PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. Y. GLORENNEC
J. PELLAUMAIL

Sur une extension de la formule de Jackson donnant les probabilités stationnaires d'un réseau de files d'attente

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 1
« Séminaires de Rennes », , p. 24-28
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___1_A7_0>

SUR UNE EXTENSION DE LA FORMULE DE JACKSON DONNANT LES PROBABILITES STATIONNAIRES D'UN RESEAU DE FILES D'ATTENTE

par P.Y. GLORENNEC et J. PELLAUMAIL

Sommaire

Dans [3], on donne une formule, désormais classique, relative aux probabilités stationnaires d'un réseau de files d'attente. Cette formule a été généralisée de plusieurs façons, notamment en [1], [2] et [4]. Ici, on montre que, sous certaines contraintes, une extension naturelle de cette formule est encore valable pour un système où, partant d'une station donnée, la probabilité pour un élément d'aller dans une autre station n'est pas fixée à priori mais dépend de l'état des stations à atteindre.

1 - POSITION DU PROBLEME

On considère le réseau ouvert suivant :

- le flot entrant dans le réseau est un flot poissonnien de paramètre λ ;

- chaque élément qui entre dans le réseau a le choix entre n stations.

La probabilité d'aller dans la station i dépend du nombre d'éléments présents dans l'ensemble des stations à l'instant considéré. Plus précisément :

$X = (x_1, \dots x_n) \in N^n$ est l'état du réseau

$p_i(X)$ = Probabilité d'aller dans la station i sachant X

On suppose évidemment que $\sum_{i=1}^{n} p_i(X) = 1$,

- le temps de service dans la station i suit une loi exponentielle dont le taux $a_i(x_i)$ dépend du nombre d'éléments x_i dans la station à l'instant considéré. Les $(a_i(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ peuvent ne pas être finis.

On supposera $a_i(o) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Le problème est de déterminer les probabilités stationnaires pour ce réseau. On notera $P(X)$ la probabilité stationnaire que le réseau soit dans l'état X.

2 - EQUATIONS DONNANT LES PROBABILITES STATIONNAIRES

On note $X \pm e_i$ l'état du réseau après l'arrivée ou le départ d'un élément dans la station i.

Les fonctions P (X) doivent vérifier le système suivant :

$$(\mathfrak{R}) \quad \left\{ \begin{aligned} P(X) \{ \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i) \} = & \sum_{i=1}^{n} P(X - e_i) \lambda p_i(X - e_i) \\ & + \sum_{i=1}^{n} P(X + e_i) a_i(x_i + 1) \end{aligned} \right.$$

Cette équation est valable pour tout $X \in \mathbb{N}^n$ avec la convention

$$P(X - e_j) = 0 \quad \text{si} \quad x_j = 0.$$

Si on ne s'impose aucune contrainte à priori sur les quantités $p_i(X)$, les valeurs de $p_i(X)$ pour X "très grand" interviendront dans la valeur de $P(X)$ pour X "très petit". Autrement dit, P(.), solution générale de ($\mathcal{R}$), dépend de toutes les valeurs $p_i(X)$, pour tout X de $\mathbb{N}^n$.

Cette solution générale ne semble pas simple à déterminer et, de toutes façons, est probablement peu exploitable .

Nous nous proposons maintenant de montrer que, sous certaines contraintes sur les valeurs $(p_i(X))$, le système ($\mathcal{R}$) admet une solution qui est une généralisation naturelle de la formule de Jackson.

3 - GENERALISATION DE LA FORMULE DE JACKSON

Considérons le système suivant :

$$(\mathcal{U}) \left\{ \begin{array}{l} \forall X \in N^n \;, \; \forall j \in \{1,2,\dots n\} \\ P(X-e_j).a_j(x_j+1) = \lambda.P(X).p_j(X) \end{array} \right.$$

Si ce système admet une solution, celle-ci est aussi une solution de ($\mathcal{R}$). On notera, de plus, que la solution générale de ($\mathcal{U}$) peut être construite par récurrence. On vérifie alors que ($\mathcal{U}$) admet une solution si et seulement si on a :

$$(\mathcal{C}) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout couple d'entiers } (i,j) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n \text{, et} \\ \text{pour tout élément } X \text{ de } \mathcal{D} \text{ , on a :} \\ p_i(X-e_i).p_j(X-e_i-e_j) = p_j(X-e_j).p_i(X-e_i-e_j) \end{array} \right.$$

le domaine $\mathcal{D}$ étant l'ensemble des états pour lesquels le réseau n'est pas saturé.

Il existe une infinité de solutions de ($\mathcal{C}$) telles que les $p_i(.)$ associées prennent leurs valeurs dans le segment $[0,1]$. A chacune de ces solutions correspond une loi de répartition entre les n stations telle que la solution stationnaire associée soit de la forme ($\mathcal{U}$).

4 - UNE SOLUTION PARTICULIERE DE $\mathcal{C}$

Soit $Y = (y_1,\dots,y_n)$ un élément de N^n. On suppose que Y correspond à l'état de saturation de réseau, c'est-à-dire que, pour tout i, $a_i(y_i + k) = +\infty$ si $k \geqslant 1$; y_i représente donc le nombre maximum d'éléments dans la station i.

On vérifie que ces conditions sur les a_j sont compatibles avec le système $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{D}_Y$ le domaine défini par :

$$\mathcal{D}_Y = \{ X = (x_1,\dots,x_n) : \forall i, \; o \leqslant x_i \leqslant y_i \}$$

On constate que ($\mathcal{C}$) admet la solution particulière suivante :

$$(\mathcal{C}') \left\{ \text{Pour tout } X \in \mathcal{D}_Y \text{ , et pour tout i, } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ , } p_i(X) = \frac{y_i - x_i}{\sum_{j=1}^{n} y_j - x_j} \right.$$

De plus cette solution est telle que $\sum_{i=1}^{n} p_i(X) = 1$, pour tout élément X de $\mathcal{D}_Y$.

Notons que, dans ce cas,

$$p_i(x_1,\dots x_{i-1}, y_i, x_{i+1},\dots x_n) = 0$$

$$p_i(y_1,\dots y_{i-1}, x_i, y_{i+1},\dots y_n) = 1 \text{ si } x_i < y_i \text{ .}$$

Par conséquent, un élément arrivant dans le système est pris en charge par celui-ci, sauf si toutes les stations du système sont saturées.

Si les probabilités de répartition entre stations sont celles données en $\mathcal{C}'$, la solution stationnaire associée satisfait à ($\mathcal{U}$). Plus précisément, dans ce cas, cette solution est de la forme suivante :

$$P(X) = C.\lambda^{|X|} . \prod_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{x_i-1} p_i \left[X - \sum_{k=1}^{i-1} x_k e_k - j e_i\right]}{\prod_{j=1}^{x_i} a_i(j)}$$

$$\text{où} \quad \frac{1}{C} = \sum_{X \in \mathcal{D}_Y} P(X) \quad \text{et} \quad |X| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASKETT, CHANDY and MUNTZ *Open, Closed and Mixed networks of queues with different classes of customers.* Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 22, n° 2, April 1975.

[2] BUZEN *Computationnal algorithms for closed queuing networks with exponentiel servers.* (1973).

[3] JACKSON *Job-shop like queuing systems.* Management Science, vol. 10, 1963, pp. 131-142.

[4] KOBAYASHI and REISER *Queuing networks with several closed subchains : theory and computationnal algorithms.* I.B.M. Thomas J. Watson Research Center (1974).