_n^2\ (u)\ du\Big)\ \Big| = 0 \\ \text{et } \lim_n\ \Big|\ E\Big(K \int_s^t L_n^3\ (u)\ du\Big)\ \Big| = 0 \end{cases}$$

Etudions maintenant $K_n(u)$

$$K_n(u) = \lambda_n(x_u^n)\ \int\ \Psi\ \big(\alpha_n(\omega - x_u^n),\ W_u^n\big)\ \mu^n\big(x_u^n,\ d\omega\ \big)$$

Ecrivons

$$|K_n(u)| \leq \lambda_n(x_u^n) \int_{||\alpha_n(\omega - x_u^n)|| > \varepsilon_n} |\Psi\big(\alpha_n\ (\omega - x_u^n),\ W_u^n\big)|\ \mu^n(x_u^n,\ d\omega\ )$$

$$+ \lambda_n(x_u^n) \int_{||\alpha_n(\omega - x_u^n)|| \leq \varepsilon_n} |\Psi\big(\alpha_n(\omega - x_u^n)\ ,\ W_u^n\big)|\ \mu^n\big(x_u^n,\ d\omega\big)$$

Or $\Psi(y,z) = g(y+z) - g(z) - \langle Dg(z), y\rangle - \frac{1}{2} \langle D^2 g(z)\, y, y\rangle$

où $g \in \mathcal{C}^o_\infty(\mathbb{R}^d)$

en conséquence $\dfrac{||\Psi(y,z)||}{||y||^2} \leq K'$ et $\lim\limits_{y \to o} \sup\limits_{z} \dfrac{||\Psi(y,z)||}{||y||^2} = 0$

On sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta_\varepsilon$ tel que : $||y|| \leq \eta_\varepsilon$ implique

$$\sup_z \frac{||\Psi(y,z)||}{||y||^2} \leq \varepsilon$$

on choisit alors n_ε tel que, pour $n \geq n_\varepsilon$, $\varepsilon_n \leq \eta_\varepsilon$

Pour $\varepsilon > 0$, fixé, et $n \geq n_\varepsilon$, on a :

$$|K_n(u)| \leq \sup_{u \leq T} \lambda_n(x_u^n)\, K' \int_{||\alpha_n(\omega - x_u^n)|| > \varepsilon_n} ||\alpha_n||^2\, ||(\omega - x_u^n)||^2\, \mu^n(x_u^n, dz)$$

$$+ \sup_{u \leq T} \lambda_n(x_u^n)\, \varepsilon \int ||\alpha_n||^2\, ||(\omega - x_u^n)||^2\, \mu^n(x_u^n, dz)$$

d'où

$$E\,|K_n(u)| \leq K'\, E\left(\sup_{u \leq T} \beta_n(x_u^n)\right)$$

$$+\varepsilon\, E\left(\sup_{u \leq T} ||\alpha_n\, G_n(x_u^n)\, \alpha_n^*||\right)$$

mais $\lim\limits_n E\left(\sup\limits_{u \leq T} \beta_n(x_u^n)\right) = 0$ et $E\left(\sup\limits_{u \leq T} ||\alpha_n G_n(x_u^n)\, \alpha_n^*||\right) < +\infty$

d'où

4.2.8. $\lim\limits_n E\left(K. \int_s^t K_n(u)\, du\right) = 0$

de 4.2.3., 4.2.6., 4.2.7., et 4.2.8. on déduit 4.2.1., ce qui achève la démonstration de la propriété 4.2.

Démonstration de la propriété 4.3.

Le problème des martingales $(L_t^{x_o}, (0,0))$ possède une solution unique Q^{x_o} car $H(X(s,x_o))$ ne dépend que du temps et $\sup\limits_{s \in [0,T]} ||H(X(s,x_o))|| < +\infty$

en conséquence, la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q^{x_o}

Ceci achève la démonstration du théorème.

4.4. Corollaire

Dans le cas où la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède plusieurs points d'adhérence $(F_{a_1}, F_{a_2} \ldots F_{a_p})$, la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède également plusieurs points d'adhérence qui sont $(Q_1^{x_o}, \ldots Q_p^{x_o})$ tels que $Q_i^{x_o}$ est solution du problème de martingale

$$\left(L_t^{(i,x_o)}, (0,0)\right)$$

où
$$\begin{cases} L_t^{(i,x_o)}\,. = \frac{1}{2}\left(H\left(X^i(t,x_o)\right), D^2\,.\right) \\ F_{a_i}\left(X^i(t,x_o)\right) = \frac{\partial}{\partial t} X^i(t,x_o), \quad X^i(0,x_o) = x_o \end{cases}$$

V - THEOREME DE CONVERGENCE DE PROCESSUS DE MARKOV

Dans ce paragraphe, on étudie la convergence en loi de la suite de processus $V_t^n = \alpha_n \left(x_t^n - X(t,x_o)\right)$; dans le cas où α_n est inversible $(V_t^n)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Markov ; ceci n'est pas nécessairement le cas si α_n n'est pas inversible.

Dans [9], Kurtz a étudié le cas où α_n est réel. Quand on suppose que α_n est un élément de $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$,il apparaît une difficulté pour l'un des termes qui s'écrit $\alpha_n\, DF(X_u)\ (x_u^n - X(u,x_o))$; dans le cas où α_n est réel, ce terme est égal à $DF(X_u)\ V_u^n$ ce qui permet de conclure ; dans le cas général, on ne peut pas toujours faire la permutation. Il faut donc introduire une hypothèse supplémentaire qui sera automatiquement satisfaite dans le cas où $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Remarquons que, dans le cas où α_n est inversible, en définissant la famille de fonctions $_n$:

$$[0,T] \xrightarrow{\ \phi_n\ } \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

$$u \longmapsto \phi_n(u) = \alpha_n\ DF(X_u)\ \alpha_n^{-1} = \Phi_n(u)$$

on a 1) $\displaystyle\sup_{u\in[0,T]} \|\alpha_n\ DF(X_u)\ \alpha_n^{-1}\| < +\infty$

car DF(.) et X. sont continues.

2) La famille $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.

D'après le théorème d'Ascoli, la famille $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme.

Soit A un point d'adhérence ; alors, pour toute sous-suite convergeant vers A.

$$\|\alpha_{n_k} DF\ (X_u)\ \left(x_u^n - X(u,x_o)\right) - A\ (X_u)\ V_u^{nk}\ \|$$

$$\leq\ \|\alpha_{n_k}\ DF\ (X_u)\ \alpha_{n_k}^{-1} - A\ (X_u)\|\ \|V_u^{nk}\ \|$$

inégalité qui permettra de conclure pour la sous-suite $(V^{n_k}.)_{k\in\mathbb{N}}$ correspondante.

Nous allons supposer que α_n est inversible pour tout n et que la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Propriété 5.1

Soit $(x^n.)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus satisfaisant aux hypothèses indiquées au paragraphe II et vérifiant, de plus :

$$\forall n\ ,\ \forall x\quad \|\alpha_n\left(F_n(x) - F(x)\right)\| \leq K_o\left(1 + \|x\|\right)$$

$$\sup_n\ E\left(\|\alpha_n(x_o^n - x_o)\|\right) < K_o$$

alors sous les hypothèses H_2 ou H_3 (cf. 3) avec $\kappa(u) \equiv bu$

$$\sup_n\ E\left(\sup_{s\leq t}\|\alpha_n[F_n\ (x_u^n) - F\left(X(u,x_o)\right)]\|\right) < +\infty$$

Démonstration

Sous l'hypothèse H_2, on écrit :

$$\|\alpha_n\ \left[F_n(x_u^n) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\| \leq \|\ \alpha_n\left[F_n(x_u^n) - F_n\left(X(u,x_o)\right)\right]\|$$

$$+\|\ \alpha_n\left[F_n\left(X(u,x_o)\right) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\|$$

d'où $\displaystyle\sup_{u\leq s}\|\alpha_n\left[F_n(x_u^n)-F\left(X(u,x_o)\right)\right]\| \leq \frac{1}{\|\alpha_n\|}\ \kappa\left(\sup_{u\leq t}\|\alpha_n^2\left(x_u^n - X(u,x_o)\right)\|\right)$

$$+\ K_o\left(1 + \sup_{u\leq T}\|X(u,x_o)\|\right)$$

d'où

$$\sup_n\ E\ \left(\sup_{u\leq s}\|\alpha_n\ \left[F_n(x_u^n) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\|\right) \leq\ +\infty$$

En effet, en se reportant à la démonstration de la proposition 3.5, on a :

$$\kappa \left(\operatorname{Sup}_{u\leq t} \|\alpha_n^2 (x_u^n - X(u,x_o)\|\right) \leq K_o\left(1 + E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq t}\|\alpha_n^2\left(x_u^n - X(u,x_o)\right)\|\right)\right)$$

$$\text{et} \quad E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq t} \|x_u^n - X(u,x_o)\|^2\right) \leq \delta_n^2 \; e^{at}$$

$$\text{et} \quad \delta_n^2 \leq \frac{K'_o}{\|\alpha_n\|^2}$$

Par ailleurs, si on suppose que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F, avec F fonction Lipschitzienne, on a :

$$\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\| \leq \|\alpha_n(F_n(x_u^n) - F(x_u^n))\|$$
$$+ \|\alpha_n[F(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|$$

$$\text{d'où} \quad E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq s}\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|\leq \|K_o(1 + \operatorname{Sup}_{u\leq T} E(\|x_u^n\|)\right)$$
$$+\|\alpha_n\|E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq t}\|x_u^n - X(u,x_o)\|\right)$$

et pour les mêmes raisons que précédemment

$$\operatorname{Sup}_n E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq s}\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|\right) < +\infty$$

<u>Propriété 5.2.</u>

Si la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction F bornée et localement lipschitzienne, on a également :

$$\operatorname{Sup}_n E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq t}\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|\right) < +\infty$$

<u>Démonstration</u>

On écrit :

$$\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\| \leq \|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(x_u^n)]\|$$
$$+ \|\alpha_n[F(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|$$

$$\text{d'où} \quad E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq t}\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|\right) \leq K_o(1 + \operatorname{Sup}_{u\leq T} E(\|x_u^n\|)$$
$$K'\|\alpha_n\|E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq s}\|x_u^n - X(u,x_o)\|\right)$$

(cf démonstration du corollaire 3.6). On en déduit que

$$\operatorname{Sup}_n E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq t}\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|\right) < +\infty$$

<u>Théorème 5.</u>

<u>Hypothèses</u> : Soit $(x^n_{\cdot})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus de Markov de saut pur satisfaisant aux hypothèses indiquées au paragraphe II et vérifiant de plus, les hypothèses suivantes :

<u>H.5.1.</u>
- il existe une fonction B de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ continue et une constante K_o telles que :

  $$\|B(x)\| \leq K_o(1 + \|x\|)$$

  $$\lim_n \operatorname{Sup}_{x\in K}\|\alpha_n(F_n(x) - F(x)) - B(x)\| = 0$$

  pour tout compact K de R^d
- $\lim_n E\left(\|\alpha_n(x_o^n - x_o) - V_o\|^2\right) = 0$
- la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait :

  $$\operatorname{Sup}_n E\left(\operatorname{Sup}_{u\leq T}\|\alpha_n[F_n(x_u^n) - F(X(u,x_o))]\|\right) < +\infty$$
- DF existe et est continue

<u>H.5.2.</u>
- α_n est inversible pour tout n
- il existe une application A définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ telle que $\lim_n \operatorname{Sup}_{x\in K}\|\alpha_n DF(x)\,\alpha_n^{-1} - A(x)\| = 0$

  pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$

On pose $V^n(.) = \alpha_n\left(x^n_{.} - X(.,x_o)\right)$ et on note Q^n la loi de V^n. Alors la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers la loi Q^{x_o} unique solution du problème des martingales $\left(B_t^{x_o}\,,\,(o,V_o)\right)$

où $B_t^{x_o}\,g. = \frac{1}{2}\left(D^2 g.\ ,\ H\left(X(t,x_o)\right)\right) + \langle Dg.\,,\,A\left(X(t,x_o)\right).\rangle + \langle Dg.\,,\,B\left(X(t,x_o)\right)\rangle$

ce qui équivaut à dire que la suite $(V^n.)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers le processus de diffusion $V^{x_o}_{.}$ solution faible unique de l'équation :

$$V_t = V_o + \int_o^t \left[H\left(X(s,x_o)\right)\right]^{1/2} d\,\beta_s + \int_o^t \left[A\left(X(s,x_o)\right)V_s + B\left(X(s,x_o)\right)\right] ds \tag{5}$$

Démonstration

La démarche suivie est essentiellement la même que pour le théorème 4 précédent.

On va d'abord prouver la propriété 5.1. qui suit :

5.1. La suite des lois $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équitendue, et toute loi $\tilde{Q}$ limite d'une sous-suite extraite vérifie $\tilde{Q}\,(C) = 1$

On a :

$$\begin{aligned}
V^n_t &= \alpha_n\left(x^n_t - X(t,x_o)\right)\\
&= \alpha_n\left(x^n_t - x^n_o - \int_o^t F_n(x^n_u)du\right) + \alpha_n\left(x^n_o - X(t,x_o)\right) + \alpha_n \int_o^t F_n(x^n_u)du\\
&= W^n_t + \alpha_n(x^n_o - x_o) + \alpha_n \int_o^t \left[F_n(x^n_u) - F\left(X(u,x_o)\right)\right] du\\
&= W^n_t + \alpha_n(x^n_o - x_o) + \alpha_n \int_o^t \left[F_n(x^n_u) - F_n\left(X(u,x_o)\right)\right] du\\
&\qquad + \alpha_n \int_o^t \left[F_n\left(X(u,x_o)\right) - F\left(X(u,x_o)\right)\right] du
\end{aligned}$$

d'où

$$||V^n_t - V^n_s|| \leq ||W^n_t - W^n_s|| + (t-s)\ \sup_{u\leq T}\left|\left|\alpha_n\left[F_n(x^n_u) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\right|\right|$$

alors

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{|t-s|\leq\delta}||V^n_t - V^n_s|| > \varepsilon\right) &\leq P\left(\sup_{|t-s|<\delta}||W^n_t - W^n_s|| > \varepsilon/2\right)\\
&\quad + P\left(\delta\ \sup_{u\leq T}\left|\left|\alpha_n\left[F_n(x^n_u) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\right|\right| > \varepsilon/2\right)
\end{aligned}$$

mais

$$P\left(\sup_{|t-s|<\delta}||W^n_t - W^n_s||\ \varepsilon/2\right) \leq \frac{K_o}{\Phi(\varepsilon/4)}\left[2\,\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{||\alpha_n||} + \varepsilon^2_n + \frac{1}{a^2_n}\right]$$

et

$$\begin{aligned}
P\left(\delta.\ \sup_{u\leq T}\left|\left|\alpha_n\left[F_n(x^n_u) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\right|\right| > \varepsilon/2\right)
&\leq \frac{2\delta}{\varepsilon}\,E\left(\sup_{u\leq T}\left|\left|\alpha_n\left[F_n(x^n_u) - F\left(X(u,x_o)\right)\right]\right|\right|\right)\\
&\leq \frac{2\delta}{\varepsilon}\,.\,M
\end{aligned}$$

d'où

$$P\left(\sup_{|t-s|<\delta}||V^n_t - V^n_s|| > \varepsilon/2\right) \leq \frac{K_o}{\Phi(\varepsilon/4)}\left[\frac{2\sqrt{\delta}}{\varepsilon} + \varepsilon^2_n + \frac{1}{a^2_n}\right] + \frac{2\delta}{\varepsilon}\,.\,M$$

ε et η étant fixés

$$\text{Soit}\ \begin{cases}
n_{(\varepsilon,\eta)}\ :\ \forall_n \geq n_{(\varepsilon,\eta)} & \varepsilon^2_n + \dfrac{1}{a^2_n} \leq \dfrac{\eta}{2}\cdot\dfrac{\Phi(\varepsilon/4)}{K_o}\\[2ex]
\delta_{\varepsilon\,\eta}\ :\ \delta_{\varepsilon\eta} \leq \dfrac{\eta\varepsilon}{4M}\ \wedge\ \left(\dfrac{\eta}{4K_o}\,.\varepsilon\ \Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)\right)^2 &
\end{cases}$$

on a alors pour tout ε et tout η

$$P\left(\sup_{|t-s|<\delta_{(\varepsilon,\eta)}}||V^n_t - V^n_s|| > \varepsilon\right) \leq \eta \quad \text{dès que } n \geq n_o(\varepsilon,\eta)$$

D'autre part, $\forall\ \delta\ \exists\ a$ tel que $P\left(|V^n_{(o)}| > a\right) \leq \delta$

On peut donc affirmer que la suite des lois $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équitendue et toute loi $\tilde{Q}$ limite d'une sous-suite extraite vérifie : $\tilde{Q}\,(C) = 1$.

5.2. Nous allons maintenant prouver l'analogue de la propriété 4.2. Notons que $V^n_{.}$ est un processus de Markov quand α_n est inversible. Soit $f(t,y) = \alpha_n\left(y - X(t,x_o)\right)$. Alors, pour toute fonction g de $\mathcal{C}^o_\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{cases}
g\left(V_n(t)\right) = g\circ f\ \left(t,\ x^n_{(t)}\right)\\
\text{et}\\
g\circ f\ (t,x^n_t) - g\circ f\ (0,x^n_s) - \int_o^t \left[\left(A^n + \frac{\partial}{\partial u}\right) g\circ f\right](u,x^n_u)du
\end{cases}$$

est une martingale

et pour toute fonction K bornée continue $\mathcal{D}_s$ - mesurable

$$\underline{5.2.1.}\qquad E\left(K.\ \left[\left(g(V_t^n)-g(V_s^n)\right)\right]\right)=E\left(K.\ \int_s^t\left[(A^n+\frac{\partial}{\partial u})\ g\circ f\right](u,x_u^n)\ du\right)$$

De la définition de A^n et de la propriété :

$$\frac{\partial}{\partial u}f\ (u,y)=-\alpha_n\ \frac{\partial}{\partial u}X(u,x_o)=-\alpha_n\ F\left(X(u,x_o)\right)$$

il résulte que

$$\underline{5.2.2.}\qquad \left[(A^n+\frac{\partial}{\partial u})gof\right](u,y)=\lambda_n(y)\int\left[g\left(\alpha_n\left(z-X(u,x_o)\right)\right)-g\left(\alpha_n\left(y-X(u,x_o)\right)\right)\right]\mu^n(y,dz)$$

$$-<Dg\left(\alpha_n\left(y-X(u,x_o)\right)\right),\alpha_n\ F\left(X(u,x_o)\right)>$$

Le générateur infinitésimal $B^n_.$ de $V^n_.$ s'écrit donc pour toute fonction g de $\mathcal{C}_\infty^o$.

$$\underline{5.2.3.}\qquad B_t^n\ g(V)=\lambda_n\left(X(t,x_o)+\alpha_n^{-1}v\right)\int\left[g\left(\alpha_n(z-X(t,x_o))\right)-g(v)\right]\mu^n\left(X(t,x_o)+\alpha_n^{-1}v,dz\right)$$

$$-<Dg(v),\alpha_n\ F\ \left(X(t,x_o)\right)>.$$

soit alors $\tilde{Q}$ limite d'une sous-suite extraite de la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour alléger les notations on note $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite. On a :

$$\underline{5.2.4.}\qquad \lim_n\ E\left(K.\ \left[\left(g(V_t^n)-g(V_s^n)\right)\right]\right)=E^{\tilde{Q}}\left(K\ \left[g(x_t)-g(x_s)\right]\right)$$

$$=\lim_n\ E\left(K\ .\ \int_s^t\ B_u^n\ g(V_u^n)\ du\right)$$

Il suffit alors de vérifier que pour toute fonction g de $\mathcal{C}_\infty^o$ (R^d)

$$\underline{5.2.5.}\qquad \lim_n\ E\left(K\ \int_s^t\ B_u^n g(V_u^n)du\right)=E\ \left(K.\ \int_s^t\ B_u^{x_o}\ g\ (V_u)\ du\right)$$

$$=E^{\tilde{Q}}\ \left(K\ .\ \int_s^t\ B_u^{x_o}\ g\ (x_u)\ du\right)$$

ce qui permet d'affirmer que :

$$\underline{5.2.6.}\qquad g(x_t)-g(x_o)-\int_o^t\ B_u^{x_o}\ g(x_u)\ du\ \text{ est une } \tilde{Q}\text{ - martingale}$$

il en résulte que $\tilde{Q}$ est solution du problème de martingale $(B_t^{x_o}\ ,(0,v_o))$

or le problème de martingale $(B_t^{x_o}\ ,\ (0,v_o))$ possède une solution unique $Q^{x_o}\ (C)=1$

car
$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in[0,T]}\ ||H(t,x_o)||<+\infty\\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\ ||DF\ (X(t,x_o))||<+\infty\\ \text{et}\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\ ||DF\left(X(t,x_o)\right)x-DF\left(X(t,x_o)\right)y||\leqslant\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\ ||DF\left(X(t,x_o)\right)||.||x-y||\end{cases}$$

La suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers Q^{x_o}.

Il ne reste donc plus qu'à prouver la propriété 5.2.5.

$$B_t^n g(V)=\lambda_n\left(X(t,x_o)+\alpha_n^{-1}v\right)\int\left(g\left(\alpha_n\left(z-X(t,x_o)\right)\right)-g(v)\right)\mu^n\left(X(t,x_o)+\alpha_n^{-1}v,dz\right)$$

$$-<Dg(v),\ \alpha_n F(X_t)>$$

pour alléger la rédaction, on écrira $X(t)$ au lieu de $X(t,x_o)$)

Soit $\Psi(u,v)=g(u)-g(v)-<Dg(v),\ u-v>-\frac{1}{2}\left(D^2g(v),(u-v)^{\otimes 2}\right)$

alors

$$B_t^n g(v)=\lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)\ \int\ \Psi\left(\alpha_n\left(z-X(t),v\right)\right)\mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,\ dz\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)\ \int\ \left(D^2g(v),\left[\alpha_n\left(z-X(t)\right)-v\right]^{\otimes 2}\right)\mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,dz\right)$$

$$+<Dg(v),\ \alpha_n\left(F_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)-F\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)\right)>$$

$$+<Dg(v),\ \alpha_n\left(F\ \left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)-F\left(X(t)\right)-DF(X_t)\ \alpha_n^{-1}\ v\right)>$$

$$+<Dg(v),\ \alpha_n\ DF(X_t)\ \alpha_n^{-1}\ v>$$

$$\text{soit}\quad C_t^n\ g(v)=\lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}\ v\right)\int\ \Psi\left(\alpha_n\left(z-X(t),v\right)\right)\mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}\ v,\ dz\right)$$

$$E(K.\ \int_s^t\ B_u^n\ g(V_u^n)du)=E\left(K.\ \int_s^t\ C_u^n\ g(V_u^n)du\right)+E\left(K.\ \int_s^t\ (B_u^n-C_u^n)\ g(V_u^n)\ du\right)$$

il suffit de montrer que :

$$\text{5.2.7.}\quad \begin{cases} \lim\limits_n \sup\limits_{t\in[0,T]} \sup\limits_v \left|\left|\left[(B_t^n - C_t^n)\ g\right](v) - B_t^{x_o}\ g(v)\right|\right| = 0 \\ \lim\limits_n E\ \left(\sup\limits_{t\in[0,T]} \left|\left|C_u^n\ g(v_u^n)\right|\right|\right) = 0 \end{cases}$$

rappelons que

$$B_t^{x_o}g(v) = \frac{1}{2}\ \left(D^2g(v),\ H(X_t)\right) + < Dg(v),\ A(X_t)v + B(X_t) >$$

alors

$$\text{5.2.8.}\quad \left[(B_t^n - C_t^n)\ g\right]\ (v) - B_t^{x_o}\ g(v)$$

$$= \frac{1}{2}\ \left(D^2g(v)\ ,\ \alpha_n\ G_n\left(X(t) + \alpha_n^{-1}\ v\right)\ \alpha_n^* - H(X_t)\right)$$

$$+ < Dg(v),\ \alpha_n\ \left[F_n\left(X(t)+ \alpha_n^{-1}\ v\right) - F\left(X(t)+ \alpha_n^{-1}v\right)\right] - B(X_t) >$$

$$+ < Dg(v),\ \alpha_n\ \left[\ F_n\left(X(t) + \alpha_n^{-1}\ v\right) - F(X_t) - DF(X_t)\ \alpha_n^{-1}\ v\ \right] >$$

$$+ < Dg(v), \left[\alpha_n\ DF\ (X_t)\ \alpha_n^{-1} - A(X_t)\right]\ v\ >$$

Pour toute la suite C désignera un compact convenable. On a alors :

$$\text{5.2.9.}\quad \sup_{t\in[0,T]} \sup_v \left[||Dg(v)||\ \ ||\alpha_n\left[F_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right) - F\left(X(t)+\alpha_n^{-1}(v)\right)\right] - B(X_t)||\right]$$

$$\leq\ ||Dg||_\infty \sup_{x\in C} ||\alpha_n\left[\ F_n(x) - F(x)\right]\ - B(x)||$$

$$+\ ||Dg||_\infty \sup_{t\in[0,T]} \sup_{v\in \mathrm{Suppg}} ||B\left(X(t) + \alpha_n^{-1}\ v\right) - B(X_t)||$$

B étant continue est uniformément continue sur tout compact, le terme majorant tend vers zéro.

$$\text{5.2.10.}\quad \sup_{t\in[0,T]} \sup_v ||Dg(v)||.||\alpha_n\left[F\left(X(t)+ \alpha_n^{-1}v\right) - F(X_t) - DF(X_t)\alpha_n^{-1}\ v\right]||$$

$$\leq ||Dg||_\infty \sup_{x\in C} \sup_{v\in \mathrm{Suppg}} ||\alpha_n\ \left[F(x+ \alpha_n^{-1}v) - F(x) - DF(x)\ \alpha_n^{-1}\ v\right]||$$

et le terme majorant tend vers zéro car DF est continue.

$$\text{5.2.11.}\quad \sup_{t\in[0,T]} \sup_v ||Dg(v)||\ \ ||\alpha_n\ DF\ (X_t)\ \alpha_n^{-1} - A(X_t)||\ .||v||$$

$$\leq\ ||Dg||_\infty \sup_{v\in \mathrm{Suppg}} ||v||\ \ \sup_x ||\alpha_n\ \ DF(x)\ \alpha_n^{-1} - A(x)||$$

et le terme majorant tend vers zéro par hypothèse.

$$\text{5.2.12.}\quad \sup_{t\in[0,T]} \sup_v ||D^2g(v)||\ ||\alpha_n\ G_n\left(X(t)+ \alpha_n^{-1}v\right)\ \alpha_n^* - H\left(X(t) + \alpha_n^{-1}\ v\right)||$$

$$\leq\ ||D^2g||_\infty \sup_{x\in C} ||\alpha_n\ G_n(x)\alpha_n^* - H(x)||$$

mais $\lim\limits_n \sup\limits_{x\in C} ||\alpha_n\ G_n(x)\ \alpha_n - H(x)|| = 0.$

$$\text{5.2.13.}\quad \sup_{t\in[0,T]} \sup_v ||D^2g(v)||.||H\left(X(t) + \alpha_n^{-1}v\right) - H\left(X(t)\right)||$$

$$\leq\ ||D^2g||_\infty \sup_{x\in C} \sup_{v\in \mathrm{Suppg}} ||H(x+ \alpha_n^{-1}v) - H(x)||$$

H étant uniformément continue sur tout compact

$$\lim_n \sup_{x\in C} \sup_{v\ \in\ \mathrm{Suppg}} ||H(x + \alpha_n^{-1}v) - H(x)||\ = 0$$

il en résulte que :

$$\text{5.2.14.}\quad \lim_n \sup_{t\in[0,T]} \sup_v ||D^2g(v)||\ ||\alpha_n G_n(X_t+ \alpha_n^{-1}v)\ \alpha_n^* - H(X_t)|| = 0$$

De 5.2.9. à 5.2.14 , on déduit :

$$\lim_n \sup_{t\in[0,T]} \sup_v \left|\ \left[(B_t^n - C_t^n)\ g(v) - B_t^{x_o}\ g(v)\right]\ \right| = 0.$$

Il reste à vérifier que :

$$\lim_n E\ \left(\sup_{t\in[0,T]} |C_t^n\ g(v_t^n)|\right) = 0$$

or, la fonction $\Psi(u,v)$ appartient à $\mathcal{C}_\infty^o\ (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

et
$$\begin{cases} \displaystyle\sup_{u,v \in \mathrm{Supp}\, g} \frac{|\Psi(u,v)|}{\|u-v\|^2} = M < +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{\|u-v\| \to 0} \frac{|\Psi(u,v)|}{\|u-v\|^2} = 0 \end{cases}$$

alors

<u>5.2.15.</u>
$$|C_t^n g(v)| \leq \lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right) \int \left|\Psi\left(\alpha_n(z-X(t)),v\right)\right| \mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,\, dz\right)$$
$$\leq \lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right) \int_{\|\alpha_n(z-X(t))-v\| \leq \varepsilon_n} \left|\Psi\left(\alpha_n(z-X(t)),v\right)\right| \mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,\, dz\right)$$
$$+ \lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right) \int_{\|\alpha_n(z-X(t))-v\| > \varepsilon_n} \left|\Psi\left(\alpha_n(z-X(t)),v\right)\right| \mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,\, dz\right)$$

On a donc pour tout ε et $n \geq N_\varepsilon$

$$|C_t^n g(v)| \leq \varepsilon \lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right) \int \left\|\alpha_n(z-X(t))-v\right\|^2 \mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,\, dz\right)$$
$$+ M \lambda_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right) \int_{\|\alpha_n(z-X(t))-v\| > \varepsilon_n} \left\|\alpha_n(z-X(t))-v\right\|^2 \mu^n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v,\, dz\right)$$

d'où

$$|C_t^n g(v)| \leq \varepsilon \left\|\alpha_n G_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)\alpha_n^*\right\| + M \beta_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}v\right)$$

et
$$E\left(\sup_{t \in [0,T]} |C_t^n g(V_t^n)|\right) \leq \varepsilon \cdot E\left(\sup_{t \in [0,T]} \left\|\alpha_n G_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}V_t^n\right)\alpha_n^*\right\|\right) + E\left(\sup_{t\in[0,T]} \beta_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}V_t^n\right)\right)$$

dès que $n \geq N$

Compte-tenu du fait que $x_t^n = X(t) + \alpha_n^{-1} V_t^n$

on a :

<u>5.2.16.</u>
$$\begin{cases} E\left(\displaystyle\sup_{t\in[0,T]} \left\|\alpha_n G_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}V_t^n\right)\alpha_n^*\right\|\right) = E\left(\displaystyle\sup_{t\in[0,T]} \alpha_n G_n(x_t^n)\,\alpha_n^*\right) \leq K \\[2ex] E\left(\displaystyle\sup_{t\in[0,T]} \beta_n\left(X(t)+\alpha_n^{-1}V_t^n\right)\right) = E\left(\displaystyle\sup_{t\in[0,T]} \beta_n(x_u^n)\right) < \dfrac{K}{a_n^2} \end{cases}$$

d'où
$$\lim_n E\left(\sup_{t\in[0,T]} |C_t^n g(V_t^n)|\right) = 0$$

ce qui achève la démonstration de 5.2.7. et du théorème 5.

Remarquons que l'équation (5) possède une solution forte unique en trajectoire sur l'espace canonique. On peut donc énoncer le corollaire :

<u>Corollaire 5.1.</u>

La suite de processus de Markov $(V^n_{\cdot})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la diffusion $V^{x_0}_{\cdot}$ unique solution pour $\left(C, (C_{\cdot}), P, (\beta_{\cdot})\right)$ de l'équation :

$$V_t = V_0 + \int_0^t \left(H\left(X(s,x_0)\right)\right)^{1/2} d\beta_s + \int_0^t \left[A\left(X(s,x_0)\right)V_s + B\left(X(s,x_0)\right)\right] ds$$

et

$$V_t^{x_0} = \exp \Phi(t,x_0) \left[V_0 + \int_0^t \left(\exp - \Phi(s,x_0)\right) \left[H\left(X(s,x_0)\right)\right]^{1/2} d\beta_s + \int_0^t \exp - \Phi(s,x_0)\, B\left(X(s,x_0)\right) ds\right]$$

où $\Phi(t,x_0) = \int_0^t A\left(X(s,x_0)\right) ds$.

<u>Corollaire 5.3.</u>

Dans le cas particulier où $\alpha_n = \bar{\alpha}_n I$ avec $\bar{\alpha}_n \in \mathbb{R}$ et où F est une fonction lipschitzienne telle que :

$$\lim_n \sup_x \left\|\alpha_n\left(F_n(x) - F(x)\right)\right\| = 0$$

la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la loi Q^{x_o} unique solution du problème des martingales $(B_t^{x_o}\ (o,v_o))$ où

$$B_t^{x_o} = \frac{1}{2}\left(D^2 g.,\ H(X(t,x_o))\right) + \langle Dg.\ ,\ DF(X(t,x_o)).\ \rangle$$

Remarque 1 : Ceci est le résultat démontré par Kurtz [9] .

Remarque 2 : Dans le cas où α_n n'est pas inversible, on peut encore démontrer le résultat en supposant :

$$\lim_n \ \sup_{x \in C} \ \frac{1}{||\alpha_n||} \ ||\alpha_n \ DF(x) - A(x)\ \alpha_n|| = 0$$

pour tout compact C et $||DF\ (x)|| \leq K_1(1 + ||x||)$.

VI - APPENDICE : MAJORATIONS

6.1. Lemme de majoration pour un processus de Markov de saut pur

6.1.1. Hypothèses

$(x_t)_{t \in [0,T]}$ est un processus de Markov de saut pur défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ à valeurs dans un ouvert E de $\mathbb{R}^d$ dont le générateur infinitésimal A s'écrit pour toute fonction ϕ de $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$

$$A\phi\ (x) = \int \left[\phi(z) - \phi(x)\right] \nu\ (x,dz)$$

on suppose que

$$\int ||y - x|| \quad \nu(x,dz) < +\infty$$
$$\int ||y - x||^2 \ \nu(x,dz) < +\infty$$

on définit les fonctions F et G par :

$$F(x) = \int (z-x) \quad \nu(x,dz)$$
$$G(x) = \int (z-x)^{\otimes 2} \ \nu(x,dz)$$

alors $z_t = x_t - x_o - \int_o^t F(x_s)\ ds$ est une martingale de carré intégrable (Dynkin [3]).

Lemme 6.1.1.

Soit $(x_t)_{t \in [0,T]}$ un tel processus de Markov vérifiant de plus :

$\exists \kappa_1$ et κ_2 : $||F(x)|| \leq \kappa_1(1 + ||x||)$, $||G(x)|| \leq \kappa_2\ (1 + ||x||^2)$

alors pour chaque t il existe deux constantes $K_3(t)$ et $K_4(t)$ positives telles que :

$$E\left(\sup_{s \leq t} ||x_s||^2\right) \leq e^{2K_3(t)} \ [K_4(t)]^2$$

De plus $\sup_{t \in [0,T]} K_3(t) < +\infty$ et $\sup_{t \in [0,T]} K_4(t) < +\infty$

Démonstration

$$||x_t|| \leq ||z_t|| + ||x_o|| + \int_o^t ||F(x_s)||ds \leq ||z_t|| + ||x_o|| + \kappa_1 \int_o^t (1+||x_s||)ds$$

d'où

$$E(\sup_{s\leq t} ||x_s||^2) \leq 4 \left\{ E\left(\sup_{s\leq t} ||z_s||^2\right) + E\left(||x_o||^2\right) + 2\, t\kappa_1^2 \int_o^t \left[1 + E\left(\sup_{u\leq s} ||x_u||^2\right)\right] ds \right\}$$

mais $E\left(||z_t||^2\right) \leq \int_o^t E\left(\sup_{u\leq s} ||G(x_u)||\right) ds$

$$\leq \kappa_2 t + \kappa_2 \int_o^t E\left(\sup_{u\leq s} ||x_u||^2\right) ds$$

d'où

$$E\left(\sup_{s\leq t}||x_s||^2\right) \leq 4 \left\{\kappa_2 t + E\left(||x_o||^2\right) + 2\kappa_1^2\, t + \left(\kappa_2 + 2t\kappa_1^2\right)\int_o^t E\left(\sup_{u\leq s} ||x_u||^2\right) ds\right\}$$

en conséquence (inégalité de Gronvald)

$$E\left(\sup_{s\leq t} ||x_s||^2\right) \leq 4 \left\{\left(\kappa_2 t + 2\kappa_1^2 t\right) + E||x_o||^2\right\} e^{4(\kappa_2 + 2t\kappa_1^2)\, t}$$

soit
$$\begin{cases} K_3(t) = 2\, (\kappa_2 + 2t\kappa_1^2)\, t \\ \text{et } K_4^2(t) = 4\left(\kappa_2 t + 2\kappa_1^2 t + E\left(||x_o||^2\right)\right) \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Corollaire 6.1.1.

$$E\left(\sup_{s\leq t} ||z_s||^2\right) \leq \kappa_2 t \left(1 + [K_4(t)]^2 e^{2K_3(t)}\right)$$

$$E\left(\sup_{s\leq t} ||F(x_s)||\right) \leq \kappa_1 \left(1 + K_4(t)\, e^{K_3(t)}\right)$$

$$E\left(\sup_{s\leq t} ||G(x_s)||\right) \leq \kappa_2 \left(1 + [K_4(t)]^2 e^{2K_3(t)}\right)$$

si de plus : $||G(x)|| \leq \kappa_2 (1 + ||x||)$

alors : $E\left(\sup_{s\leq t} ||G(x_s)||^2\right) \leq 2\,\kappa_2^2 \left(1 + |K_4(t)|^2 e^{2K_3(t)}\right)$

Lemme 6.1.2.

On suppose que
$$\begin{cases} ||G(x)|| \leq \kappa_2\left(1 + ||x||^2\right) \\ \int ||z-x||^4\, \nu(x,dz) \leq \kappa_5\left(1 + ||x||^4\right) \end{cases}$$

alors il existe deux constantes K_8 et K_9 telles que pour tout $t \in [0,T]$

$$E\left(||G(x_t)||^2\right) \leq 2\,\kappa_2^2 \left(1 + K_8\, e^{K_9}\right)$$

Démonstration

$$||G(x)||^2 \leq 2\,\kappa_2^2 \left(1 + ||x||^4\right)$$

il suffit donc de majorer $E\left(||x_t||^4\right)$

or $E\left(||x_t||^4\right) = \int_o^t E\left[\int \left(||z||^4 - ||x_u||^4\right) \mu(x_u, dz)\right] du + E\left(||x_o||^4\right)$

comme $||z||^4 - ||x||^4 = 4||x||^2 < x, z-x > + ||x||^2 ||z-x||^2 + 2(< x,z-x >)^2$
$+ 4 < x,z-x > ||z-x||^2 + ||z-x||^4$

On a

$$\begin{aligned} E(||x_t||^4) = {} & 4 \int_o^t E\left[||x_u||^2 < x_u, \int (z-x_u)\, \nu(x_u,dz) >\right] du \\ & + \int_o^t E\left[||x_u||^2 \int ||z-x_u||^2\, \nu(x_u,dz)\right] du \\ & + 2 \int_o^t E\left[\left(x_u \otimes x_u\, ,\, \int (z-x_u) \otimes (z-x_u)\, \nu\, (x_u,dz)\right)\right] du \\ & + 4 \int_o^t E\left[< x_u\, ,\, \int (z-x_u)\, ||z-x_u||^2\, \nu\, (x_u,dz) > \right] du \\ & + \int_o^t E\left[\int ||z-x_u||^4\, \nu\, (x_u, dz)\right] du. + E\left(||x_o||^4\right) \end{aligned}$$

d'où

$$E(||x_t||^4) \leqslant 4 \left\{ \int_o^t E\Big(||x_u||^3 \ \kappa_1 (1 + ||x_u||) \ du \right.$$

$$+ \int_o^t E\Big(||x_u||^2 \ \kappa_2 (1 + ||x_u||^2) \ du$$

$$+ \int_o^t E\Big(||x_u|| \ \kappa_2^{1/2} (1 + ||x_u||^2)^{1/2} \ \kappa_5^{1/2} (1 + ||x_u||^4)^{1/2} \ du$$

$$\left. + \int_o^t E\Big(\kappa_5 \ (1 + ||x_u||^4) \ du \right\} + E\ \Big(||x_o||^4\Big)$$

Compte-tenu du fait que :

$$E\ (||x_u||^3) \leqslant \Big[E(||x_u||^2) \ E\ (||x_u||^4) \Big]^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} \Big[E(||x_u||^2) + E\ (||x_u||^4) \Big]$$

et que $\Big(1 + ||x_u||^2\Big) \ \Big(1 + ||x_u||^4\Big) \ \leqslant \ 4 \ \Big(1 + ||x||^3\Big)^2$

Il existe $K' = 2\ (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_5)$:

$$E\Big(||x_t||^4\Big) \leqslant K' \int_o^t \Big[E\ \Big(||x_u||^2\Big) + E\Big(||x_u||^4\Big) + 1 \Big] \ du + E\ \Big(||x_o||^4\Big)$$

mais d'après le lemme 6.1.1. $E\Big(||x_u||^2\Big) \leqslant K_4^2 \ (T) \ e^{2K_3(T)}$

d'où $E\Big(||x_t||^4\Big) \leqslant \Big[K'T\Big(1 + K_4^2 \ (T) \ e^{2K_3(T)}\Big) + E(||x_o||^4) \Big] \ e^{K'T}$

il en résulte que $E\ \Big(||x_t||^4\Big) \leqslant K_8 \ e^{K_9}$

$$\text{où} \quad \begin{cases} K_8 = K' \ T\Big(1 + K_4^2 \ (T) \ e^{2K_3(T)}\Big) \\ K_9 = K' \ T. \end{cases}$$

et $E\ \Big(||G(x_t)||^2\Big) \leqslant \ 2\ \kappa_2^2 \ \Big(1 + K_8 \ e^{K_9}\Big)$

Lemme 6.1.3.

Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon' < 1$, α matrice d x d inversible

alors :

$$P\Big(\operatorname*{Sup}_{|t-s|\leqslant\delta} ||\alpha(z_t - z_s)|| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{2T}{\Phi(\frac{2}{2})} \left[\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon} ||\alpha||^3 \operatorname*{Sup}_{u\leqslant T} E\Big(\beta_I'(x_u)\Big) . \operatorname*{Sup}_{u\leqslant T} \Big[E\Big([\beta_I'(x_u)]^2\Big) \Big]^{1/2} \right.$$

$$\left. + \varepsilon'^2 ||\alpha||^2 \operatorname*{Sup}_{u\leqslant T} E\Big(\beta_I'(x_u)\Big) + \operatorname*{Sup}_{u\leqslant T} E\ \Big(\beta_{\alpha,\varepsilon'}\ (x_u)\Big) \right]$$

où $\beta_\alpha'(x) = \int ||\alpha(z-x)||^2 \ \nu(x,dz)$

$$\beta_{\alpha,\varepsilon'}(x) = \int_{||\alpha(z-x)||>\varepsilon'} ||\alpha(z-x)||^2 \ (x,dz)$$

Démonstration

αz_t étant une martingale

$$P\Big(\operatorname*{Sup}_{t_1\leqslant t\leqslant t_2} ||\alpha(z_t - z_{t_1})|| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{\Phi(\varepsilon)} \ E\Big(\Phi(||\alpha(z_{t_2} - z_{t_1})||)\Big)$$

pour toute fonction convexe Φ .

D'autre part, pour toute subdivision $(t_i)_{i = 1 \ldots n}$ telle que

$\delta < t_{i+1} - t_i \leqslant 2\ \delta \quad i = 2, \ldots n-1, \quad t_n = T , \quad t_1 = 0$

on a

$$P\Big(\operatorname*{Sup}_{|t-s|<\delta} ||\alpha(z_t - z_s)|| > \varepsilon\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} P\Big(\operatorname*{Sup}_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}} ||\alpha\ (z_t - z_{t_i})|| > \varepsilon/3\Big)$$

Il suffit donc d'étudier

$$P\Big(\operatorname*{Sup}_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}} ||\alpha(z_t - z_{t_i})|| > \varepsilon\Big)$$

soit $\Phi(u) = \begin{cases} u^4 & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 4u - 3 & \text{si } u > 1 \end{cases}$

on a toujours $\Phi(u) \leqslant 2\ u^2$

$$P\Big(\operatorname*{Sup}_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}} ||\alpha(z_t - z_{t_i})|| > \varepsilon\Big) \leqslant$$

$$\frac{1}{\Phi(\varepsilon/2)} \int_{t_1}^{t_2} du\ E\left[\Big(\int ||\alpha(\omega - x_u)||^2 \ \nu(x_u, d\omega)\Big) . 1_{\Big(\operatorname*{Sup}_{t_1\leqslant s\leqslant t_2} ||\alpha(z_s - z_{t_i})|| > \varepsilon/2\Big)}\right]$$

$$+ \frac{1}{\Phi(\varepsilon/2)} \int_{t_1}^{t_2} du\ E\left[\Big(\int \Phi(||\alpha(\omega - x_u)||) \ \nu(x_u, d\omega)\Big) . 1_{\Big(\operatorname*{Sup}_{t_1\leqslant s\leqslant t_2} ||\alpha(z_s - z_{t_i})|| \leqslant \varepsilon/2\Big)}\right]$$

$$\leqslant I_1 + I_2$$

Etudions I_2

$$\int \Phi||\alpha(\omega- x_u)|| \ \nu(x_u,d\omega) = \int_{||\alpha\ (\omega- x_u)||<\varepsilon'} + \int_{||\alpha\ (\omega-x_u)||>\varepsilon'}$$

et pour $0<\varepsilon'<1$

$$\int_{||\alpha(\omega-x_u)||<\varepsilon'} \Phi||\alpha(\omega-x_u)||\nu(x_u,d\omega) \leq \int_{||\alpha(\omega-x_u)||<\varepsilon'} ||\alpha(\omega-x_u)||^4 \nu(x_u,d\omega) \leq \varepsilon'^2 \int ||\alpha(\omega-x_u)||^2\nu(x_u,d\omega)$$

$$= \varepsilon'^2 \ \beta'_\alpha(x_u)$$

$$\int_{||\alpha(\omega-x_u)||>\varepsilon'} \Phi||\alpha(\omega-x_u)||\nu(x_u,d\omega) \leq 2\int_{||\alpha(\omega-x_u)||>\varepsilon'} ||\alpha(\omega-x_u)||^2 \ \nu(x_u,d\omega) = 2\beta_{\alpha,\varepsilon'}(x_u)$$

d'où

$$I_2 \leq \frac{1}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\int_{t_1}^{t_2}\left[\varepsilon'^2 E(\beta'_\alpha(x_u)) + 2 E(\beta(x_u))\right] du$$

$$\leq \frac{2(t_2-t_1)}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\varepsilon'^2 \sup_{u\leq T} E(\beta'(x_u)) + \sup_{u\leq T} E(\beta_{\alpha,\varepsilon'}(x_u))\right]$$

$$\leq \frac{2(t_2-t_1)}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\varepsilon'^2||\alpha||^2 \sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u)) + \sup_{u\leq T} E(\beta_{\alpha,\varepsilon'}(x_u))\right]$$

Pour I_1

$$E\left[\int||\alpha(\omega-x_u)||^2 \ \nu(x_u,d\omega) \ 1_{\left(\sup\limits_{t_1\leq s\leq t_2}||\alpha(z_s- z_{t_1})|| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]$$

$$\leq\left\{E\left([\beta'_\alpha(x_u)]^2\right)\right\}^{1/2}\left\{P\left(\sup_{t_1\leq s\leq t_2}||\alpha(z_s- z_{t_1})|| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}^{1/2}$$

mais $P\left(\sup\limits_{t_1\leq s\leq t_2}||\alpha(z_s-z_{t_1})|| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2}||\alpha||^2 \int_{t_1}^{t_2} E(\beta'_I(x_u))\, du$

d'où

$$I_1 \leq \frac{1}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\int_{t_1}^{t_2}\left(E(|\beta'_\alpha(x_u)|^2)\right)^{1/2} du.\frac{2}{\varepsilon}||\alpha||\left[\int_{t_1}^{t_2} E(\beta'_I(x_u))du\right]^{1/2}$$

$$I_1 \leq \frac{1}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\frac{2}{\varepsilon}||\alpha||^3 \sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u)).\sup_{u\leq T}\left(E(\beta'_I(x_u)^2)\right)^{1/2}(t_2-t_1)^{3/2}$$

on en déduit que

$$P\left(\sup_{t_i\leq t\leq t_{i+1}}||\alpha(z_t- z_{t_1})|| > \varepsilon\right)$$

$$\leq (t_2-t_1)^{3/2}\frac{1}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\frac{2}{\varepsilon}||\alpha||^3 \sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u))\left(\sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u))^2\right)^{1/2}$$

$$+ (t_2-t_1)\frac{2}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\varepsilon'^2||\alpha||^2 \sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u)) + \sup_{u\leq T} E(\beta_{\alpha\varepsilon'}(x_u))\right]$$

d'où

$$P\left(\sup_{|t-s|<\delta}||\alpha(z_t-z_s)||> \varepsilon\right) \leq \delta^{1/2}\frac{2T}{\varepsilon\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}||\alpha||^3 \sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u))\sup_{u\leq T}\left(E(\beta'_I(x_u))^2\right)^{1/2}$$

$$+ \frac{2T}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\varepsilon'^2||\alpha||^2 \sup_{u\leq T} E(\beta'_I(x_u)) + \sup_{u\leq T} E(\beta_{\alpha\varepsilon'}(x_u))\right]$$

<u>Corollaire</u>

i) quand $||G(x)|| \leq K_2(1+||x||)$ la majoration devient :

$$P\left(\sup_{|t-s|\leq\delta}||\alpha(z_t-z_s)||>\varepsilon\right) \leq \frac{2T}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\frac{\delta^{1/2}}{\varepsilon}||\alpha||^3 \ 2K_2^2\left(1 + K_4 e^{K_3}\right)^2 + \varepsilon'^2||\alpha||^2 K_2\left(1 + K_4 e^{K_3}\right) + \sup_{u\leq T} E(\beta_{\alpha\varepsilon'}(x_u)).\right]$$

ii) quand $||G(x)|| \leq \kappa_2 (1 + ||x||^2)$

et $\int ||\omega - x||^4 \quad \nu(x,d\ ) \leq \kappa_5 \ (1 + ||x||^4)$

la majoration devient :

$$P\left(\sup_{|t-s| \leq \delta} ||\alpha(z_t - z_s)|| > \varepsilon\right) \leq \frac{2T}{\Phi(\frac{\varepsilon}{2})}\left[\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{1/2} ||\alpha||^3 \ 2\ \kappa_2^2 \ (1+K_4 e^{K_3}) \ (1+K_8 e^{K_9})^{1/2}\right.$$

$$+ \varepsilon'^2 ||\alpha||^2 \kappa_2 (1 + K_4^2 e^{2K_3})$$

$$\left. + \sup_{u \leq T} E\left(\beta_{\alpha\varepsilon'}(x_u)\right)\right]$$

Lemme 6.1.4.

$$\lim_n \ E\left(\sup_{u \leq T} ||\alpha_n G_n(x_u^n) \ \alpha_n^* - H(x_u^n)||\right) = 0$$

$$\lim_n \ E\left(\sup_{u \leq T} ||\ H\ (x_u^n) - H(X(u,x_o))||\right) = 0$$

Démonstration

Soit $\psi_n(u) = ||\alpha_n \ G_n(x_u^n) \ \alpha_n^* - H(x_u^n)||$

soit $A_n^\varepsilon = \{\omega : \sup_{u \leq T} ||x_u^n - X(u,x_o)|| \leq \varepsilon\}$

sur A_n^1 , on a $\sup_{u \leq T} ||x_u^n|| \leq 1 + \sup_{u \leq T} ||X(u,x_o)|| = K$

d'où

$$E\left(\sup_{u \leq t} \psi_n(u)\right) \leq \sup_{||x|| \leq K} ||\alpha_n \ G_n(x) \ \alpha_n^* - H(x)||$$

$$+ \int_{(A_n^1)^c} \sup_{u \leq t} ||\alpha_n \ G_n(x_u^n) \ \alpha_n^* - H(x_u^n)|| \ dP$$

$$\leq \sup_{||x|| \leq K} ||\alpha_n \ G_n(x) \ \alpha_n^* - H(x)||$$

$$+ \int_{(A_n^1)^c} \left(\sup_{u \leq t} ||\alpha_n \ G_n \ (x_u^n) \alpha_n^*|| + \sup_{u \leq t} ||H(x_u^n)||\right) dP$$

et d'après 3.4.1. , 3.4.2.

$$\begin{cases} E\ (\sup_{u \leq t} ||\alpha_n \ G_n(x_u^n) \ \alpha_n^*||^2) < + \infty \\ E\ (\sup_{u \leq t} ||\ H(x_u^n)||^2) < + \infty \end{cases}$$

d'où

$$E\ (\sup_{u \leq t} \ \psi_n(u)) \leq \sup_{||x|| \leq K} ||\alpha_n \ G_n(x) \ \alpha_n^* - H(x)||$$

$$+ \ K' \ \left(P(A_n^{1c})\right)^{1/2}$$

mais

$$P(A_n^{1\ c}) \leq \begin{cases} E\left(\sup_{u \leq T} ||x_u^n - X(u,x_o)||\right) = N^{-1}\left(N(\delta_n^1 + aT)\right) \\ E\left(\sup_{u \leq T} ||x_u^n - X(u,x_o)||^2\right) \leq \delta_n^2 \ e^{aT} \end{cases}$$

d'où $\lim_n \ E\left(\sup_{u \leq T} \ \psi_n(u)\right) = 0$

de même, en posant $\psi_n(u) = ||H(x_u^n) - H(X(u,x_o))||$

$$E\left(\sup_{u \leq t} \psi_n(u)\right) \leq \int_{A_n^\varepsilon} \sup_{u \leq t} ||H(x_u^n) - H(X(u,x_o))|| \ dP$$

$$+ \int_{(A_n^\varepsilon)^c} \left(\sup_{u \leq T} ||H(x_u^n)|| + \sup_{u \leq T} ||H(X(u,x_o))||\right) dP$$

H étant continue est uniformément continue sur tout compact, donc $\forall\ \varepsilon \ \exists\ \eta_\varepsilon \quad \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ x$:

$$||x - X(t,x_o)|| \leq \eta_\varepsilon \implies ||H(x) - H(X(t,x_o))|| \leq \varepsilon$$

d'où $\forall \varepsilon \qquad E\left(\sup_{u \leq t} \ \psi_n(u)\right) \leq \varepsilon \ + K \left|P\left((A_n^{\eta_\varepsilon})^c\right)\right|^{1/2}$

il en résulte que $\lim_n \ E\left(\sup_{u \leq t} \ \psi_n(u)\right) = 0$

VII - EXEMPLE

On suppose que x est un processus de branchement à 2 types de particules dont les transitions sont du type :

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 + k_1 - 1, x_2 + k_2) \qquad k_2 \geq 0, 1 < k_1 < K_1$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1 + k_1, x_2 + k_2 - 1) \qquad k_1 \geq 0, 1 < k_2 < K_2$$

$$(k_1, k_2) \neq C .$$

On suppose que $F(x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) F_o$

$G(x) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) G_o$

Dans cet exemple, l'extinction n'est pas possible et même, la population croît P.p.s.

soit alors $x_t^n = \frac{1}{n} x_t$ On a $F_n(x) = \frac{1}{n} F(nx) = F(x)$

$G_n(x) = \frac{1}{n^2} G(nx) = \frac{1}{n} G(x)$

soit $\alpha_n = \sqrt{n}\, I$ $\alpha_n G_n(x) \alpha_n^* = G(x)$

$\beta_n (x) = 0$ en prenant $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} K_o \left(K_o^2 = 2(K_1^2 + K_2^2)\right)$

Dans ce cas F et G sont lipschitziennes et

$$X(t,x_o) = e^{At} x_o \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot F_{o_1} & \lambda_2 \cdot F_{o_1} \\ \lambda_1 \cdot F_{o_2} & \lambda_2 \cdot F_{o_2} \end{bmatrix} = F_o \otimes \lambda$$

soient $W_t^n = \sqrt{n} \left(x_t^n - x_o^n - \int_o^t F_n(x_s^n)\, ds\right)$; $x_o^n = (a,b)$

$$\overline{W}_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(x_t - x_o^n - \int_o^t F(xs)\, ds\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(x_t - x_o^n - \int_o^t < \lambda, x_s > F_o\, ds\right); x_o^n = (na, nb)$$

$\overline{W}^n$ et W^n. ont même loi ; et par application du théorème 4, on en déduit que $\overline{W}^n$. converge en lois vers W. tel que

$$W_t = \int_o^t \left(< \lambda, e^{As} \binom{a}{b} > G_o\right)^{1/2} d\beta_s$$

Par application du deuxième théorème et en définissant

$$\overline{V}_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(x_t - n\, e^{At} \binom{a}{b}\right) , \quad x_o^n = (na, nb)$$

on voit que $\overline{V}^n$. a même loi que V^n. et converge donc en loi vers le processus de diffusion V. tel que

$$V_t = \int_o^t \left(<\lambda, e^{As} \binom{a}{b} > G_o\right)^{1/2} d\beta_s$$

$$+ \int_o^t < \lambda , V_s > F_o\, ds$$

-:-

ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE

I - INTRODUCTION

Dans cette deuxième partie, on étudie la vitesse de convergence des fonctions de répartition des variables aléatoires $<\theta, V_t^n>$ où θ est élément de $\mathbb{R}^d$, et $(V_\cdot^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de processus définis dans le théorème 5 de la première partie. Plus précisément, on donne une majoration de la différence :

$$\left| P\left(< \theta, V_t^n> \leqslant x\right) - P\left(<\theta, V_t> \leqslant x\right)\right|$$

A. BARBOUR [2] a étudié cette vitesse de convergence dans le cas particulier d'un processus de branchement admettant un nombre fini de transition.

Le plan est le suivant :

II - HYPOTHESES ET NOTATIONS

Outre les hypothèses et notations du paragraphe II de la première partie, nous introduisons les hypothèses et notations suivantes :

On note E_1 l'équation : $\dfrac{\partial X_t}{\partial t} = F(X_t)$

2.0. - Définition

On définit l'application Ψ sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ par :

$$\Psi(t) = e^{-\int_0^t A(X_s)ds} \; \Psi(o)$$

ψ est continue et $\sup\limits_{t \in [0,T]} ||\psi(t)|| = M < +\infty$

De plus Ψ vérifie l'équation

$$E_2 : \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) + \Psi(t)\, A(X_t) = 0$$

2.1. - Transformation de V.

Rappelons que V. est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$V_t = V_o + \int_0^t \left[H(X_s)\right]^{1/2} d\beta_s + \int_0^t \left[A(X_s)V_s + B(X_s)\right] ds$$

on définit le processus R. par :

$$R_t = \Psi(t)\, V_t - \int_0^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds$$

$(R_t)_{t \in [0,T]}$ est alors une diffusion de générateur $\mathcal{R}.$ tel que, pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{R}_t g\ (r) = \frac{1}{2}\left(D^2 g(s),\ \Psi(s)\ H(X_s)\ \Psi^*(s)\right)$$

Démonstration

soit $\Phi(t,x) = \Psi(t)\, x - \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds$

on a $R_t = \Phi(t,V_t)$ d'où, par application de la formule de Ito :

$$\begin{aligned}
R_t - R_o &= \Phi(t,V_t) - \Phi(o,V_o) \\
&= \int_o^t D_{01}\, \Phi(s,V_s)\, [H(X_s)]^{1/2} d\beta_s \\
&+ \int_o^t D_{01}\, \Phi(s,V_s)\, A(X_s)\, V_s\, ds \\
&+ \int_o^t D_{01}\, \Phi(s,V_s)\, B(X_s)\, ds \\
&+ \int_o^t D_{10}\, \Phi(s,V_s)\, ds \\
&= \int_o^t \Psi(s)\, [H(X_s)]^{1/2} d\beta_s \\
&+ \int_o^t \Psi(s)\, A(X_s)\, V_s\, ds + \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds \\
&- \int_o^t \Psi(s)\, A(X_s)\, V_s\, ds - \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds \\
&= \int_o^t \Psi(s)\, [H(X_s)]^{1/2}\, d\beta_s\, .
\end{aligned}$$

2.2. - Corollaire

La fonction caractéristique de R_t est :

$$\phi_t(\theta) = \phi_o(\theta)\, e^{-1/2 \left(\theta \otimes \theta\, ,\, \int_o^t \Psi(s)\, H(X_s)\, \Psi^*(s)\, ds\right)}$$

Démonstration

On pose $g(r) = e^{i\langle\theta, r\rangle}$

Par définition du générateur infinitésimal et application à cette fonction g, on a :

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\theta) = \frac{d}{dt} E\big(g(R_t) - g(R_o)\big) = E\big(\mathcal{R}_t\, g(R_t)\big)$$

$$E_3 : \quad \frac{d}{dt}\phi_t(\theta) = -\frac{1}{2}\phi_t(\theta)\, \big(\theta \times \theta\, ,\, \Psi(t)\, H(X_t)\, \Psi^*(t)\big)$$

il en résulte que

$$\begin{cases} \phi_t(\theta) = \phi_o(\theta)\, e^{-1/2 \left(\theta \otimes \theta, \int_o^t \Psi(s)\, H(X_s)\, \Psi^*(s)\, ds\right)} \\ \phi_o(\theta) = e^{i\langle\theta, R_o\rangle} \qquad \text{où } R_o = \Psi(o)\, V_o \end{cases}$$

pour toute la suite, on suppose que $\Psi(o) = Id$ et on définit $\sigma(s)$ par :

$$\sigma^2(s) = \Psi(s)\, H(X_s)\, \Psi^*(s)$$

$$\text{et } \Sigma^2(t) \text{ par } \quad \Sigma^2(t) = \int_o^t \sigma^2(s)\, ds$$

2.3. - Transformation de V^n.

On définit R_t^n par :

$$R_t^n = \Phi(t,V_t^n) = \Psi(t)\, V_t^n - \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds$$

$(R_t^n)_{t \in [O,T]}$ est un processus de Markov. On détermine aisément son générateur infinitésimal $\mathcal{R}^n$ en écrivant :

$$R_t^n = \Psi(t)\, \alpha_n\big(x_t^n - X(t,x_o)\big) - \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds$$

soit $\Gamma_n(x,t) = \Psi(t)\, \alpha_n\big(x - X(t,x_o)\big) - \int_o^t \Psi(s)\, B(s)\, ds$

alors $$\mathcal{R}_t^n\, g(r) = \lambda_n\big(\gamma_n(r,t)\big) \int g\big(\Gamma_n(z,t)\big) - g(r)\quad \mu^n\big(\gamma_n(r,t), dz\big)$$
$$- \langle D_g(r),\, \Psi(t)\, \big[A(X_t)\, \gamma'(r,t) + \alpha_n F(X_t) + B(X_t)\big] \rangle$$

où $\gamma_n(r,t) = \alpha_n^{-1}\, \Psi^{-1}(t)\big(r + \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds\big) + X(t,x_o)\big)$

$\gamma'(r,t) = \Psi^{-1}(t)\, \big(r + \int_o^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds\big)$

on en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t^n(\theta) = E\left[\lambda_n(\gamma_n(R_t^n,t)) \int \left(e^{i\langle\theta, \Gamma_n(z,t)\rangle} - e^{i\langle\theta, R_t^n\rangle}\right)\mu^n\big(\gamma_n(R_t^n,t), dz\big)\right]$$
$$- i.E\left[\langle \theta\, e^{i\langle\theta, R_t^n\rangle},\, \Psi(t)\, A(X_t)\, V_t^n + \Psi(t)\alpha_n F(X_t) + \Psi(t) B(X_t) \rangle\right]$$

$$E_4 \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi_t^n(\theta) = E\left[\lambda_n(x_t^n) \int \left(e^{i\langle\theta,\, \Psi(t)\, \alpha_n(z - x_t^n)\rangle} - 1\right)\mu^n(x_t^n, dz)\, e^{i\langle\theta, R_t^n\rangle}\right] \\ \qquad - i\, E\left[\langle\theta, \Psi(t) A(X_t) V_t^n + \Psi(t)\alpha_n F(X_t) + \Psi(t) B(X_t)\rangle\, e^{i\langle\theta, R_t^n\rangle}\right] \end{cases}$$

III - ETUDE DE LA VITESSE DE CONVERGENCE

Dans ce paragraphe, nous allons comparer $\phi_t^n(\theta)$ et $\phi_t(\theta)$ et en déduire une majoration pour la différence des fonctions de répartition de R_t^n et R_t.

Nous commençons par donner une majoration de $|\phi_t^n(\theta) - \phi_t(\theta)|$ dans le cas où $\mu^n(x,x+\Gamma) \equiv \nu^n(\Gamma)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$; ensuite nous donnerons une majoration moins précise mais valable dans un cadre plus général.

Proposition 3.1.

Hypothèses

- On se place sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 5 de la 1ère partie
- On suppose, de plus, qu'il existe une constante σ_o^2 strictement positive telle que :

$$< \sigma^2(t)\, x,x > \geq \sigma_o^2 < x,x > \quad \forall\, t \in [0,T] \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d$$

- On suppose également qu'il existe pour tout n une probabilité ν^n telle que $\mu^n(x,x+\Gamma) = \nu^n(\Gamma) \qquad \forall\, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

alors il existe une constante K et N_o tels que

$$\forall n \geq N_o \quad \text{et} \quad ||\theta|| \leq \frac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n K}$$

$$|\phi_t(\theta) - \phi_t^n(\theta)| \leq 4\,\frac{d_n(\theta)}{||\theta||^2\sigma_o^2}\left[1 - e^{-1/4\left(\theta\otimes\theta,\ \Sigma^2(t)\right)}\right] + T.K.\left[\frac{||\theta||^2}{a_n^2} + ||\theta||^3\varepsilon_n + ||\theta||\frac{f_n}{TK}\right] e^{-1/4\left(\theta\otimes\theta,\Sigma^2(t)\right)}$$

où $d_n(\theta) = ||\theta||\, M\,(d_1^n + d_2^n) + ||\theta||^2 M^2\,(d_3^n + d_4^n + c_1^n) + ||\theta||^3 M^3\, c_2^n\, \varepsilon_n$

$$d_1^n = \sup_{t\in[0,T]} E\Big(||\alpha_n\,[F_n(x_t^n) - F(x_t^n)] - B(x_t^n)||\Big) + \sup_{t\in[0,T]}\Big(||B(x_t^n) - B(X_t)||\Big)$$

$$d_2^n = ||\alpha_n|| \sup_{t\in[0,T]}\Big\{E\Big(||F(x_t^n) - F(X_t) - DF(X_t)\,(x_t^n - X_t)||\Big] + ||\alpha_n DF(X_t)\,\alpha_n^{-1} - A(X_t)||\;\; E(||x_t^n - X_t||)\Big)\Big\}$$

$$d_3^n = \sup_{t\in[0,T]} E\Big(||\alpha_n\, G_n\,(x_t^n)\,\alpha_n^* - H(x_t^n)||\Big)$$

$$d_4^n = \sup_{t\in[0,T]} E\Big(||H(x_t^n) - H(X_t)||\Big)$$

$$c_1^n = 3\,\frac{K_2}{a_n^2}\Big(1 + E\Big(\sup_{t\in[0,T]} ||x_t^n - X_t||^2\Big) + C^2\Big)$$

$$c_2^n = d_3^n + d_4^n + \sup_{t\in[0,T]} ||H(X_t) - \alpha_n G_n(X_t)\,\alpha_n^*||$$

$$f_n = E\Big(||\alpha_n(x_o^n - x_o) - V_o||\Big)$$

$$C = \sup_{t\in[0,T]} ||X_t||$$

$$M = \sup_{t\in[0,T]} ||\Psi(t)|| \qquad M_1 = \sup_{t\in[0,T]} ||H\big(X_{(t)}\big)|| + 1$$

N_o est tel que $\forall\, n \geq N_o$

$$\sup_{t\in[0,T]} ||\alpha_n\, G_n(X_t)\,\alpha_n - H(X_t)|| \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{K}{a_n^2} \leq \frac{1}{8}\,\sigma_o^2$$

$$K = \left(M^3\, M_1 V K_2 M^2 (C^2 + 1)\right)$$

Démonstration

On a donc $E_3 : \frac{d}{dt}\phi_t(\theta) = -\frac{1}{2}\phi_t(\theta)\,\left(\theta\otimes\theta\,,\,\sigma^2(t)\right)$

Réécrivons E_4

$$\frac{d}{dt}\phi_t^n(\theta) = C^n(t,\theta) + \lambda_n(X_t)\int \Phi\big(\theta,\ \Psi(t)\alpha_n(z-X_t)\big)\mu^n(X_t,dz)\ \phi_t^n(\theta) + i\,E\left[e^{i<\theta\,,R_t^n>},\ <\theta,\ \Psi(t)\left[\alpha_n\big(F_n(x_t^n) - F(x_t^n)\big)\right] - B(x_t^n)>\right]$$

$$+ i\, E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}<\theta,\ \Psi(t)\left[\alpha_n\left(F(x_t^n)-F(X_t)\right)-A(X_t)\alpha_n(x_t^n-X_t)\right]\right]$$

$$-\frac{1}{2}E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}\left(\theta\otimes\theta,\ \Psi(t)\left(\alpha_n G_n(x_t^n)\alpha_n^* - H(x_t^n)\right)\Psi^*(t)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}\left(\theta\otimes\theta,\ \Psi(t)\ \left(H(x_t^n)-H(X_t)\right)\ \Psi^*(t)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\ \phi_t^n(\theta)\ \left(\theta\otimes\theta\ ,\ \sigma^2(t)\right)$$

où $\Phi(\theta,z) = e^{i<\theta\ ,z>}-1 - i<\theta,z> + \frac{1}{2}\left(\theta\otimes\theta\ ,\ z\otimes z\right)$

$$C^n(t,\theta) = E\left[e^{i<\theta\ ,\ R_t^n>}\left[\lambda_n(x_t^n)\int\Phi\left(\theta,\ \psi(t)\alpha_n(z-x_t^n)\right)\mu^n(x_t^n,\ dz)\right.\right.$$
$$\left.\left. -\lambda_n(X_t)\int\Phi\left(\theta,\ \psi(t)\ \alpha_n(z-X_t)\right)\mu^n(X_t,dz)\right]\right]$$
$$= E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}\left[\left(\lambda_n(x_t^n)-\lambda_n(X_t)\right)\int\Phi\left(\theta,\ \Psi(t)\alpha_n z\right)\ \nu^n(dz)\right]\right]$$

Enfin écrivons avec des notations évidentes :

$$\begin{cases} D^n(t,\theta) = C^n(t,\theta) + \sum_{j=1}^{4} D_j^n(t,\theta) \\ E_4' :\ \dfrac{\partial}{\partial t}\ \phi_t^n(\theta) = D^n(t,\theta) + \phi_t^n(\theta)\ I_n(t,\theta) \end{cases}$$

où $I_n(t,\theta) = -\frac{1}{2}\left(\theta\otimes\theta,\sigma^2(t)\right) + \lambda_n(X_t)\int\Phi\left(\theta,\ \psi(t)\ \alpha_n\ z\right)\ \nu^n(dz)$

on a alors, en résolvant E_4'

3.1.1. $\phi_t^n(\theta) = e^{\int_0^t I_n(s,\theta)ds}\left[\int_0^t D_n(s,\theta)e^{-\int_0^s I_n(u,\theta)\,du}ds + \phi_0^n(\theta)\right]$

et $\phi_0^n(\theta) = e^{i<\theta,\ \psi(0)\alpha_n(x_0^n-X_0)>}$

Nous allons maintenant majorer $D_n(t,\theta)$

3.1.2. pour $D_n^1(t,\theta) = i\, E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}<\theta,\ \Psi(t)\left[\alpha_n\left(F_n(x_t^n)-F(x_t^n)\right)-B(x_t^n)\right]>\right]$

on a $|D_n^1(t,\theta)| \leq \ ||\theta||\cdot M\, E\left[||\alpha_n\left(F_n(x_t^n)-F(x_t^n)\right)-B(x_t^n)||+||B(x_t^n)-B(X_t)||\right]$

soit $d_n^1 = \sup_{t\in[0,T]}\left\{E\left[||\alpha_n\left(F_n(x_t^n)-F(x_t^n)\right)-B(x_t^n)||\right]+E\left(||B(x_t^n)-B(X_t)||\right)\right\}$

3.1.3. Pour $D_n^2(t,\theta) = i\, E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}<\theta,\Psi(t)\left[\alpha_n\left(F(x_t^n)-F(X_t)\right)-A(X_t)\alpha_n(x_t^n-X_t)\right]>\right]$

on a

$$|D_n^2(t,\theta)| \leq ||\theta||.M.\left\{E\left[||\alpha_n\left[F(x_t^n)-F(X_t)-DF(X_t)(x_t^n-X_t)\right]||\right]\right.$$
$$\left. + E\left[||\alpha_n DF(X_t)-A(X_t)\ \alpha_n||\cdot||x_t^n-X_t||\right]\right\}$$
$$\leq ||\theta||.M.||\alpha_n||\left\{E\left[||F(x_t^n)-F(X_t)-DF(X_t)(x_t^n-X_t)||\right]\right.$$
$$\left. +||\alpha_n\ DF(X_t)\ \alpha_n^{-1}-A(X_t)||\,E\left(||x_t^n-X_t||\right)\right\}$$

soit

$$d_n^2 = ||\alpha_n||\sup_{t\in[0,T]}\left\{E\left[||F(x_t^n)-F(X_t)-DF(X_t)\ (x_t^n-X_t)||\right]\right.$$
$$\left. +||\alpha_n\ DF(X_t)\ \alpha_n^{-1}-A(X_t)||.\ E\left(||x_t^n-X_t||\right)\right\}$$

3.1.4. Pour $D_n^3(t,\theta) = -\frac{1}{2}E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}\left(\theta\otimes\theta,\Psi(t)\left[\alpha_n G_n(x_t^n)\alpha_n^*-H(x_t^n)\right]\Psi^*(t)\right)\right]$

on a

$|D_n^3(t,\theta)| \leq ||\theta||^2.\ M^2.\ \sup_{t\in[0,T]} E\left(||\alpha_n G_n(x_t^n)\alpha_n^*-H(x_t^n)||\right)$

soit $d_n^3 = \sup_{t\in[0,T]} E\left(||\alpha_n G_n(x_t^n)\ \alpha_n^*-H(x_t^n)||\right)$

3.1.5. Pour $D_n^4(t,\theta) = -\frac{1}{2}E\left[e^{i<\theta,R_t^n>}\left(\theta\otimes\theta,\Psi(t)\ \left[H(x_t^n)-H(X_t)\right]\ \Psi^*(t)\right)\right]$

on a

$|D_n^4(t,\theta)| \leq ||\theta||^2.\ M^2.\ \sup_{t\in[0,T]} E\left(||H(x_t^n)-H(X_t)||\right)$

soit $d_n^4 = \sup_{t\in[0,T]} E\left(||H(x_t^n)-H(X_t)||\right)$

Enfin

3.1.6. $|C^n(t,\theta)| \leq E\left[|\lambda_n(x_t^n)-\lambda_n(X_t)|\ \int|\Phi(\theta,\Psi(t)\alpha_n z)|\ \nu^n(dz)\right]$

Or $\quad \operatorname{Sup}_{\theta\, z} \dfrac{|\Phi(\theta,z)|}{\|\theta\|^2\,\|z\|^2} \leqslant 1 \quad$ et $\quad \operatorname{Sup}_{\theta\, z} \dfrac{|\Phi(\theta,z)|}{\|\theta\|^3\,\|z\|^3} \leqslant 1$

En conséquence

$$
\begin{aligned}
|C^n(t,\theta)| \leqslant\ & M^2\,\|\theta\|^2\ E\Big[\lambda_n(X_t^n)\int_{\|\alpha_n z\|>\varepsilon_n}\|\alpha_n z\|^2\,\nu^n(dz)\Big] \\
& + M^2\|\theta\|^2\ E\Big[\lambda_n(X_t)\int_{\|\alpha_n z\|>\varepsilon_n}\|\alpha_n z\|^2\,\nu^n(dz)\Big] \\
& + M^3\|\theta\|^3\,\varepsilon_n\,E\Big[|\lambda_n(X_t^n)-\lambda_n(X_t)|\int_{\|\alpha_n z\|\leqslant\varepsilon_n}\|\alpha_n z\|^2\,\nu^n\,(dz)\Big] \\
\leqslant\ & 3K_2\,\frac{M^2}{a_n^2}\|\theta\|^2\Big(1+E\big(\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|x_t^n\|^2\big)+\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|x_t\|^2\Big) \\
& + M^3\|\theta\|^3\,\varepsilon_n\,E\Big(\|\alpha_n G_n(x_t^n)\,\alpha_n^* - \alpha_n G_n(X_t)\,\alpha_n^*\|\Big) \\
\leqslant\ & M^2\|\theta\|^2\,c_n^1 + M^3\,\|\theta\|^3\,\varepsilon_n\,c_n^2
\end{aligned}
$$

où $c_n^1 = \dfrac{3K_2}{a_n^2}\Big(1 + E\big(\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|x_t^n - x_t\|^2\big) + \operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|x_t\|^2\Big)$

$$c_n^2 = \Big(d_n^3 + d_n^4 + \operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|\alpha_n G_n(X_t)\,\alpha_n^* - H(X_t)\|\Big)$$

en conséquence :

<u>3.1.7.</u> $\displaystyle \operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}|D_n(t,\theta)| \leqslant \|\theta\|\,M(d_n^1+d_n^2) + \|\theta\|^2\,M^2(d_n^3+d_n^4+c_n^1) + \|\theta\|^3\,\varepsilon_n\,M^3\,c_n^2 = d_n(\theta)$

soit maintenant

<u>3.1.8.</u> $\phi_n^*(t,\theta) = \phi_o^n(\theta)\ \exp\int_o^t I_n(s,\theta)\,ds$ et définissons $\Delta_n(t,\theta)$ par :

$$\Delta_n(t,\theta) = \phi^n(t,\theta) - \phi_n^*(t,\theta) = \int_o^t D_n(s,\theta)\,e^{\int_s^t I_n(u,\theta)\,du}\,ds$$

<u>Majoration de $\Delta_n(t\,,\,\theta)$</u>

on a $\quad I_n(u,\theta) = -\frac{1}{2}\big(\theta\otimes\theta,\,\sigma^2(u)\big) + \lambda_n(X_u)\int\Phi\big(\theta,\,\Psi(u)\,\alpha_n z\big)\,\nu^n(dz)$

$$
\begin{aligned}
\text{et } \Big|\lambda_n(X_u)\int\Phi\big(\theta,\,\Psi(u)\,\alpha_n z\big)\,\nu^n(dz)\Big| \leqslant\ & M^2\|\theta\|^2\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|\beta_n(X_t)\| \\
& + M^3\|\theta\|^3\,\varepsilon_n\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|\alpha_n G_n(X_t)\,\alpha_n^*\|
\end{aligned}
$$

soit $M_1 = \operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|H(X_t)\| + 1$ alors il existe n_o tel que pour tout $n \geqslant n_o$

$$\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|\alpha_n\,G_n(X_t)\,\alpha_n^*\| \leqslant M_1$$

d'autre part

$$\operatorname{Sup}_{t\in[0,t]}\|\beta_n\,(X_t)\| \leqslant \frac{K_2}{a_n^2}\Big(1+\operatorname{Sup}_{t\in[0,T]}\|X_t\|^2\Big) \leqslant \frac{(C^2+1)\,K_2}{a_n^2}$$

d'où $\Big|\lambda_n(X_n)\int\Phi(\theta,\,(u)\,\alpha_n z)\,\nu^n(dz)\Big|$

$$\leqslant M^2\|\theta\|^2\Big(\frac{C^2+1}{a_n^2}\Big) + M^3\|\theta\|^3\,\varepsilon_n\,M_1 \leqslant K\Big(\frac{\|\theta\|^2}{a_n^2} + \varepsilon_n\|\theta\|^3\Big)$$

dès que $n \geqslant n_o$ $\quad$ où $K = \big(M^3\,M_1 \vee M^2 K_2(C^2+1)\big)$

alors

$$|\Delta_n(t,\theta)| \leqslant d_n(\theta)\int_o^t e^{-\frac{1}{2}\left(\theta\otimes\theta,\,\Sigma^2(t)-\Sigma^2(s)\right)}\,\big|e^{J_n(t,\theta)-J_n(s,\theta)}\big|\,ds$$

en écrivant $\quad J_n(t,\theta) = \int_o^t \lambda_n(X_u)\int\Phi\,\big(\theta,\,\Psi(u)\,\alpha_n z\big)\,\nu^n(dz)\,du$

et $\quad \big|e^{J_n(t,\theta)-J_n(s,\theta)}\big| \leqslant e^{|J_n(t,\theta)-J_n(s,\theta)|} \leqslant e^{K\left(\|\theta\|^2\frac{1}{a_n^2}+\|\theta\|^3\varepsilon_n\right)(t-s)}$

d'où

<u>3.1.9.</u> $\displaystyle |\Delta_n(t,\theta)| \leqslant d_n(\theta)\int_o^t e^{-\frac{1}{2}\left(\theta\otimes\theta,\,\Sigma^2(t)-\Sigma^2(s)\right)+\left(K\frac{\|\theta\|}{a_n^2}+\|\theta\|^3\varepsilon_n K\right)(t-s)}\,ds$

Remarquons que $\quad \big(\theta\otimes\theta,\,\sigma^2(u)\big) \geqslant \|\theta\|^2\,\sigma_o^2$

d'où en intégrant entre s et t $\left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right) \geq ||\theta||^2\ \sigma_o^2\ (t-s)$

d'autre part, on sait que $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{a_n^2} = 0$

soit n_1 tel que : $\forall n \geq n_1 \vee n_o$ $\dfrac{K}{a_n^2} \leq \dfrac{1}{8}\ \sigma_o^2$

alors $\dfrac{K}{a_n^2}\ ||\theta||^2 (t-s) \leq \dfrac{1}{8} \left(\theta \otimes \theta\ ,\ \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right)$

et pour $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n K}$

$$||\theta||^3\ \varepsilon_n K(t-s) \leq ||\theta||\ \sigma_o^2\ (t-s) \leq \frac{1}{8} \left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right)$$

en conséquence,

$$|\Delta_n(t,\theta)| \leq d_n(\theta) \int_o^t e^{-\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right)}\ ds$$

dès que $n \geq n_1 \vee n_o$ et $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\ \varepsilon_n K}$

compte-tenu du fait que

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta, \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right)}\right) = \frac{1}{4}\left(\theta \times \theta, \sigma^2(s)\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\theta \otimes \theta, \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right)}$$
$$\geq \frac{1}{4}\ ||\theta||^2 \sigma_o^2\ e^{-\frac{1}{2}\left(\theta \otimes \theta, \Sigma^2(t) - \Sigma^2(s)\right)}$$

on a

<u>3.1.10.</u> $|\Delta_n(t,\theta)| \leq 4 \dfrac{d_n(\theta)}{||\theta||^2 \sigma_o^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t)\right)}\right)$ pour $n \geq n_o \vee n_1 = N_o$

et $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n K}$

<u>3.1.11.</u> Soit maintenant

$$\Delta_n'(t,\theta) = \phi_n^*(t,\theta) - \phi_t(\theta) = \exp - \frac{1}{2}\left(\theta \otimes \theta, \Sigma^2(t)\right)\left[\phi_o^n(\theta)\ \exp J_n(t,\theta) - \phi_o(\theta)\right]$$

on a :

$$|\Delta_n'(t,\theta)| \leq \exp - \frac{1}{2}\left(\theta \otimes \theta, \Sigma^2(t)\right)\left[|\exp J_n(t,\theta) - 1| + |\phi_o^n(\theta) - \phi_o(\theta)|\right]$$

or $|\phi_o^n(\theta) - \phi_o(\theta)| \leq E\left(||\alpha_n(x_o^n - x_o) - V_o||\right) ||\theta|| = ||\theta|| f_n$

et $|\exp J_n(t,\theta) - 1| \leq |J_n(t,\theta)|\ e^{|J_n(t,\theta)|}$

et d'après ce qui précède

$$|\exp J_n(t,\theta) - 1| \leq T\left(K.||\theta||^2 \frac{1}{a_n^2} + ||\theta||^3\ \varepsilon_n K\right)\ e^{\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t)\right)}$$

dès que $n \geq n_o \vee n_1$ et pour θ tel que $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n K}$

d'où

<u>3.1.12.</u> $|\Delta_n'(t,\theta)| \leq \exp^{-\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t)\right)} . \left(T.K\left(\dfrac{||\theta||^2}{a_n^2} + ||\theta||^3 \varepsilon_n K\right) + ||\theta||\ f_n\right)$

dès que $n \geq n_o \vee n_1 = N_o$ et pour θ tel que : $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n K}$

de 3.1.8. à 3.1.12. on déduit qu'il existe un rang N_o tel que pour tout $n \geq N_o$

$$|\phi_t^n(\theta) - \phi_t(\theta)| \leq |\Delta_n(t,\theta)| + |\Delta_n'(t,\theta)|$$
$$\leq \frac{4\ d_n(\theta)}{||\theta||^2 \sigma_o^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta,\ \Sigma^2(t)\right)}\right)$$
$$+ \left[(T.K)\left(\frac{||\theta||^2}{a_n^2} + ||\theta||^3 \varepsilon_n\right) + ||\theta|| f_n\right] e^{-\frac{1}{4}\left(\theta \otimes \theta, \Sigma^2(t)\right)}$$

dès que $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n\ K}$

La proposition suivante se trouve dans le livre de Chung [5] ; elle permet de déduire dans le cas unidimensionnel une majoration de la différence des fonctions de répartitions lorsqu'on connaît une majoration de la différence des fonctions caractéristiques.

3.2. - Proposition

Hypothèses
$$\left\{\begin{array}{l} F \text{ et } G \text{ sont deux fonctions de répartitions de V.A. réelles} \\ \text{telles que } \dfrac{dG(x)}{dx} \text{ est bornée par } C \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - G(x)|\, dx < +\infty \end{array}\right.$$

Notations
$$f(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x}\, dF(x) \;;\; g^{(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x}\, dG(x)$$

$$\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

alors
$$\Delta \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{|f(\theta) - g(\theta)|}{\theta}\, d\theta + \frac{24C}{\pi\theta} \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}_+$$

remarquons que l'hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - G(x)|\, dx < +\infty$ est satisfaite dès que les moments d'ordre 2 existent

3.3. - Définition

Pour chaque $t \in [0,T]$ et chaque $\ell \in \mathbb{R}^d$ on définit

$$R^n_{t,\ell} = \langle \ell, R^n_t \rangle \quad \text{et} \quad R_{t,\ell} = \langle \ell, R_t \rangle$$

soient $\phi^n_{t,\ell}$ et $\phi_{t,\ell}$ leurs fonctions caractéristiques respectives.

3.4. - Propriété

3.4.1. $R_{t,\ell}$ suit une loi $\mathcal{N}\left(\langle \ell, R_0\rangle, (\ell \otimes \ell, \Sigma^2_t)\right)$

3.4.2.
$$\left\{\begin{array}{l} \phi_{t,\ell}(\theta) = \phi_t(\theta\ell) = e^{-\frac{1}{2}\theta^2(\ell\otimes\ell,\, \Sigma^2_t)}\, \phi_0(\theta) \\ \phi^n_{t,\ell}(\theta) = \phi^n_t(\theta\ell) \end{array}\right.$$

3.4.3.
$$|\phi^n_{t,\ell}(\theta) - \phi_{t,\ell}(\theta)| \leq \frac{4\, d_n(\ell\theta)}{\theta^2 ||\ell||^2 \sigma_0^2} \left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{4}(\ell\otimes\ell,\, \Sigma^2(t))}\right)$$

$$+ \left[TK\left(\frac{\theta^2 ||\ell||^2}{\theta^2} + ||\ell||^3 |\theta|^3 \varepsilon_n\right) + ||\ell||\, |\theta|\, \varepsilon_n \right] e^{-\frac{\theta^2}{4}(\ell\otimes\ell,\, \Sigma^2(t))}$$

3.5. - Proposition

Hypothèses

On suppose qu'il existe deux polynômes p^n et q^n tels que
$$p^n(\theta) = \sum_{i=1}^{3} p^n_i ||\theta||^i, \quad q^n(\theta) = \sum_{i=1}^{3} q^n_i ||\theta||^i$$
et qu'il existe N_0 et γ^n tels que $\lim_n \gamma^n = 0$

et tels que
$$|\phi^n_t(\theta) - \phi_t(\theta)| \leq \frac{4p^n(\theta)}{||\theta||^2 \sigma_0^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{4}(\theta\otimes\theta,\, \Sigma^2(t))}\right. + TK\, q^n(\theta)\, \left. e^{-\frac{1}{4}(\theta\otimes\theta,\, \Sigma^2(t))}\right)$$
pour $n \geq N_0$ et $||\theta|| \leq \dfrac{\sigma_0^2}{8K\gamma^n}$

alors
$$\sup_x \left| P\left(\langle \ell, V^n_t\rangle \leq x\right) - P\left(\langle \ell, V_t\rangle \leq x\right)\right| \leq$$
$$\frac{8}{\pi\sigma_0^2}\left[p^n_1 \left[\frac{\sigma_1^2 t}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t\right) + 1\right] + \frac{1}{2} p^n_2\, \sigma_1^2 t + p^n_2 \log\theta + p^n_3 \theta\right]$$
$$+ 2\frac{TK}{\pi}\left[\frac{q^n_1}{TK}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_0 t}} + q^n_2 \frac{2}{\sigma_0^2 t} + q^n_3 \frac{2\sqrt{\pi}}{(\sigma_0^2 t)^{3/2}}\right]$$
$$+ \frac{24}{\pi\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma_0^2 t}} \quad \text{pour } n \geq N_0,\ 0 < \theta \leq \frac{\sigma_0^2}{8K\gamma^n} \quad \sigma_1^2 = \sup_{s\in[0,T]} ||\sigma^2(s)||^2$$

Démonstration

Soit
$$\pi^n_{t,\ell}(x) = P\left(\langle \ell, V^n_t\rangle \leq x\right)$$
$$\pi_{t,\ell}(x) = P\left(\langle \ell, V_t\rangle \leq x\right)$$

alors
$$\pi^n_{t,\ell}(x) - \pi_{t,\ell}(x) = P\left(\langle \ell, \Psi_t^{-1}\left(R^n_t + \int_0^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds\right)\rangle \leq x\right)$$
$$- P\left(\langle \ell, \Psi_t^{-1}\left(R_t + \int_0^t \Psi(s)\, B(X_s)\, ds\right)\rangle \leq x\right)$$

d'où

3.5.1. $\sup_x |\pi^n_{t,\ell}(x) - \pi_{t,\ell}(x)| \leq \sup_x P(<\Psi_t^{-1}\ell , R^n_t> \leq x) - P(<\Psi_t^{-1}\ell, R_t> \leq x)$

on va d'abord, en utilisant la proposition 3.2. donner une majoration de

$$|P(<\ell, R^n_t> \leq x) - P(<\ell, R_n> \leq x)| \quad \text{pour } ||\ell|| = 1$$

on a vu que $R_{t\ell}$ suit une loi $\mathcal{N}(<\ell, R_o>, (\ell \otimes \ell, \Sigma_t^2))$

en notant $\bar{\pi}_{t\ell}$ sa fonction de répartition, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{\pi}_{t\ell}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\ell \otimes \ell, \Sigma_t^2)}} e^{-(1/2)\frac{(x-<\ell,R_o>)^2}{(\ell \otimes \ell, \Sigma_t^2)}}$$

et $\sup_x \frac{\partial}{\partial x}\bar{\pi}_{t\ell}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\ell \otimes \ell, \Sigma_t^2)}} = C_{t,\ell}$

soit $\delta^n_{t,\ell} = \sup_x |\bar{\pi}^n_{t,\ell}(x) - \bar{\pi}_{t,\ell}(x)|$

par suite des hypothèses, on a $|\phi^n_{t,\ell}(\theta) - \phi_{t,\ell}(\theta)| = |\phi^n_t(\theta\ell) - \phi_t(\theta\ell)|$

d'où

$$|\phi^n_{t,\ell}(\theta) - \phi_{t,\ell}(\theta)| \leq \frac{4\, p^n(\theta\ell)}{\theta^2||\ell||^2\sigma_o^2}\left(1 - e^{-(1/4)\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\right) + q^n(\theta\ell)\, TK\, e^{-\frac{1}{4}\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}$$

et par application de la proposition 3.2.

3.5.2. $\delta^n_{t,\ell} \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\Theta \frac{|\phi^n_{t,\ell}(\theta) - \phi_{t,\ell}(\theta)|\, d\theta}{\theta} + \frac{24}{\pi\Theta} C_{t\ell}$

$$\leq \frac{8}{\pi||\ell||^2\sigma_o^2}\int_0^\Theta \frac{p^n(\theta\ell)}{\theta^3}\left(1 - e^{-1/4\,\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\right) d\theta + \frac{2}{\pi} TK \int_0^\Theta q^n(\theta\ell)\, e^{-1/4\,\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\, d\theta + \frac{24}{\pi\Theta} C_{t\ell}$$

Or $p^n(\theta\ell) = p_1^n|\theta| \cdot ||\ell|| + p_2^n\theta^2||\ell||^2 + p_3^n|\theta|^3||\ell||^3$

$$= p_1^n|\theta| + p_2^n\theta^2 + p_3^n|\theta|^3$$

$$q^n(\theta\ell) = q_1^n|\theta| + q_2^n\theta^2 + q_3^n|\theta|^3$$

et $\int_0^\Theta \frac{p^n(\theta\ell)}{\theta^3}\left(1 - e^{-1/4\,\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\right) d\theta$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{\theta^3}(p_1^n\theta + p_2^n\theta^2 + p_3^n\theta^3)\left(1 - e^{-(1/4)\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\right) d\theta$$

$$+ \int_1^\Theta \left(p_1^n\frac{1}{\theta^2} + p_2^n\frac{1}{\theta} + p_3^n\right) d\theta$$

$$\leq p_1^n\,\frac{1}{2}(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))\left(1 + \frac{1}{2}(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))\right)$$

$$+ p_2^n\,\frac{1}{2}(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t)) + p_3^n + p_1^n\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right) + p_2^n\log\Theta + p_3^n(\Theta - 1)$$

$$\leq p_1^n\left(1 + \sup_{t \in [0,T]}\frac{1}{2}||\Sigma^2(t)||\left(1 + \frac{1}{2}||\Sigma^2(t)||\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}p_2^n \sup_{t \in [0,T]}||\Sigma^2(t)|| + p_2^n\log\Theta + p_3^n\,\Theta$$

et $\int_0^\Theta \frac{1}{\theta}\, q^n(\theta\ell)\, e^{-1/4\,\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\, d\theta$

$$\leq \int_0^\infty (q_1^n + q_2^n\theta + q_3^n\theta^2)\, e^{-(1/4)\theta^2(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))}\, d\theta$$

$$\leq q_1^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))^{1/2}} + q_2^n\frac{2}{(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))} + q_3^n\frac{2\sqrt{\pi}}{(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t))^{3/2}}$$

compte-tenu du fait que

$$(\ell \otimes \ell, \Sigma^2(t)) \geq \sigma_o^2\, t\, ||\ell||^2 = \sigma_o^2\, t$$

on a la majoration suivante :

<u>3.5.3.</u> $$\delta^n_{t,\ell} \leq \left[p^n_1 \left(1 + \frac{\sigma_1^2 t}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t\right)\right) + \frac{1}{2} p^n_2 \sigma_1^2 t + p^n_2 \log\theta + p^n_3 \right] \frac{8}{\pi\sigma_o^2}$$
$$+ \left[q^n_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_o^2 t}} + q^n_2 \frac{2}{\sigma_o^2 t} + q^n_3 \frac{2\sqrt{\pi}}{(\sigma_o^2 t)^{3/2}} \right] \frac{2TK}{\pi}$$
$$+ \frac{24}{\pi\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_o^2 t}}$$

pour $n \geq N_o$ et $\theta \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8K\gamma^n}$ et $\sigma_1^2 = \sup\limits_{s\in[0,T]} ||\sigma(s)||^2$

si maintenant $||\ell|| \neq 1$ et $\ell \neq 0$

$$\left|P\left(\langle\ell,R^n_t\rangle \leq x\right) - P\left(\langle\ell,R_t\rangle \leq x\right)\right| = \left|P\left(\left\langle\frac{\ell}{||\ell||},R_t\right\rangle \leq \frac{x}{||\ell||}\right) - P\left(\left\langle\frac{\ell}{||\ell||},R_t\right\rangle \leq \frac{x}{||\ell||}\right)\right|$$
$$\leq \delta^n_{t\,\frac{\ell}{||\ell||}}$$

pour $\ell = 0$ l'inégalité est trivialement vérifiée ; en conséquence :

<u>3.5.4.</u>
$$\sup_{\ell\in\mathbb{R}^d} \delta^n_{t\ell} \leq \frac{8}{\pi\sigma_o^2}\left[p^n_1\left(1 + \frac{\sigma_1^2 t}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sigma_1^2 t\right)\right) + \frac{1}{2}p^n_2\sigma_1^2 t + p^n_2 \log\theta + p^n_3\theta \right]$$
$$+ \frac{2TK}{\pi}\left[q^n_1 \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_o^2 t}} + q^n_2\frac{2}{\sigma_o^2 t} + q^n_3 \frac{2}{(\sigma_o^2 t)^{3/2}} \right] + \frac{24}{\pi\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_o^2 t}}$$

dès que $n \geq N_o$ et $\theta \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8K\gamma^n}$

On en déduit que

$$\sup_{\ell\in\mathbb{R}^d} \sup_x \left| \pi^n_{t,\ell}(x) - \pi_{t,\ell}(x) \right| \leq \sup_{\ell\in\mathbb{R}^d} \delta^n_{t,\ell}$$

et la proposition est démontrée.

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents dans le cadre du théorème 5 de la première partie.

Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

3.6. - <u>Corollaire</u>

<u>Hypothèses</u>

Soit $(x^n_\cdot)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus satisfaisant aux hypothèses du paragraphe II et du théorème 5 de la première partie.

On suppose de plus que :

i) pour tout n, il existe une probabilité ν^n telle que
$$\mu^n(x,x+\Gamma) = \nu^n(\Gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

ii) B, DF et H sont localement lipschitziennes

iii) $\sigma^2(t) = \psi(t)\, H(X(t))\, \psi^*(t)$ est strictement elliptique (c.a.d. : il existe $\sigma_o^2 > 0$ tel que $\langle \sigma^2(t)\, x, x\rangle \geq \sigma_o^2 \langle x,x\rangle\ \forall \in \mathbb{R}^d\ \forall t \in [0T]$)

iv) il existe une constante $\mathcal{K}_o$ telle que :
$$E\left(\sup_{s\in[0,T]} ||x^n_s - X(s,x_o)||^2\right) \leq \frac{\mathcal{K}_o}{||\alpha_n||^2}$$

alors

$$\sup_{\ell\in\mathbb{R}^d}\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P\left(\langle\ell,V^n_t\rangle \leq x\right) - P\left(\langle\ell, V_t\rangle \leq x\right)\right|$$
$$\leq \frac{8}{\pi\sigma_o^2}\left[p^n_1\left[\frac{\sigma_1^2 t}{2}\left(1+\frac{\sigma_1^2 t}{2}\right)+1\right] + \frac{1}{2}p^n_2\sigma_1^2 + p^n_2 \log\frac{\sigma_o^2}{8K\varepsilon_n} + \frac{\sigma_o^2 p^n_3}{8K} \right]$$
$$+ 2\frac{TK}{\pi}\left[\frac{f^n}{TK}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_o^2 t}} + \frac{2}{a_n^2\sigma_o^2 t} + \frac{2\sqrt{\pi}}{(\sigma_o^2 t)^{3/2}} \cdot \varepsilon_n \right]$$
$$+ \frac{24}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_o^2 t}} \cdot \frac{8K\varepsilon_n}{\sigma_o^2} \quad \text{pour } n \geq N_o$$

où $p_1^n = M \left\{ \sup_{||x|| \leq C+1} ||\alpha_n \big(F_n(x) - F(x)\big) - B(x)|| + \mathcal{K}_o^{1/2} \sup_{t \, [O,T]} ||\alpha_n DF(X_t)\, \alpha_n^{-1} - A(X_t)|| + \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{||\alpha_n||} \left[2\, K_o \big(1 + C^2 + \mathcal{K}_o\big)^{1/2} + \mathcal{K}_o^{1/2} \big(\mathcal{K}_{C+1} + 2K_1(1+C)\big) + \mathcal{K}''_{C+1}\, K_o (3+2C) + M_2 \right] \right\}$

$p_2^n = M^2 \sup_{||x|| \leq C+1} ||\alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^* - H(x)|| + \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{||\alpha_n||} \left[\mathcal{K}'_{C+1} + \mathcal{K}_o^{1/2}\, K_2 (7 + 3C)\right] + \frac{3K_2}{a_n^2} (1 + C^2 + \mathcal{K}_o)$

$p_3^n = M^3 \left\{ 2 \sup_{||x|| \leq C+1} ||H(x) - \alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^*|| + \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{||\alpha\ ||} \mathcal{K}'_{C+1} + K_2\, \mathcal{K}_o^{1/2} (7 + 3C) \right\}$

$M_2 = \sup_{t \in [O,T]} ||DF(X_t)||$; $\sigma_1^2 = \sup_{t \in [O,T]} ||\sigma^2(t)|| \leq M^2 . M_1$.

$\mathcal{K}_a$ $\mathcal{K}'_a$ et $\mathcal{K}''_a$ sont respectivement les constantes de Lipschitz pour DF, H, B sur le domaine $\{ x : ||x|| \leq a \}$.

Avant de faire la démonstration, nous allons rappeler les hypothèses essentielles du paragraphe II et du théorème 5 de la première partie, et expliciter les constantes.

3.6.1. Rappel des hypothèses fondamentales

- $(x^n_\cdot)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus de saut pur de générateur $(A^n, D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour toute fonction g mesurable bornée

$$A_g^n (x) = \lambda_n(x) \int \big[f(z) - f(x) \big] \mu^n(x,dz)$$

- $F_n(x) = \lambda_n(x) \int (z-x)\, \mu^n(x,dz)$ $||F_n(x)|| \leq K_1 \big(1 + ||x||\big)$
- $G_n(x) = \lambda_n(x) \int (z-x)^{\otimes 2}\, \mu^n (x,dz)$
- $\beta_n(x) = \lambda_n(x) \int_{||\alpha_n(z-x)|| > \varepsilon_n} ||\alpha_n(z-x)||^2 \mu^n(x,dz) \leq \frac{K_2}{a_n^2} (1 + ||x||^2)$
- $\lim_n \frac{1}{||\alpha_n||} = \lim_n \varepsilon_n = \lim_n \frac{1}{a_n^2} = 0$
- la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction F et satisfait $\sup_n E\Big(\sup_{u \leq T} ||\alpha_n \big(F_n(x_u^n)\big) - F\big(X(u,x_o)\big)||\Big) < + \infty$
- la suite $\big(\alpha_n (F_n - F)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction B continue telle $||B(x)|| \leq K_o \big(1 + ||x||\big)$
- DF. existe et est continue ; de plus, la suite $\big(\alpha_n DF.\ \alpha_n^{-1}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction A.
- la suite $(\alpha_n\ G_n\ \alpha_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction H continue et $||\alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^*|| \leq K_2 \big(1 + ||x||\big)$
- la suite $(x_o^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers un élément x_o de $\mathbb{R}^d$, la suite $(\alpha_n (x_o^n - x_o))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers un élément V_o de $\mathbb{R}^d$.
- X(t,x) est l'unique solution quand elle existe de l'équation $\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = F\big(X(t)\big) \\ X(o) = x \end{cases}$

3.6.2. Les hypothèses H_1, H_2, H_3, H_4 introduites dans le paragraphe 3.5 de la première partie assurent l'existence et l'unicité de $X(t,x_o)$.

La proposition 3.5. et les corollaires 3.6. et 3.7. donnent, sous ces mêmes hypothèses une majoration de $E\Big(\sup_{t \in [O,T]} ||x_t^n - X(t,x_o)||^i\Big)$ pour i = 1 ou 2.

De plus, dans le cas de l'hypothèse H_2, on a effectivement

$$E \Big(\sup_{t \in [O,T]} ||x_t^n - X(t,x_o)||^2\Big) \leq \frac{\mathcal{K}_o}{||\alpha_n||^2}$$

où $\mathcal{K}_o$ ne dépend que de T, K_1, K_2, K_o, V_o. (cf démonstration de la proposition 3.5.).

En appelant H_1', H_3', H_4' les hypothèses obtenues en prenant $\kappa(u) = bu$ dans H_1, H_3 et H_4 respectivement on obtient le même résultat et l'expression du $\mathcal{K}_o$ correspondant.

Les propriétés 5.1. et 5.2. donnent dans les mêmes conditions un majorant de $E\left(\sup_{u \leq T} \|\alpha_n\left(F_n(x_u^n)\right) - F\left(X(u,x_o)\right)\|\right)$

3.6.3. - Notations

- $\sigma^2(t) = \psi(t)\, H(X_t)\, \psi^*(t) \quad ; \quad \Sigma^2(t) = \int_o^t \sigma^2(s)\, ds$

- toutes les autres constantes intervenant sont définies dans la proposition 3.1. de cette 2ème partie.

Notons que les résultats restent valables pour le cas où

$$\begin{cases} \|\alpha_n\, G_n(x)\, \alpha_n^*\| \leq K_2\left(1 + \|x\|^2\right) \\ \sup_n E\left(\|x_o^n\|^4\right) < +\infty \\ \lambda_n(x) \int \|z - x\|^4\, \mu^n(x,dz) \leq K_3\left(1 + \|x\|^4\right) \end{cases}$$

et plus généralement dans tous les cas où les hypothèses 3.6.1. et les hypothèses du corollaire 3.6. sont satisfaites.

3.6.4. - Démonstration du corollaire 3.6.

On a donc (cf. Proposition 3.1.) $\forall n \geq N_o$ et $\|\theta\| \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8\varepsilon_n K}$

$$|\phi_t(\theta) - \phi_t^n(\theta)| \leq 4\, \frac{d^n(\theta)}{\|\theta\|\sigma_o^2} \left[1 - e^{-1/4\left(\theta \otimes \theta\, ,\Sigma^2(t)\right)}\right]$$

$$+ \left[TK\left(\frac{\|\theta\|^2}{a_n^2} + \|\theta\|^3 \varepsilon_n\right) + \|\theta\|\, f_n\right] e^{-1/4\left(\theta \otimes \theta,\, \Sigma^2(t)\right)}$$

par application de la proposition 3.5. on a alors

$$\sup_x \left| P\left(<\ell, V_t^n> \leq x\right) - P\left(<\ell\, , V_t> \leq x\right) \right|$$

$$\leq \frac{8}{\pi\, \sigma_o^2} \left[M(d_1^n + d_2^n) \left[\frac{\sigma_1^2 t}{2} + \left(\frac{\sigma_1^2 t}{2}\right)^2 + 1\right] + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t\, M^2\left(d_3^n + d_4^n + C_1^n\right)\right.$$

$$\left. + M^2\left(d_3^n + d_4^n + C_1^n\right) \log\theta + M^3 C_2^n \varepsilon_n \theta\right]$$

$$+ 2\,\frac{TK}{\pi} \left[\frac{f_n}{TK} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_o^2 t}} + \frac{1}{a_n^2} \cdot \frac{2}{\sigma_o^2 t} + \varepsilon_n\, \frac{2\sqrt{\pi}}{(\sigma_o^2 t)^{3/2}}\right]$$

$$+ \frac{24}{\pi\theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma_o^2 t}}$$

pour $n \geq N_o$ et $\theta \leq \dfrac{\sigma_o^2}{8K_n}$

Nous allons préciser chacun des termes.

$$d_{11}^n = \sup_{t \in [0,T]} E\left(\|\alpha_n\left(F_n(x_t^n) - F(x_t^n)\right) - B(x_t^n)\|\right)$$

$$\leq \sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n\left(F_n(x) - F(x)\right) - B(x)\| + \int_{\sup_t \|x_t^n - X_t\| > 1} 2\, K_o\left(1 + \|x_t^n\|\right) dP$$

$$\leq \sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n\left(F_n(x) - F(x)\right) - B(x)\|$$

$$+ 2\, K_o\left(E\left(1 + \|x_t^n\|\right)^2\right)^{1/2} \left[E\left(\|x_t^n - X_t\|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$d_{12}^n = \sup_{t \in [0,T]} E\, \|B(x_t^n) - B(X_t)\| \leq \left(\mathcal{K}_{C+1} + K_o(3+2C)\, \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|}\right) \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|}$$

d'où

$$d_1^n \leq \sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n\left(F_n(x) - F(x)\right) - B(x)\| + 2K_o\left(1 + C^2 + \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2}\right)^{1/2} \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|}$$

$$d_2^n = \|\alpha_n\| \sup_{t \in [0,T]} \left\{E\left(\|F(x_t^n) - F(X_t) - DF(X_t)\,(x_t^n - X_t)\|\right)\right.$$

$$\left. + \|\alpha_n\, DF(X_t)\, \alpha_n^{-1} - A(X_t)\|\; E\left(\|x_t^n - X_t\|\right)\right\}$$

$$\leq \|\alpha_n\| \sup_{t \in [0,T]} \Big\{ \mathcal{K}_{C+1}\, E\left(\|x_t^n - x_t\|^2\right)$$

$$+ \int_{\sup_t \|x_t^n - x_t\| > 1} \left(K_1 \left(1 + 2C + \|x_t^n - x_t\|\right) + \sup_t \|DF(X_t)\| \;\; \|x_t^n - x_t\| \right) dP$$

$$+ \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|} \cdot \sup_t \|\alpha_n DF(X_t)\, \alpha_n^{-1} - A(X_t)\| \Big\}$$

où $\mathcal{K}_{C+1}$ est la constante de Lipschitz pour DF sur le domaine :

$$\{ x : \|x\| \leq C+1 \}$$

$$d_2^n \leq \mathcal{K}_{C+1} \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2} + \left(2K_1(1+C) + \sup_{t \in [0,T]} \|DF(X_t)\|\right) \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2}$$

$$+ \mathcal{K}_o^{1/2} \sup_{t \in [0,T]} \|\alpha_n DF(X_t)\, \alpha_n^{-1} - A(X_t)\|$$

soit $M_2 = \sup_{t \in [0,T]} \|DF(X_t)\|$

soit $$p_1^n = M \Big\{ \sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n (F_n(x) - F(x)) - B(x)\|$$

$$+ \mathcal{K}_o^{1/2} \sup_{t \in [0,T]} \|\alpha_n DF(X_t)\, \alpha_n^{-1} - A(X_t)\|$$

$$+ \frac{1}{\|\alpha_n\|} \left[2K_o^{1/2} \left(1 + C^2 + \mathcal{K}_o\right)^{1/2} + \mathcal{K}_o^{1/2} \mathcal{K}''_{C+1} \right]$$

$$+ \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2} \left(2K_1(1 + C) + M_2 + \mathcal{K}_{C+1} + \mathcal{K}_o C^3 + 2C\right)$$

$$d_3^n = \sup_{t \in [0,T]} E\left(\|\alpha_n G_n(x_t^n)\, \alpha_n^* - H(x_t^n)\|\right)$$

$$\leq \sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^* - H(x)\| + \int_{\|x_t^n - x_t\| > 1} 2K_2 \left(1 + \|x_t^n\|\right) dP$$

$$\leq \sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^* - H(x)\| + 2K_2 (2+C) \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2}$$

$$d_4^n = \sup_{t \in [0,T]} E\left(\|H(x_t^n) - H(X_t)\|\right)$$

H étant localement lipschitzienne, soit $\mathcal{K}'_a$ sa constante de Lipschitz sur le domaine : $\{ x : \|x\| \leq a \}$

alors $$d_4^n \leq \mathcal{K}'_{C+1}\, E\left(\sup_{t \leq T} \|x_t^n - x_t\|\right)$$

$$+ K_2 \int_{\sup_t \|x_t^n - x_t\| > 1} \left(2 + C + \sup_t \|x_t^n - x_t\|\right) dP$$

$$\leq \mathcal{K}'_{C+1} \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|} + K_2 (3 + C) \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2}$$

$$c_1^n = \frac{3K_2}{a_n^2} \left(1 + C^2 + E\left(\sup_{t \in [0,T]} \|x_t^n - x_t\|^2\right)\right)$$

$$\leq \frac{3K_2}{a_n^2} \left(1 + C^2 + \frac{\mathcal{K}_o}{\|\alpha_n\|^2}\right) \leq \frac{3K_2}{a_n^2} \left(1 + C^2 + \mathcal{K}_o\right)$$

soit $$p_2^n = M^2 \Big[\sup_{\|x\| \leq C+1} \|\alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^* - H(x)\| + \mathcal{K}'_{C+1} \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|}$$

$$+ \frac{1}{\|\alpha_n\|} K_2 \,[7 + 3C]\, \mathcal{K}_o + \frac{3K_2}{a_n^2} \left(1 + C^2 + \mathcal{K}_o\right) \Big]$$

$$c_2^n = d_3^n + d_4^n + \sup_{t \in [0,T]} \|H(X_t) - \alpha_n G_n(X_t)\, \alpha_n^*\|$$

soit $$p_3^n = M^3 \Big[2 \sup_{\|x\| \leq C+1} \|H(x) - \alpha_n G_n(x)\, \alpha_n^*\|$$

$$+ \mathcal{K}'_{C+1} \frac{\mathcal{K}_o^{1/2}}{\|\alpha_n\|} + K_2 \mathcal{K}_o (7 + 3C) \frac{1}{\|\alpha_n\|} \Big]$$

on en déduit la majoration :

$$\sup_x |P(\langle \ell, V_t^n \rangle \leq x) - P(\langle \ell, V_t \rangle \leq x)|$$

$$\leq \frac{8}{\pi \sigma_o^2} \left[p_1^n \left(\frac{\sigma_1^2 t}{2} + \left(\frac{\sigma_1^2 t}{2}\right)^2 + 1 \right) + \frac{\sigma_1^2 t}{2} p_2^n + p_2^n \log \theta + p_3^n \varepsilon_n \theta \right]$$

$$+ 2\,\frac{TK}{\pi}\left[\frac{f_n}{TK}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_o^2 t}} + \frac{1}{a_n^2}\cdot\frac{2}{\sigma_o^2 t} + \varepsilon_n\,\frac{2\sqrt{\pi}}{(\sigma_o^2 t)^{3/2}}\right]$$

$$+ \frac{24}{\pi\Theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_o^2 t}}$$

pour $n \geq N_o$ $\quad \Theta \leq \frac{\sigma_o^2}{8K_n}$ $\quad$ et en prenant $\quad \Theta = \frac{\sigma_o^2}{8K\varepsilon_n}$

on a la majoration pour $n \geq N_o$:

$$\sup_x \left| P(\langle \ell , V_t^n\rangle \leq x) - P(\langle \ell , V_t\rangle \leq x)\right|$$

$$\leq \frac{8}{\pi\,\sigma_o^2}\left[p_1^n\left[\frac{\sigma_1^2 t}{2} + \left(\frac{\sigma_1^2 t}{2}\right)^2 + 1\right] + \frac{\sigma_1^2 t}{2}\,p_2^n + p_2^n \log\frac{\sigma_o^2}{8K_n} + \frac{\sigma_o^2}{8K}\,p_3^n\right]$$

$$+ \frac{2TK}{\pi}\left[\frac{f_n}{TK}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma_o^2 t}} + \frac{1}{a_n^2}\cdot\frac{2}{\sigma_o^2 t} + \varepsilon_n\,\frac{2\sqrt{\pi}}{(\sigma_o^2 t)^{3/2}}\right]\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi\sigma_o^2 t}}\cdot\frac{8K\varepsilon_n}{\sigma_o^2}$$

ce qui achève la démonstration du corollaire.

3.7. - Corollaire

On suppose que la vitesse de convergence des coefficients est au plus de l'ordre de $\frac{1}{||\alpha_n||}$, que $\beta_n(x) \equiv 0$ et que $\varepsilon_n = \frac{a}{||\alpha_n||}$

alors

$$\sup_{\ell\in\mathbb{R}^d}\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|P(\langle \ell, V_t^n\rangle \leq x) - P(\langle \ell, V_t\rangle \leq x)\right| = O\left(\frac{\log||\alpha_n||}{||\alpha_n||}\right)$$

3.8. - Exemple

On considère un processus de branchement unidimensionnel avec un nombre fini de transitions possibles, tel que $F(x) = \lambda_1 x$, $G(x) = \lambda_2 x$

alors, en posant $x_t^n = \frac{x_t}{n}$ $\qquad x_o^n = 1$

on a :

$$\left\{\begin{array}{l} F_n(x) = F(x) = \lambda_1 x \\ G_n(x) = \frac{1}{n}\,G(x) = \frac{\lambda_2}{n}\,x \\ \alpha_n = \sqrt{n} \\ \beta_n(x) \equiv 0 \qquad \varepsilon_n = \frac{a}{\sqrt{n}} \\ H(x) \equiv G(x) \\ \text{F et G sont lipschitziennes} \end{array}\right.$$

pour simplifier, on va prendre $\lambda_1 = 1$

on a $\frac{\partial}{\partial t} X(t,x_o) = \lambda X(t,x_o) = X(t,x_o)$

d'où $X(t,x_o) = e^t\,x_o$ $\quad$ et pour $x_o = 1$ $\quad X(t,1) = e^t$ $\qquad C = e^T$

$$||F(x) - F(y)|| \leq ||x-y|| \qquad \text{et} \qquad ||G(x) - G(y)|| \leq \lambda_2\,||x-y||$$

alors $E\left(\sup_{s\leq t} ||z_s^n||^2\right) \leq \lambda_2\,\frac{T}{n}\,3\,e^{8T^2 + 8T\lambda_2 + 1}$

$$E\left(\sup_{s\leq t} ||x_s^n - X(s,1)||^2\right) \leq \frac{12T}{n}\,\lambda_2\,e^{12T^2 + 8\lambda_2 T + 1}$$

$d_1^n = d_2^n = d_3^n = c_1^n = 0 = q_1^n$

$c_2^n = d_4^n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(12\,\lambda_2\,T\right)^{1/2} e^{\left(12T^2 + 8\lambda_2 T + 1\right)}$

$f_n = 0$ $\qquad M_1 = \lambda_2\,e^T + 1$

$\psi(t) = e^{-\int_o^t DF(X_s)\,ds} = e^{-t}$ $\qquad M = 1$

$\psi(t)\,.\,H(X_t)\,\psi(t) = \lambda_2\,e^{-2t}\,e^t = \lambda_2\,e^{-t} \geq \lambda_2\,e^{-T} = \sigma_o^2$

alors $p_1^n = 0$ $\qquad p_2^n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(12\,\lambda_2\,T\right)^{1/2} e^{6T^2 + 4\lambda_2 T + 1/2} = p_4^n$

et on a la majoration :

$$\sup_x \left| P\left(V_T^n \leq x \right) - P\left(V_T \leq x \right) \right|$$

$$\leq \frac{8}{\pi\, \sigma_o^2} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} (12\, \lambda_2 T)^{1/2}\, e^{6T^2 + 4\lambda_2\, T + 1/2} \left(\lambda_2 T + \log \frac{\lambda_2\, e^{-T}\sqrt{n}}{8Ka} + \frac{\sigma_o^2}{8K} \right) \right]$$

$$+ 4 \frac{TK}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(\sigma_o^2\, T)^{3/2}} \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{24}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_o^2\, t}} \frac{8K\, a}{\sigma_o^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leq a(T) \frac{\log \sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} b(T)$$

$$\leq \left(a(T) \vee b(T) \right) \cdot \frac{\log \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Revenons au cas général, c'est-à-dire au cas où on ne suppose plus que $\mu^n(x, x+\Gamma) = \nu^n(\Gamma)$; on peut encore étudier la vitesse de convergence mais elle sera moins rapide.

Nous démontrons d'abord l'analogue de la proposition 3.1.

3.8. - Proposition

On se place sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 5 de la première partie et on suppose de plus que $\sigma^2(t)$ vérifie :

$$< \sigma^2(t)x,\, x > \geq \sigma_o^2 < x, x > \qquad \begin{cases} \forall\, t \in [0,T] \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma_o^2 > 0 \end{cases}$$

alors

$$|\phi_t(\theta) - \phi_t^n(\theta)| \leq 2 \frac{d_n(\theta)}{||\theta||^2\, \sigma_o^2} \left(1 - e^{-1/2\left(\theta \otimes \theta,\, \Sigma^2(t)\right)} \right)$$

où $\bar{d}_n(\theta) = ||\theta||\, M(d_1^n + d_2^n) + ||\theta||^2\, M^2 \left(d_3^n + d_4^n + \bar{C}_1^n \right) + ||\theta||^3\, M^3\, \varepsilon_n\, \bar{C}_2^n$

où $\bar{C}_1^n = \dfrac{K_2}{a_n^2} \left(1 + E\left(\sup_{t \in [0,T]} ||x_t^n - x_t||^2 \right) + c^2 \right)$

$\bar{C}_2^n = K_2 \left(1 + C + E\left(\sup_{t \in [0,T]} ||x_t^n - x_t|| \right) \right)$

Démonstration

Elle est très voisine de celle de la proposition 3.1.

On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t^n(\theta) = \bar{D}^n(t, \theta) - \frac{1}{2} \phi_t^n(\theta) \left(\theta \otimes \theta,\, \sigma^2(t) \right)$$

avec $\begin{cases} \bar{D}^n(t,\theta) = \sum_{j=1}^{4} D_j^n(t,\theta) + \bar{C}^n(t,\theta) \\ \bar{C}^n(t,\theta) = E\left(e^{i<\theta, R_t^n>} \left(\lambda_n(x_t^n) \int \Phi\left(\theta, \psi(t)\alpha_n(z - x_t^n)\right) \mu^n(x_t^n, dz) \right) \right) \end{cases}$

Les majorations de $(D_j^n(t,\theta))_{j=1,2,3,4}$ restent valables

pour $\bar{C}^n(t,\theta)$ on a la majoration :

$$\left| \bar{C}^n(t,\theta) \right| \leq E\left[\lambda_n(x_t^n) \int_{||\alpha_n(z-x_t^n)|| > \varepsilon_n} M^2 ||\theta||^2 ||\alpha_n(z - x_t^n)||^2\, \mu^n(x_t^n, dz) \right]$$

$$+ E\left[\lambda_n(x_t^n) \int_{||\alpha_n(z-x_t)|| \leq \varepsilon_n} M^3\, ||\theta||^3\, \varepsilon_n ||\alpha_n(z - x_t^n)||^2\, \mu^n(x_t^n, dz) \right]$$

$$\leq M^2 ||\theta||^2 \frac{K_2}{a_n^2} \left(1 + \sup_t E(||x_t^n||^2) \right)$$

$$+ M^3 ||\theta||^3\, \varepsilon_n \sup_{t \in [0,T]} ||\alpha_n G_n(x_t^n)\, \alpha_n^*||$$

$$\leq M^2 ||\theta||^2 \frac{K_2}{a_n^2} \left(1 + c^2 + E\left(\sup_{t \in [0,T]} ||x_t^n - x_t||^2 \right) \right)$$

$$+ M^3 ||\theta||^3\, \varepsilon_n\, K_2 \left(1 + C + E\left(\sup_{t \in [0,T]} ||x_t^n - x_t|| \right) \right)$$

$$\leq M^2 ||\theta||^2\, \bar{c}_1^n + M^3 ||\theta||^3\, \varepsilon_n\, \bar{c}_2^n$$

d'où $|\bar{D}^n(t,\theta)| \leq \bar{d}^n(\theta)$

et $\bar{d}^n(\theta) = ||\theta||\, M\left(d_1^n + d_2^n \right) + ||\theta||^2\, M^2 \left(d_3^n + d_4^n + \bar{\ }^n_1 \right) + ||\theta||^3\, M^3 \varepsilon_n\, \bar{c}_2^n$

en posant $\Delta_t^n = \phi_t^n - \phi_t \qquad \Delta_o^n = 0$

on a $\frac{\partial}{\partial t} \Delta_t^n = \bar{D}^n(t,\theta) - \frac{1}{2} \Delta_t^n \left(\theta \otimes \theta , \Sigma^2(t)\right)$

et $\Delta_t^n = \int_o^t \bar{D}^n (s,\theta)\, e^{-1/2\left(\theta \otimes \theta , \Sigma^2(t)-\Sigma^2(s)\right)}\, ds$

$\Longrightarrow |\Delta_t^n| \leq \bar{d}^n(\theta) \int_o^t e^{-1/2\left(\theta \otimes \theta , \Sigma^2(t)-\Sigma^2(s)\right)}\, ds$

$$\leq 2 \frac{\bar{d}^n(\theta)}{\sigma_o^2 ||\theta||^2} \left(1 - e^{-1/2\left(\theta \otimes \theta , \Sigma^2(t)\right)}\right)$$

on a également l'analogue du corollaire 3.6.

3.9. - Corollaire

On suppose de plus que DF,H, B sont localement lipschitziennes et que $E\left(\sup_{t\in[0,T]} ||x_s^n - x_s||^2\right) \leq \frac{K_o}{||\alpha_n||^2}$

alors $\left|P\left(<\ell , v_t^n> \leq x\right) - P\left(<\ell, v_t> \leq x\right)\right|$

$$\leq \frac{8}{\pi\, \sigma_o^2} \left[p_1^n \left(\frac{\sigma_1^2 t}{2} \left(1 + \frac{\sigma_1^2 t}{2}\right) + 1\right) + \frac{1}{2} p_2^n\, \sigma_1^2 t + p_2^n \log\theta + p_3^n\, \theta\right]$$

$$+ \frac{24}{\pi\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma_o^2\, t}} \qquad \text{pour tout } \theta$$

$$\bar{p}_3^n = M^3\, \varepsilon_n\, K_2\left(1 + C + E\left(\sup_{t\in 0,T} x_t^n - x_t||\right)\right)$$

Démonstration

Par application de la proposition 3.5. avec $p^n(\theta) = \bar{d}^n(\theta)$ et $q^n(\theta) \equiv 0$ on obtient immédiatement le résultat.

Si on suppose que la vitesse de convergence des coefficients est de l'ordre de $\frac{1}{||\alpha_n||}$

on a $\left|P\left(<\ell , v_t^n> \leq x\right) - P\left(<\ell , v_t> \leq x\right)\right|$

$$\leq c_o(t) \frac{1}{||\alpha_n||} + \frac{1}{||\alpha_n||} \log\theta + \frac{1}{||\alpha_n||}\theta + \frac{24}{\pi\theta\sqrt{2\pi\, \sigma_o^2\, t}}$$

et pour $\theta = ||\alpha_n||^{1/2}$

$$\left|P\left(<\ell , v_t^n> \leq x\right) - P\left(<\ell , v_t> \leq x\right)\right| \leq c_1(t) \frac{1}{||\alpha_n||^{1/2}}$$

Rappelons que R_t suit une loi $\mathcal{N}(R_o, \Sigma_t)$ alors $\bar{R}_t = \Sigma_t^{-1} R_t$ suit une loi $\mathcal{N}(\Sigma_t^{-1} R_o, I)$

de plus $P\left(<\ell , \bar{R}_t> \leq x\right) = P\left(< \Sigma_t^{-1} R, R_t> \leq x\right)$

en définissant $\bar{R}_t^n$ par :

$$\bar{R}_t^n = \Sigma_t^{-1} R_t^n$$

on déduit facilement du corollaire précédent une majoration pour :

$$\left|P\left(<\ell , \bar{R}_t^n> \leq x\right) - P\left(\ell , \bar{R}_t> \leq x\right)\right|$$

$$\leq \sup_x \left|P\left(< \Sigma_t^{*-1} \ell , R_t^n> \leq x\right) - P\left(< \Sigma_t^{*-1} \ell, R_t> \leq x\right)\right|$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLAIN M.F. Sur quelques types d'approximation des solutions d'équations différentielles stochastiques
Thèse de 3e cycle, Rennes 1974

[2] BARBOUR A. On a functionnal central limit theorem for Markov population processes
Adv. in Applied Probability 6 (1974)

[3] BIHARI I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations
Acta Mathematica VII

[4] BILLINGSLEY P. Convergence of Probability measures
J. Wiley and Sons

[5] CHUNG KL. A course in probability theory
Academic Press

[6] DYNKIN Markov Processes I
Academic Press

[7] HEWITT-STRONBERG Real and abstract analysis
Springer Verlag

[8] KURTZ Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes
J. of Applied Probability 7 1971

[9] KURTZ Limit theorems for sequences of jump Markov processes approximating ordinary differential processes
J. of Applied Probability 8 1971

[10] KURTZ Semigroups of conditioned Shifts and Approximation of Markov processes
The annals of Probability, Vol. 3, N° 4, 1975

[11] PRIOURET Processus de diffusion et équations différentielles Stochastiques. Ecole d'Eté de Probabilités III, St Flour 1973
Springer Verlag

[12] STROOK-VARADHAN Diffusion processes with continuous coefficients
Communication on pure and applied Math. Vol 22 N°s 3-4 1969

[13] YAMADA-WATANABE On the uniqueness of solution of stochastic differential equations
J. of Math. Kyoto University Vol. 11 N°s 1-3

-:-