E. GRAHAM EVANS

Position générale et position spéciale en la théorie commutative des anneaux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4
« Colloque d'algèbre commutative », , exp. nº 5, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___4_A3_0>

POSITION GENERALE ET POSITION SPECIALE

EN LA THEORIE COMMUTATIVE DES ANNEAUX

par

E. Graham EVANS *

Au moins depuis le théorème [11] de Kronecker, disant que chaque ensemble algébrique V, dans l'espace de n dimensions, est l'intersection de n+1 hypersurfaces, les mathématiciens ont cherché et ont trouvé des théorèmes du type "position générale". Par exemple, dans le théorème de Kronecker on choisit les hypersurfaces qui sont les zéros de f_i, où les f_i disparaissent sur V, et n'importe quelle sélection des f_i qui sont assez généraux suffira. Plus précisément, l'ensemble de n+1 triples de f_i suffisants sera un ensemble Zariski ouvert non-vide. Depuis le théorème [12] de Krull, les mathématiciens ont trouvé des théorèmes qui disent que dans le cas noethérien, les résultats suggérés par les arguments de position générale sont les meilleurs possibles. Le théorème de Krull dit que la hauteur d'un idéal engendré par m éléments est au maximum m, et il est implicite dans la thèse de Kronecker que la hauteur est au moins m si l'on choisit m f_i dans la position générale.

Cette dissertation est structurée ainsi : la première section examine deux exemples de théorèmes du type position générale présentés avec leurs analogues de position spéciale. La seconde section présente un nouveau théorème du type position spéciale avec une application.

---

* L'auteur est un Alfred P. Sloan foundation fellow ; il était partiellement soutenu par la Nat'l Science foundation pendant la préparation de cette dissertation.

L'auteur souhaite prendre cette occasion pour remercier les professeurs Eisenbud, Griffith et Kennedy pour toutes les conversations utiles, et il voudrait aussi faire ses remerciements à la Faculté de Mathématiques de l'Université de Rennes pour sa gentille hospitalité.

Première Section

Partout dans cette dissertation, A sera un anneau commutatif noethérien et tous les modules seront du type fini.

Les arguments de position générale ont été utilisés par Bass [2] suivant l'exemple de Serre [13] pour donner une base algébrique aux idées fondamentales de la théorie K. Ces résultats ont été revus et synthétisés par Eisenbud et Evans [5]. Le lecteur qui s'y intéresse pourraît bien consulter cet article pour un traitement plus complet de ce sujet.

Si P est un module A projectif du rang t, le théorème [13] de Serre dit qu'il y a un élément $p \in P$ tel que p produit un summand libre de P_Q pour tout idéal prime Q d'une hauteur moins de Z. Il est implicite dans la thèse de Serre, que l'on peut supposer l'élément p de position générale. Kleinman dans [10] arrive à ce résultat d'une façon bien concrète.

Il est inutile d'essayer de démontrer que si P a un rang moins que la dimension, P n'a pas de summand libre, puisque P pourraît être libre. Néanmoins, s'il existe un idéal maximal m tel que p n'engendre pas de summand libre de P, on peut démontrer qu'il y a un idéal prime Q de hauteur moins que ou égale au rang de P tel que p n'engendre pas de summand libre de P_Q. Pour le cas où P_m- est libre, supposons que P est isomorphique à P_m- Λ A_m^t. Alors p a les components $f_c,\ldots f_t$ où le $f_c \in A_m$-. Puisque p n'engendre pas de summand libre de P_m-, l'idéal engendré par le F_i n'est pas égal à A_m-. Si Q est n'importe quel idéal prime qui est minimal par rapport aux idéaux premiers qui contiennent le f_i, Q a une hauteur moins que ou égale au rang de P, et p n'engendre pas de summand libre de P_Q

L'exemple suivant est un théorème de Bruns [3] qui généralise un théorème bien connu de Bourbaki [4] [8]. Le théorème dit que si A est anneau local régulier avec idéal maximal m^{-}, et si M est une K^e syzygie d'un rang plus que K, il existe un sous-module $F \subset m$ tel que m/F est une K^e syzygie de rang égal à k.

La preuve a trois parties. Le théorème principal de [5] se cite pour montrer qu'il existe un élément $m \in M$ tel que m engendre un summand libre de m_Q pour tout idéal prime de hauteur k. On peut choisir cet élément en position générale. Ensuite on cite les critères présentés par Auslander et Bridger [1] pour un module qui soit une K^e syzygie et la longue séquence exacte dans $\mathrm{Ext}^i(-, A)$ pour démontrer que M/Am est toujours une K^e syzygie. Enfin, il finit par induction sur le rang de n.

Encore une fois il est inutile d'essayer de démontrer que l'on ne peut pas avoir une K^e syzygie de rang moins que k puisque A est une k^e syzygie pour tout k. Néanmoins, on peut bien se demander si celle-ci est la seule possibilité : c'est-à-dire on peut se demander si toutes les K^e syzygies de rang moins que k sont libres. Ce serait le meilleur analogue de position spéciale possible du théorème de Bruns. Actuellement, la réponse est inconnue, sauf dans des cas très spéciaux.

Seconde Section

Dans l'oeuvre [6], Eisenbud et Evans démontrent un analogue de position spéciale à la version du théorème de Krull interprétée en termes de modules projectifs dans la première section. Plus précisément, ils démontrent que si A est un anneau intègre local qui contient un corps avec idéal maximal m^{-}, si M est un module de rang t, où le rang

$$M = \dim_{A_{(o)}} \quad M_{(o),A} \quad \text{et} \quad X \in m^{-} M \quad ,$$

alors

$$\Theta_m(X) = \{f(X) \mid f \in \mathrm{Hom}(M, R)\}$$

est un idéal de hauteur au maximum Z. Il y a des exemples pour démontrer qu'il faut spécifier que $X \in m^{-} M$ et non simplement $\Theta_m(X) \neq A$.

La preuve de ce théorème est suggérée dans [7] avec une application à la théorie de l'intersection. La preuve complète paraîtra dans [6] avec des applications aux hauteurs des idéaux détermentaux.

Comme exemple de l'application de ce théorème, on démontrera maintenant qu'un analogue partiel au résultat de Bruns est vrai.

Théorème : Soit A un anneau local régulier dont l'idéal maximal unique est m^{-} ; supposons que A contient un corps. Soit M une K^e syzygie de rang K où $X \in m M$. Alors m/R_X n'est pas une K^e syzygie.

Preuve : Soit Q un idéal prime minimal parmi les idéaux primes qui contiennent $\Theta_m(X)$. Alors la hauteur de Q est au maximum K. A_Q est un anneau local régulier de dimension moins que ou égale à K, et m_Q est une K^e syzygie. Donc m_Q est libre. Si m/A_X était une K^e syzygie aussi, (m/AX_Q) serait libre. On a une séquence exacte

$$0 \longrightarrow A_Q \xrightarrow{f} m_Q \longrightarrow (m/A_X)_Q \longrightarrow 0$$

où $f(1) = X$. Si $(m/A_X)_Q$ est libre, il existe un homomorphisme g tel que $g \circ f = 1_{A_Q}$. Alors $g \in \mathrm{Hom}_{A_Q}(m_Q, A_Q) = (\mathrm{Hom}_A(m,A))_Q$ et $g(X) \in Q$, qui contredit le choix de Q.

Bien que le théorème noté dans la première section soit un analogue partiel de bien des théorèmes de position générale donnés dans [5], on pourraît bien chercher un meilleur résultat. En particulier le problème de syzgygie présenté dans la première section et examiné partiellement ici semble présenter beaucoup de possibilités.

Récemment Evans et Griffith [9] ont découvert un rapport entre les K^e syzygies de rang t et les idéaux I engendrés par t+1 tels que

$Ext^{i}_{A}(I,A) = 0$ pour $1 < i < n-K$ où $n=$ la dimension de A. On espère bien que ce rapport fournira encore des renseignements sur le problème de la syzygie, qui s'ajouteront à la liste des analogues d'arguments de position générale connus.

REFERENCES

[1] AUSLANDER M. et BRIDGER M. Stable Module Theory, Mem. Amer. Math, Soc. 94 (1969).

[2] BASS H. K-Theory and Stable Algebra, Publ., Math. I.H.E.S. n° 22 (1964), 5-60.

[3] BRUNS W. "Jede" endiche frie Auflösung ist frie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals, J. Alg. 39 (1976), 429-439.

[4] BOURBAKI N. Diviseurs ("Algèbre Commutative", Chapitre 7), Herman, Paris 1965.

[5] EISENBUD D. et EVANS E.G. Genereiting Modules Efficiently Theorems from Algebraic K-theory, J. Alg. 27 (1973), 278-305.

[6] EISENBUD D. et EVANS E.G. A Generalizal Principal Ideal Theorem. Nagoya J. Math.

[7] EVANS E.G. A Generalized Principal Ideal Theorem with Applications to Intersection Theory, Séminaire P. Dubreil, (1975-76), Paris.

[8] EVANS E.G. Bourbaki's Theorem and Algebraic K-Theory. J. Alg.

[9] EVANS E.G. et GRIFFITH P. A paraître.

[10] KLEINMAN S. Geometry on Grassmanniens and Applications to Splitting Bundles and Smoothing Cycles, Publ. Math. I.H.E.S. n° 36, 281-298.

[11] KRONECKER L. Grundzüge eine arithmetischen Theorie der algebraischen Grossen, J. Reine Angew. Math. 92 (1882), 1-123.

[12] KRULL W. Uber die Zerlegung der Hauptideal in algememen Ringen, Math. Ann. 105 (1931), 1-14.

[13] SERRE J.P. "Modules Projectifs et Espaces Fibres à Fibre Vectorielle. Seminaire P. Dubreil (1957-1958), Paris.