

B. MERCIER

**Régularisation, approximation et résolution du problème
des charges limites**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5

« Journées « éléments finis » », , p. 1-30

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__S5_A11_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DU PROBLÈME DES CHARGES LIMITES

B. MERCIER

Avril 1976

On définit le problème des charges limites dans un cas particulier.
On introduit un problème pénalisé, qui apparaît comme le problème
plastique associé.

Le dual de ce problème est un problème aux limites. La
résolution donne un moyen de détermination des charges limites.

On donne un procédé d'approximation par éléments finis pour
tels problèmes, et un résultat de convergence. On indique un
algorithme de résolution.

ABSTRACT

We consider a perfectly plastic structure subjected to a load L .
We wish to determine whether the load L is admissible, i.e. whether there
exists a set of plastically stress fields, which equilibrate the load L .

We show that this problem is equivalent to the problem of finding the
solution of Bingham problem is exactly equal to zero. As a consequence
this remark is that this Bingham problem is regular and can be solved
numerically.

Then, we give a convergence result and some numerical results for
the determination of the set of admissible loads, when the structure is
approximated by special piecewise linear finite elements.

INTRODUCTION

On s'intéresse à un problème d'existence de solutions en plasticité tant donnée une charge L pour un milieu continu, existe-t-il un contraintes σ plastiquement admissible, et qui soit en équilibre charge L (statiquement admissible) ? [19].

Dans l'affirmative, on dira qu'une telle charge est *admissible*, excessive. Le problème des charges limites est de déterminer C des charges admissibles [10].

On va montrer que la résolution du dual du problème initial, dans un certain sens, (qui n'est autre qu'un problème de fluides si le critère de plasticité est celui de Von Mises) permet de indications sur cet ensemble et de le déterminer de manière assez

On donne un résultat d'existence dans le cas où le critère de ne porte que sur le déviateur (ce qui est le cas pour le critère s). Il apparaît, alors, que le problème dual est soumis à une de divergence nulle.

On montre, dans un cadre d'approximation interne, un résultat de de C_h vers C , où C_h est l'ensemble des charges admissibles approché, et un résultat d'estimation d'erreur.

On introduit, ensuite, un élément fini P_1 à divergence nulle, qui apté à ce type de problèmes.

Pour cet élément, on obtient une estimation d'erreur en $O(\sqrt{h})$ tance entre C et C_h , dans le cas d'un maillage uniforme.

C_h est une approximation de C par l'extérieur, c'est-à-dire $C_h \supset C$, $\forall h$.

On donne, enfin, quelques résultats numériques, annoncés dans [16].

PLAN

- 1 - Position du problème.
- 2 - Régularisation et dualité.
- 3 - Cas d'un critère de plasticité ne portant que sur le déviateur.
- 4 - Caractérisation des charges admissibles.
- 5 - Approximation.
- 6 - Estimation d'erreur.
- 7 - Résultats numériques.

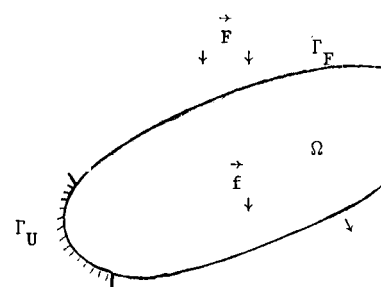


Figure 1 : Milieu continu Ω

EN DU PROBLEME.

onsidèrons un milieu continu occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (Fig. 1).

'il est soumis à des forces de masse f_i et à des forces de sur une partie Γ_F de sa frontière. Sur l'autre partie Γ_U , 'il est fixé.

tenseur des contraintes doit être en équilibre :

$$\text{div } \sigma + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ pour } i = 1, \dots, N;$$

$$\sigma_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_F, \text{ pour } i = 1, \dots, N,$$

n_j désignent les composantes du vecteur normal à la frontière extérieurement).

roduisons les espaces fonctionnels :

$$V = \{ v \in (H^1(\Omega))^N \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \};$$

$$Y = \{ \tau \mid \tau_{ij} \in L^2(\Omega); \tau_{ij} = \tau_{ji}; i, j = 1, \dots, N \}.$$

pace des champs de vitesses, et Y sera l'espace des champs de symétriques.

définit l'opérateur des taux de déformation :

$\rightarrow Y$

$$\varepsilon(v) \text{ avec } \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq N.$$

munir Y du produit scalaire

$$(\sigma, \tau) = \int \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dX.$$

et on note $\| \cdot \|$ la norme associée. On note enfin $\|v\|$ la norme de V , qui est bien une norme sur V , d'après l'in

On appelle *charge* L , l'élément de V' (dual de V) puissance des forces extérieures pour un champ de vitesses

$$(1.2) \quad L(v) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dX + \int_{\Gamma_F} F_i v_i \, d\gamma.$$

THEOREME 1.1 : (des "puissances virtuelles").

Soit

$$M(L) = \left\{ \tau \in Y \mid (\tau, \varepsilon(v)) = L(v), \forall v \in V \right\}$$

on a l'équivalence :

$$\sigma \text{ en équilibre (ou (1.1) vérifié)} \iff \sigma \in M(L).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la formu

$$(1.3) \quad (\sigma, \varepsilon(v)) = \int_{\Gamma_F} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij} n_j v_i \, d\gamma - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) \, dX.$$

On vérifie que $M(L)$ est une variété linéaire a

Critère de plasticité : On dira que σ est *plastiquement a*

$$(1.4) \quad \sigma \in K = \left\{ \tau \in Y \mid f(\tau) \leq 0 \text{ p.p.} \right\},$$

où f est une fonction convexe de $\mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée *crit*

critère de Von Misès : On a

$\sigma^D = |\sigma^D| - g$ où σ^D est le déviateur de σ :

$$\sigma_{ij}^D \equiv \sigma_{ij} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_{kk} \right) \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ tenseur de Kronecker})$$

$$|\sigma^D| \equiv \sqrt{\sum_{i,j=1}^N \tau_{ij} \tau_{ij}} \quad \text{est la norme euclidienne de } \mathbb{R}^{N^2}. \blacksquare$$

On dira que L est charge admissible si et seulement si

$$K \cap M(L) \neq \emptyset,$$

et dans le cas contraire.

Le problème des charges limites est donc de déterminer l'ensemble C des charges admissibles.

Remarquons que, plus généralement, on pourrait chercher à savoir si $C \neq \emptyset$ dans d'autres situations, où V et Y seraient différents, et où l'opérateur ε : c'est le cas, par exemple, pour les plaques.

C est convexe. [19].

En effet, soient L_1 et L_2 deux charges admissibles, alors $\exists \sigma_1, \sigma_2$

$$\sigma_1 \in K \cap M(L_1) \quad \text{et} \quad \sigma_2 \in K \cap M(L_2);$$

et K étant convexe,

$$\alpha \sigma_1 + (1-\alpha) \sigma_2 \in K \cap M(\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2) \quad \text{pour } \alpha \in [0, 1],$$

donc $\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2$ est admissible. \blacksquare

2 - RÉGULARISATION ET DUALITÉ.

On va déduire des conséquences importantes de

Considérons le problème (pour $\mu > 0$)

$$(P) \quad \sup_{\sigma \in M(L)} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 \right],$$

où P_K désigne l'opérateur de projection sur K . La quantité $\|\sigma - P_K(\sigma)\|$ est évidemment la distance de σ au convexe K , et le problème (P) est en quelque sorte, le pénalisé du problème des charges limites.

On remarque alors que

L charge admissible $\Leftrightarrow \exists \sigma$ solution de (P) et

On ne sait pas, en général, si le problème (P) admet une solution, et que K ne soit borné, auquel cas (P) est visiblement coercif.

On va évaluer le problème dual de (P) :

THEOREME 2.1 : Le problème dual de (P) est :

$$(P^*) \quad \inf_{v \in V} \left[\mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)) - L(v) \right],$$

où j_K est la fonction d'appui du convexe K : $j_K(e) \equiv \inf_{\tau \in K} (e, \tau)$ et toujours une solution que l'on appellera u .

Démonstration : On remarque, tout d'abord, que

$$\inf_{v \in V} [(\sigma, \varepsilon(v)) - L(v)] = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \in M(L) \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

s'écrire :

$$\inf_{\sigma \in Y} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + (\sigma, \varepsilon(v)) - L(v) \right].$$

Le dual est donc :

$$\sup_{\sigma \in Y} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + (\sigma, \varepsilon(v)) - L(v) \right].$$

Pour expliciter ce problème, on remarque que

$$\|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 = \inf_{e \in K} \|\sigma - e\|^2.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + (\sigma, \varepsilon(v)) &= \sup_{\sigma \in Y} \sup_{e \in K} \left[(\sigma, \varepsilon(v)) - \frac{1}{4\mu} \|\sigma - e\|^2 \right] \\ &= \sup_{e \in K} \sup_{\sigma \in Y} \left[(\sigma, \varepsilon(v)) - \frac{1}{4\mu} \|\sigma - e\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Sur les deux "sup", ce qui est toujours licite; le "sup" en σ est $\sigma = e + 2\mu \varepsilon(v)$, et vaut

$$(\varepsilon(v), \varepsilon(v)) - \frac{1}{4\mu} \|2\mu \varepsilon(v)\|^2 = (e, \varepsilon(v)) + \mu \|\varepsilon(v)\|^2,$$

donc, la valeur de l'expression (2.1) :

$$\mu \|\varepsilon(v)\|^2 + \sup_{e \in K} (e, \varepsilon(v)) = \mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)),$$

l'existence de la solution u est enfin une conséquence du fait

qu'il existe une norme sur V . ■

Remarques :

1) Ce résultat est très général, et ne dépend pas du choix de l'opérateur ε .

2) Indiquons, brièvement, la dépendance de u en μ (viscosité).

Appelons, momentanément, u_μ la solution du problème (P*) en indiquant qu'elle dépend de μ ; u_μ est solution de l'inéquation

$$(2.2) \quad \mu(\varepsilon(u_\mu), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\mu)) + j_K(\varepsilon(v)) - j_K(\varepsilon(u_\mu)) + L(v - u_\mu) \leq 0$$

Multiplions (2.2) par $\mu (> 0)$, j_K étant positivement homogène et V étant un espace vectoriel, on a

$$(\varepsilon(\mu \cdot u_\mu), \varepsilon(v) - \varepsilon(\mu \cdot u_\mu)) + j_K(\varepsilon(v)) - j_K(\varepsilon(\mu \cdot u_\mu)) + L(v - \mu \cdot u_\mu) \leq 0$$

qui montre que

$$\mu \cdot u_\mu = u_1$$

est la solution du problème (P*) où la viscosité est prise égale à 1.

3) Le fait d'avoir pénalisé le problème (P) apparaît comme une régularisation du dual (P*). ■

COROLLAIRE 2.1 : Si (P) admet une solution σ , alors σ est solution de (P*) par la relation d'extrémalité

$$(2.3) \quad \varepsilon(\sigma) = \frac{1}{2\mu} (\sigma - P_K(\sigma)).$$

Démonstration : La relation d'extrémalité [7] exprime que σ est au sous-gradient de la fonctionnelle $\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + L(v - \sigma)$. Cette fonctionnelle est différentiable et son gradient vaut $\frac{1}{2\mu} (\sigma - P_K(\sigma))$.

ut se servir des résultats qui précèdent pour démontrer
 ts classiques de la théorie des charges limites : [19]

: Dire que L est charge excessive équivaut à

$$v \in V \text{ avec } j_K(\epsilon(v_0)) < L(v_0).$$

Le théorème 2.1 montre que

$$j_K(\epsilon(v)) - L(v) = \sup_{\sigma \in M(L)} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 \right].$$

On a trivialement l'inégalité

$$j_K(\epsilon(v)) - L(v) \geq j_K(\epsilon(v_0)) - L(v_0),$$

$$-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 \geq \inf_{v \in V} [j_K(\epsilon(v)) - L(v)].$$

fait dans la suite) on a prouvé que le sup en σ est atteint
 e solution pour (P), alors L , charge excessive, entraîne
 négatif, d'où (2.4).

roquement, supposons (2.4) vérifié ; alors, on choisit

$$\mu_0 < \mu_0 < \frac{j_K(\epsilon(v_0)) - L(v_0)}{\|\epsilon(v_0)\|^2} ;$$

$$\mu_0 \|\epsilon(v_0)\|^2 + j_K(\epsilon(v_0)) - L(v_0) < 0 ,$$

ue la solution du problème $(P_{\mu_0}^*)$ correspondant est différente
 L est charge excessive. ■

3 - CAS D'UN CRITÈRE DE PLASTICITÉ NE PORTANT QUE

On va envisager ici le cas où le critère de plasti-
 que sur le déviateur. On suppose que

$$(3.1) \quad f(\tau) = \varphi(\tau^D) \quad (\tau^D \text{ défini en (1.6)})$$

où $\varphi : \mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que

$$(3.2) \quad \{ e \in \mathbb{R}^{N^2} \mid \varphi(e) \leq 0 \} \text{ soit borné}$$

(c'est le cas pour le critère de Von Misès, et aussi de Tre-

Evidemment, le convexe K lui-même n'est pas borné
 déviateur est invariant par l'addition d'une pression arbit-

$$(\tau_{ij} + p \delta_{ij})^D = \tau_{ij}^D, \quad \forall p \in L^2(\Omega), \text{ p.p.}$$

L'existence d'une solution pour le problème (P) n
 comme dans le cas où K est borné.

On va montrer le

THEOREME 3.1 : Si Ω est assez régulier, alors, sous les hy-
 (3.2), le problème (P) admet une au moins une solution σ .

Ce résultat s'appuie sur les deux lemmes suivants

LEMME 3.1 : Si Ω est un ouvert à frontière Lipschitz, alors

$$(3.3) \quad |p|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C |\text{grad } p|_{(H^{-1}(\Omega))^N}.$$

Démonstration : Dans le cas où Ω est régulier, on se réfère
 STAMPACCHIA [15], et dans le cas général, à BOLLEY-CAMUS [3]

est (R) la relation d'équivalence sur Y :

$$\sigma \sim \tau \iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} + C \delta_{ij} \quad \text{p.p.}$$

"Schwartz", et si

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

majoration

$$\|\sigma\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C (1 + |\sigma^D|_Y).$$

Posons

$$f_i = f_i - \sum_{j \neq i} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N ;$$

$$f_{ii,j} = \sigma_{ii,j}^D \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N .$$

Les distributions étant continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$\|f_i\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C (1 + |\sigma^D|_Y)$$

Les éléments hors-diagonale de σ et σ^D sont égaux, et

$$\|f_{ii,j}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C |\sigma^D|_Y .$$

D'après (1.6), (3.4), (3.6), (3.7), que les N^2 quantités $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq N$, sont solutions du système linéaire (dans $H^{-1}(\Omega)$)

$$f_i = C_i \quad 1 \leq i \leq N ;$$

$$-\frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_j} \right) = b_{ij} \quad , \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N .$$

Ce système de N^2 équations à N^2 inconnues est inversible (il suffit de vérifier pour $N = 2$ ou 3), on a ainsi

$$\|\text{grad } \sigma_{ii}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C (1 + |\sigma^D|_Y).$$

En appliquant alors le lemme 3.1 à chacun des σ_{ii} , on obtient l'annoncée. ■

Démonstration du théorème 3.1 : On applique, d'abord, le lemme 3.2

Le lemme 3.2 montre, ensuite, la coercivité du problème (P*) par conséquent, l'existence d'une solution σ , dont la trace est définie à une constante additive près, si $\Gamma_F = \emptyset$. Si $\Gamma_F \neq \emptyset$ non nulle, la condition aux limites $\sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j = F_i$ sur Γ_F est constante. ■

Remarques :

1) Condition d'incompressibilité.

Dans le cas, où l'on s'est placé, d'un critère de coercivité dépendant que du déviateur, on voit que

$$j_K(e) = \sup_{\tau \in K} (\tau, e) = \sup_{\varphi(\tau^D) \leq 0} (\tau^D, e) + \sup_{p \in L^2(\Omega)} (p, \sum_{k=1}^N e_{kk}).$$

En effet, si $\tau^D \in K$, alors $\tau^D + p \delta_{ij} \in K$ aussi.

On voit que le premier terme est borné d'après (3.1) et le second terme n'est autre que la fonction indicatrice du cône des tenseurs à trace nulle

$$Y_1 = \{ e \in Y \mid \sum_{k=1}^N e_{kk} = 0 \} .$$

On voit donc que le problème (P*) est en fait un problème de divergence nulle.

Critère de Von Misès.

ut particulariser le calcul précédent au critère de Von Misès.

s :

$$= g \int_{\Omega} |c| \, dX + \psi_1(e)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } e \in Y_1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} ,$$

indicatrice de Y_1 .

problème (P*) apparaît, alors, comme un problème de Bingham

[12] [6] (sans termes d'accélération).

problème (P) s'écrirait ([16]) :

$$- \frac{1}{4\mu} \| |\sigma^D| - g \|^2 ,$$

d'extrémalité (2.3) apparait, alors, comme la loi de comportement

ingham.

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma^D| \leq g \\ \frac{\sigma^D}{2\mu} (1 - \frac{g}{|\sigma^D|}) & \text{sinon.} \end{cases} \blacksquare$$

4 - CARACTÉRISATION DES CHARGES ADMISSIBLES.

On se place dans un cas où le problème (P) admet a solution, $\forall L \in V'$ (c'est le cas dans la situation du parag ou si K est borné).

Pour une charge $L \in V'$, on note σ_L et u_L les problèmes (P) et (P*) associés (σ_L peut ne pas être unie

THEOREME 4.1 : On a la suite d'équivalences ;

$$L \text{ charge admissible } (L \in C) \iff \sigma_L \in K \iff u_L = 0.$$

Démonstration : Montrons la propriété aller.

Si L est charge admissible, alors $\exists \sigma_1 \in K \cap M(L)$

$$\sigma_1 = P_K(\sigma_1) \quad \text{et} \quad \sigma_1 \text{ est une}$$

car

$$- \frac{1}{4\mu} \| \sigma_1 - P_K(\sigma_1) \|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_1 \in M(L) ;$$

or

$$- \frac{1}{4\mu} \| \sigma - P_K(\sigma) \|^2 \leq 0 \quad , \quad \forall \sigma .$$

Donc, toute solution σ_L de (P) vérifie $\sigma_L - \sigma_L \in K$.

La relation d'extrémalité (2.3) montre, alors, que et l'inégalité de Korn et les conditions aux limites montrent

Réciproquement, si $u_L = 0$, alors l'existence d'un au problème (P) , et la relation d'extrémalité (2.3) montrent

Par conséquent, $\sigma_L \in K \cap M(L)$, et donc L est ch

La portée pratique de ce résultat est très intéress si une charge est admissible, il suffit de résoudre le probl voir si la solution correspondante est nulle.

: Si $u_L \neq 0$, alors L est charge excessive ($L \notin C$),
 a

$$\langle u_L, L - L_1 \rangle_{V'} \geq 0, \quad \forall L_1 \in C.$$

où u_L est le vecteur normal à un hyperplan séparant L de C .

La première partie résulte immédiatement de ce qui précède.

Relation (4.1) :

À la relation d'extrémalité (2.3), on a

$$\frac{1}{2\mu} (\sigma_L - P_K(\sigma_L), \sigma_L - \tau) \geq 0, \quad \forall \tau \in K;$$

$\tau \in K \cap M(L_1)$ (ce qui est possible $\forall L_1 \in C$), on a donc,

la définition de $M(L)$,

$$\langle u_L, L - L_1 \rangle_{V'} \geq 0, \quad \forall L_1 \in C. \quad \blacksquare$$

Si l'on se restreint à ne considérer que des charges appartenant à un espace de dimension finie H (par exemple 2 ou 3), le résultat permet de tracer, pour toute charge excessive, un hyperplan extérieur à C .
 On peut d'avoir une idée, peut-être plus précise, du convexe C .

5 - APPROXIMATION.

On se place dans la situation (plus difficile) du § 4 où le critère de plasticité ne porte que sur le déviateur (σ). Si σ serait borné, serait traité de façon analogue, mais plus simple.

Pour se ramener en dimension finie, on va approximer V et Y par $V_h \subset V$ et $Y_h \subset Y$.

Comme on l'a vu, le critère de plasticité ne porte que sur le déviateur, les champs de vitesse à divergence nulle joueront un rôle primordial.

$$V_1 = \left\{ v \in V \mid \operatorname{div} v = 0 \right\};$$

soit, alors,

$$W_h = \left\{ v \in V_h \mid \operatorname{div} v = 0 \right\}.$$

On suppose que V_h, W_h et Y_h sont des approximations de V, V_1 et Y , ce qui s'écrit, dans le cas de W_h ,

$$(5.1) \quad \forall v \in V_1, \exists v_h \in W_h \text{ avec } v_h \rightarrow v \text{ dans } V$$

On fait l'hypothèse de compatibilité entre V_h et Y_h :

$$(5.2) \quad \varepsilon(V_h) \subset Y_h.$$

On approche, alors, le problème aux vitesses (P^*) par

$$(P_h^*) : \inf_{v \in V_h} \mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)) - L(v).$$

THEOREME 5.1 : Soit u_h la solution du problème (P_h^*)

1) On a $u_h \rightarrow u$ quand $h \rightarrow 0$.

2) On a l'estimation d'erreur

$$\|u_h - u\|^2 \leq C (\|v_h - u\|^2 + \|v_h - u\|), \quad \forall v_h \in V_h$$

Puisque l'on est dans la situation du paragraphe 3, la
 résulte de l'hypothèse (5.1), et d'un résultat de GLOWINSKI-
 RES [14].

de façon analogue à GLOWINSKI [13], on écrit que u et u_h sont
 inéquations variationnelles

$$j(\varepsilon(v)) - \varepsilon(u) + j(\varepsilon(v)) - j(\varepsilon(u)) + L(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in V_1;$$

$$j(\varepsilon(v_h)) - \varepsilon(u_h) + j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u_h)) + L(v_h - u_h) \geq 0, \quad \forall v_h \in W_h,$$

$$j(e) = \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e).$$

alors (5.3), écrit pour $v = u_h$, à (5.4), d'où

$$j(\varepsilon(u_h)) - \varepsilon(u) + (\varepsilon(u_h), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)) + j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u)) + L(v_h - u) \geq 0,$$

écrire

$$j(\varepsilon(u_h)) - \varepsilon(u) + (\varepsilon(u_h), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)) + L(v_h - u) + j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u)) + (\varepsilon(u), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)).$$

ors que

$$j(e_1) - j(e_2) \leq j(e_1 - e_2).$$

$$j(\tau, e_2 + e_3) \leq \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e_2) + \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e_3) \leq j(e_2) + j(e_3).$$

posant

$$e_3 = e_1 - e_2.$$

En appliquant (5.5), on a

$$j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u)) \leq j(\varepsilon(v_h - u)) \leq C \int_{\Omega} |\varepsilon(v_h - u)| dx \leq C (\text{mes } \Omega)^{1/2} \|v_h - u\|_V$$

Par ailleurs, on a

$$(5.6) \quad (\varepsilon(u_h) - \varepsilon(u), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)) \leq C \left(\frac{\alpha}{2} \|u_h - u\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \|v_h - u\|^2 \right)$$

et

$$(5.7) \quad L(v_h - u) \leq \|L\|_* \|v_h - u\|_V, \quad (\| \cdot \|_* \text{ désigne la norme du dual de } V)$$

d'où le résultat, en choisissant α assez petit. ■

Problème primal approché.

On vérifie, facilement, grâce à l'hypothèse (5.2)

le dual du problème

$$(P_h) \quad \sup_{\tau \in M_h(L)} - \frac{1}{4\mu} \|\tau - P_K(\tau)\|^2$$

où

$$M_h(L) = \left\{ \tau \in Y_h \mid (\tau, \varepsilon(v_h)) = L(v_h), \quad \forall v_h \in W_h \right\}$$

qui apparaît comme un discrétisé du problème (P).

Soit

$$Z_h = \left\{ p \in L^2(\Omega) \mid \exists \tau \in Y_h \text{ avec } p = \sum_{k=1}^N \tau_{kk} \right\}$$

l'espace des traces des éléments de Y_h , on est conduit à
 supplémentaire

$$(5.8) \quad \text{div} : V_h \rightarrow Z_h \text{ est surjective.}$$

Sous l'hypothèse (5.8), le problème (P_h) admet au moins une solution u_h , liée à u_h par la relation d'extrémalité

$$\varepsilon(v_h) = \frac{1}{2\mu} (\sigma_h - P_K(\sigma_h)).$$

Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que la forme sur $M_h(0)$ (en effet, puisque l'on est dans la situation (3), on a

$$P_K(\tau) \|^2 \geq C \|\tau^D\|^2 - C).$$

posons donc que $\tau^D = 0$. On a alors

$$\delta_{ij} p \cdot p \text{ avec } p \in Z_h$$

$$) = - (p, \operatorname{div} v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$p = 0$$

thèse (5.8). ■

Si K était borné, la coercivité du problème (P_h) serait inutile. ■

des charges limites.

appelle C_h le convexe des charges admissibles "approchées" :

$$= \left\{ L \in V' \mid K \cap M_h(L) \neq \emptyset \right\}$$

cas continu, on montrerait le

On a la suite d'équivalences

$$C_h \Leftrightarrow \sigma_h \in K \Leftrightarrow u_h = 0.$$

Pour obtenir une estimation d'erreur, on établit les majorations suivantes :

THEOREME 5.4 : Etant donnée une charge L , on appelle u le problème (P^*) associé.

Si $L \notin C$, alors on a

$$(5.10) \quad d(L, C) \equiv \inf_{L_1 \in C} \|L - L_1\|_* \leq C \mu \|u\|_V$$

Démonstration : Soit σ une solution du problème (P) associée à L . Soit $\sigma_0 = P_K(\sigma)$.

La forme linéaire $L_0 : v \in V \rightarrow L_0(v) = (\sigma_0, \varepsilon(v))$ appartient à $L_0 \in V'$, et on a

$$\begin{aligned} \|L - L_0\|_* &\equiv \sup_{v \in V} \frac{|L(v) - L_0(v)|}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \in V} \frac{((\sigma - \sigma_0), \varepsilon(v))}{\|v\|_V} \leq \|\sigma - \sigma_0\|_V \end{aligned}$$

Mais, d'après la relation d'extrémalité (2.3), on a $\sigma - \sigma_0 \in K - K$. D'après (5.10), en remarquant que $\tau \in M(L_0) \cap K \Rightarrow L_0 \in C$.

Remarque : La propriété (5.10) est un résultat qui n'a rien de remarquable pour l'approximation. Cela étant, pour une charge L , la seule condition qui puisse être sûr numériquement est que la solution u_h du problème (P_h) est nulle. Comme on sait que $\|u - u_h\| \rightarrow 0$, on voit qu'à condition que pour h assez petit, on ne sera pas trop loin de C .

On verra, par la suite, que si V_h est un espace de fonctions linéaires par morceaux, alors $C \subset C_h$. On aura donc, dans le cas de convergence de C_h vers C :

$$(5.11) \quad C \subset C_h \text{ et } \forall L \in C_h, \text{ alors } \exists h_0 \text{ avec } h \leq h_0 \Rightarrow L \in C$$

va voir, maintenant, que l'on peut même obtenir, sous une régularité, une estimation d'erreur pour la distance entre

erreur.
va supposer que l'on a un résultat de régularité pour le problème

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C |L|_H$$

ut être égal à $(|f_i|_{0,\Omega}^2 + |F_i|_{1/2,\Gamma}^2)^{1/2}$, si l'on est au paragraphe 1, ou à une autre norme ($\|\cdot\|_{s,H}$ désigne la norme de $H^s(\Omega)$).

arquons que si les conditions aux limites sont vraiment de , on ne peut pas, en général, s'attendre à un tel résultat. tel est le cas, alors,

1 : Si l'approximation de V_1 par W_h est en "O(h)" :

$$\|u - v_h\|_V \leq C h \|u\|_{2,\Omega}$$

approximation de C par C_h est en $O(\sqrt{h})$:

$$C_h, d(L, C) \leq C \sqrt{h} |L|_H$$

6 - APPLICATION A UN ÉLÉMENT FINI DU PREMIER DEGRÉ

On pourrait traiter, très facilement, le cas où et tout marcherait bien. Dans le cas du paragraphe 3, des surviennent du fait qu'il faut approcher des champs de vitesse nulle.

On suppose, maintenant, que l'on est en dimension va appliquer les résultats qui précèdent à un élément fini à divergence nulle, particulièrement adapté à ce genre de situation. reusement, on ne sait démontrer les propriétés de convergence que dans le cas d'un maillage uniforme. On le décrira, néanmoins, en cas général.

On désignera par \mathbb{P}_1 l'espace des polynômes de degré 1.

6.1 - Description de l'élément.

On considère un quadrilatère convexe, que l'on découpe en traçant ses 2 diagonales (Fig. 2) ([17]).

On va construire, sur ce quadrilatère, un champ de vecteurs et linéaire sur chaque triangle, et à divergence constante.

- a) sur le triangle I (Fig. 2), on pose $\vec{u} = \vec{p}_1$, avec
- b) sur le triangle II, on pose $\vec{u} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ avec \vec{p}_2 sur la diagonale $m_2 m_4$ (Fig), $\text{div } \vec{p}_2 = 0$.
- c) sur le triangle III, on pose, de même, $\vec{u} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ avec $\vec{p}_3 \in (\mathbb{P}_1)^2$, $\vec{p}_3 = 0$ sur $m_1 m_3$, $\text{div } \vec{p}_3 = 0$
- d) on choisit alors $\vec{u} = \vec{p}_1 + \vec{p}_3$ sur IV, et

on vérifie que le champ de vecteurs \vec{u} , ainsi construit, a une divergence constante sur le quadrilatère, qu'il est continu et \mathbb{P}_1 par rapport à chaque triangle. Il dépend de 8 paramètres arbitraires. On vérifie, alors, qu'il

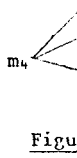


Figure 2

de liberté, les valeurs de \vec{u} aux 4 sommets du quadrilatère qui achève la description de fini.

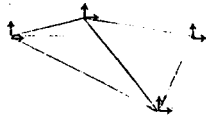


Figure 3 : élément fini utilisé.

- Approximation de V .

On donne, maintenant, une famille T_h de découpages de Ω en triangles ($0 < h < 1$), et on appellera V_h l'espace des champs de vecteurs continus, P_1 sur chacun des 4 triangles de chaque quadrilatère. La convergence est constante sur chaque quadrilatère, comme dans la cas précédente (on vérifie que $V_h \subset V$).

On appellera Y_h le sous-espace de Y , de tenseurs constants par triangle (chaque triangle), et dont la trace est constante par quadrilatère.

On vérifie que ϵ applique V_h dans Y_h .

On démontre, facilement, que, dans ce cas, $C \subset C_h$, $\forall h$, en

En fait, si le maillage T_h est assez régulier, on peut démontrer la propriété (5.8) (l'espace des pressions, Z_h , est un espace de constantes par triangle) [17].

Enfin, si le maillage T_h est uniforme, et constitué de parallélogrammes, on peut démontrer les propriétés de convergence (5.1) et (5.13) [20], et on a le résultat de convergence suivant de C_h vers C :

$$C_h \supset C, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } h < h_0 \Rightarrow L \notin C_h,$$

ce qui est également vrai si l'on se restreint à ne considérer des charges appartenant à un sous-espace de dimension finie.

On a, maintenant, un résultat de régularité du type (5.12)

qui est vrai dans le cas particulier du problème de Mossolov, Cf [4]),

et l'estimation d'erreur (5.14) dans V' .

7 - RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

On a étudié le problème de la hauteur limite d'un talus de terre, soumis à son propre poids (Fig. 4). Soit H_0 la hauteur du talus, γ l'accélération de la pesanteur (Fig 4). On suppose que le matériau est satisfait au critère de Von Mises (1.5). On s'intéresse, en fait, à la valeur limite du rapport $\beta = \frac{H_0 \gamma \sqrt{2}}{g}$ [19]. Dans nos expériences, nous avons pris $H_0 = \gamma = 1$, et fait varier β . Les essais numériques ont été faits en collaboration avec M. L.

7.1 - Approximations utilisées.

Numériquement, le problème consiste essentiellement à résoudre le problème aux vitesses (P_h^*) pour g donné. Dans le cas où les conditions aux limites sont entièrement de type Dirichlet ($\Gamma_F = \emptyset$), les résultats numériques, pour ce type de problème, par différences finies ou par éléments finis de degré 2 [9]. Le fait que Γ_F soit non vide, malheureusement, l'utilisation d'éléments non conformes [5] rend la matrice discrétisant $\|\epsilon(v)\|^2$ n'est plus nécessairement définie.

On a, d'abord, utilisé une approximation par éléments finis (Q_1 est l'espace des polynômes du 1er degré en chacune des directions). On a utilisé l'intégration numérique, au centre de chaque élément. Bien que l'on ne peut pas démontrer de convergence en général pour cette méthode, elle a été essayée, car elle est couramment utilisée [2] [18].

Ayant constaté des instabilités pour les ordres élevés de h , les vitesses obtenues, sur deux réseaux décalés (comme les cases noires et blanches d'un damier), nous avons aussi utilisé l'approximation par éléments finis au paragraphe 6. C'est d'ailleurs ce fait qui constitue notre motivation principale pour son étude.

Les maillages utilisés étaient uniformes, de pas

Algorithmes de résolution.

utilisé deux algorithmes différents : le premier est un type Uzawa, décrit dans [9], le deuxième, un algorithme de pénalisation-dualité, décrit dans [11], [16].

L'expérience acquise avec le deuxième algorithme nous a permis d'augmenter beaucoup la convergence du premier, en pénalisant fortement la contrainte $\text{div } u_h = 0$. Les performances des deux algorithmes se sont avérées comparables.

En fait, les difficultés du problème (P_h^*) sont de deux ordres : la première est la contrainte d'incompressibilité $\text{div } u_h = 0$; la deuxième, la non-différentiabilité de la fonctionnelle j_K . L'algorithme d'Uzawa est efficace pour la non-différentiabilité, mais peu pour la contrainte d'incompressibilité, d'où l'idée de la pénaliser fortement.

d'Uzawa :

$\mu > 0$ donnés, p^n et σ^n étant donnés par récurrence, v^{n+1} minimisant sur V_h :

$$\frac{\alpha}{2} \|\text{div } v\|^2 + g(\sigma^n, \epsilon(v)) + \int_{\Omega} p^n \text{div } v \, dX - L(v) .$$

$$\sigma^{n+1} = P_K (\sigma^n + \rho_1 \epsilon^D(v^{n+1}))$$

$$p^{n+1} = p^n + \rho_2 \text{div } v^{n+1} . \blacksquare$$

de pénalisation-dualité :

étant donnés, e^n et σ^n étant donnés par récurrence, v^{n+1} minimisant sur V_h :

$$\frac{\alpha}{2} \|e\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\text{div } v\|^2 + (\sigma^n - r e^n, \epsilon(v)) - L(v) .$$

Calculer

$$\psi = r \epsilon(v^{n+1}) + \sigma^n$$

$$e^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\psi^D| \leq g \\ \frac{\psi^D}{2\mu + r} (1 - \frac{g}{|\psi^D|}) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + r (\epsilon(v^{n+1}) - e^{n+1}) + \alpha \text{div } v^{n+1}$$

(δ désigne le tenseur de Kronecker).

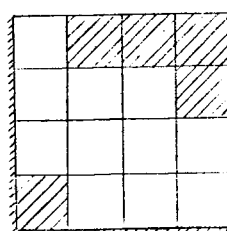
L'algorithme de pénalisation-dualité est, en effet, équivalent à l'algorithme d'Uzawa appliqué au Lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}(v, e; \sigma) = \mu \|e\|^2 + j(e) - L(v) + (\sigma, \epsilon(v) - e) + \frac{r}{2} \|e\|^2$$

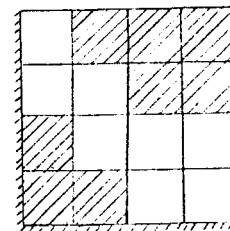
7.3 - Résultats.

1) Éléments finis Q_1 avec intégration numérique

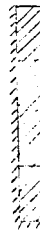
a) $h = 1/4$ (32 variables, 16 éléments).



$g = 0.33$



$g = 0.36$



($g = \dots$)

Figure 5 : Tracé des zones rigides (hachures) pour diverses valeurs de g .

8 (128 variables, 64 éléments)

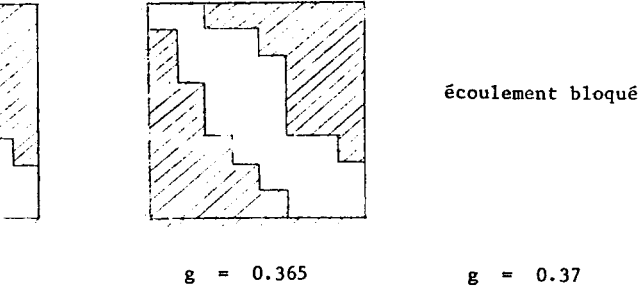


Figure 6 : répartition des zones rigides (hachurées) pour $h = 1/8$ (éléments Q_1)

éléments finis P_1 à divergence nulle.

és par P. LORBER). Les essais ont été effectués avec $h = 1/10e$

nd à 100 éléments (coupés chacun en 4), et 200 variables.

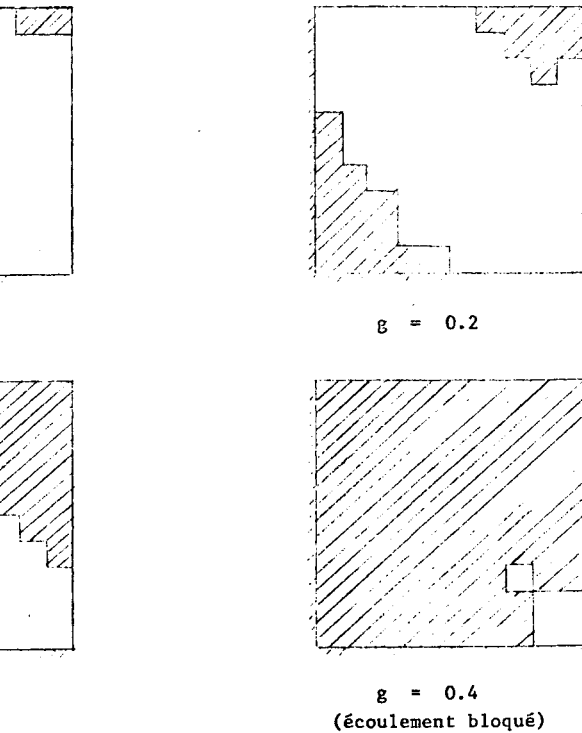


Figure 7 : Répartition des zones rigides (hachurées) pour $h = 1/10e$ (éléments P_1 à divergence nulle).

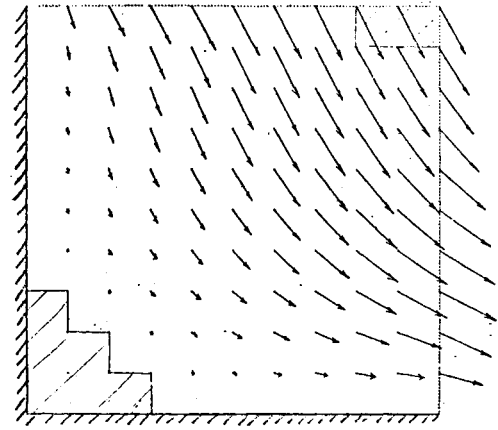


Figure 8 : Champs de vitesse ($g = 0.1$, $h = 1/10e$) (élément fini P_1 à divergence nulle)

Chacun des deux algorithmes utilisés convergeait en un nombre d'itérations inférieur à 100, et l'on avait pénalisé assez fortement la contrainte de divergence nulle ($\alpha = 100$), ce qui se révélait efficace. Le temps machine pour 128 variables est 5" sur IBM 370/16.

Insistons, enfin, sur le fait que l'élément fini P_1 à divergence nulle supprime les instabilités en vitesse, observées avec l'élément Q_1 + intégration numérique.

Pour le rapport β , on obtient la majoration 3.14159... ce qui, compte-tenu des simplifications apportées au domaine (à l'infini), semble satisfaisant [19].

Remarquons, enfin, qu'il n'y a pas de difficulté à obtenir la nullité d'un champ de vitesse en pratique : par exemple, en utilisant la pénalisation-dualité, on voit que la nullité de la solution est atteinte par $|\psi^D| \leq g$.

BIBLIOGRAPHIE

IS, Thèse de 3ème cycle, Paris (1972).

COVIER, Thèse (à paraître).

LEY, J. CAMUS, Régularité pour des systèmes à coefficients constants, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 282, Série A, 1975, 45-47.

ZIS, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non linear partial differential equations, Contributions to non linear functional analysis, E. Zarantonello (ed.), Academic Press, New York (1971), 101-156.

UZEIX, P.A. RAVIART, Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, R.A.I.R.O., R-3, Déc. 1973, 33-76.

AUT, J.L. LIONS, Les inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1972.

LAND, R. TEMAM, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris, 1973.

ALK, B. MERCIER, Estimation d'erreur en élasto-plasticité, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 282, Série A, 645-648 (1976).

TIN, Thèse d'Etat, Paris (1972).

MOND, M. PECKER, J. SALENÇON, Méthode variationnelle pour le matériau rigide-plastique, Rapport interne, Ecole Polytechnique, Laboratoire de Mécanique des Solides (1975).

AY, B. MERCIER, A dual algorithm for the solution on nonlinear variational problems via finite element approximation, Comp. and Math. with Applications (à paraître).

MAIN, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Masson, Paris, 1962.

WINSKI, Sur l'approximation d'une inéquation variationnelle elliptique de type Bingham, R.A.I.R.O. (à paraître).

WINSKI, J.L. LIONS, R. TREMOLIERES, Approximation des inéquations variationnelles, Dunod, Paris (1976, sous presse).

ENES, G. STAMPACCHIA, I problema al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Série III, Vol. XII, fasc. III (1958), 247-357, note 27, p. 320.

CIER, Une méthode de résolution du problème des charges limites utilisant les fluides de Bingham, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 281, Série A, 1975, 525-527.

CIER, non publié.

[18]. J.C. NACTEDAAL, D.M. PARKS, J.R. RICE, On numerical element solutions in the fully plastic range, Applied Mech. and Eng., 4 (1974), 153-177.

[19]. J. SALENÇON, Théorie de la plasticité, Eyrolles, Paris.

[20]. R. TEMAM, On the theory and numerical analysis of the Stokes equations, Université Paris XI, Orsay, France.