

JEAN-PIERRE CONZE

**Approximations périodiques, automorphismes spéciaux
et produits gauches**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__1_A3_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATIONS PERIODIQUES , AUTOMORPHISMES
SPECIAUX ET PRODUITS GAUCHES .

Jean Pierre CONZE

INTRODUCTION .

Considérons un espace probabilisé (X, \mathcal{A}, μ) et un automorphisme T de cet espace . A cet automorphisme est associé un opérateur unitaire , noté encore T , défini sur $L^2(\mu)$ par $(Tf)(x) = f(Tx)$, $f \in L^2(\mu)$.

L'étude des propriétés spectrales (multiplicité , singularité du spectre , mélange , ...) de l'opérateur ainsi associé à un automorphisme d'espace mesuré tient une place importante en théorie ergodique .

Dans [7] KATOK et STEPIN ont introduit la méthode des approximations périodiques , qui permet d'étudier les propriétés spectrales de certains automorphismes , les automorphismes bien approchés par les automorphismes périodiques , dont les rotations sont des exemples typiques .

A la suite de [7] , de nombreux auteurs ont développé cette méthode , l'appliquant , en particulier , aux automorphismes obtenus par extension d'automorphismes donnés , ou comme automorphismes spéciaux .

Dans cet article , qui est , pour l'essentiel , un article d'exposition , nous nous proposons de rassembler , et dans certains cas d'étendre , quelques uns de ces résultats .

NOTATIONS:

On note \langle , \rangle et $\| \cdot \|$ le produit scalaire et la norme d'éléments de $L^2(\mu)$. Pour $w \in L^2(\mu)$ et U un opérateur unitaire dans $L^2(\mu)$, on désigne par $H_U(w)$ le sous espace engendré dans $L^2(\mu)$ par w et ses images $U^k w, k = \pm 1, \pm 2, \dots$

On appelle partition dans X toute famille ordonnée $\zeta_n = (C_i, i=1, 2, \dots)$ d'ensembles mesurables disjoints de X (dont la réunion n'est pas nécessairement X). Etant donnée une suite (ζ_n) de partitions dans X , on note $\zeta_n \rightarrow \mathcal{E}_X$ la condition :
 pour tout ensemble mesurable A , il existe des ensembles $A(n)$, ζ_n -mesurables (c'est à dire formés d'éléments de ζ_n) tels que $\lim_n \mu(A \Delta A(n)) = 0$.

I . APPROXIMATIONS PERIODIQUES ET PROPRIETES SPECTRALES .

MULTIPLICITE SPECTRALE .

(pour la notion de multiplicité spectrale, voir par exemple HALMOS [6])

Lemme 1. [KATOK - STEPIN [7], CHACON [2]] . Si la multiplicité spectrale d'un opérateur unitaire U est $> m$, il existe $m+1$ vecteurs unitaires u_1, \dots, u_{m+1} , tels que, pour tout vecteur w , on ait :

$$\sum_{i=1, \dots, m+1} d^2(u_i, H_U(w)) \geq m .$$

Lemme 2. Soit $\zeta = (C_i, i=1, \dots, q)$ une partition dans X . Pour toute fonction v de la forme $v = \sum_i a_i 1_{C_i}$, les a_i étant des constantes, on a :

$$\|v - v'\|^2 \leq \|v\|^2 (1 - \mu(B) / \sup_i \mu(C_i)) ,$$

où $B = \bigcap_{j=1}^q T^{-j+1} C_j$, et $v' = \sum_i a_i 1_{T^i B}$.

Preuve : On a $T^i B \subset C_i$, $i=1, \dots, q$; d'où il résulte :

$$\begin{aligned} \left\| \sum a_i 1_{C_i} - \sum a_i 1_{T^i B} \right\|^2 &= \left\| \sum a_i 1_{C_i - T^i B} \right\|^2 = \sum |a_i|^2 \mu(C_i - T^i B) \\ &\leq \left(\sum |a_i|^2 \mu(C_i) \right) \sup_i \left[\frac{\mu(C_i - T^i B)}{\mu(C_i)} \right] = \|v\|^2 (1 - \mu(B) / \sup_i \mu(C_i)) . \end{aligned}$$

Proposition 1 . Soit (ξ_n) , $\xi_n = (C_i(n), i=1, \dots, q_n)$, une suite de partitions de X telle que $\xi_n \rightarrow \xi_X$. S'il existe un entier m et une constante $\alpha < m+1$ tels que

$$\sup \mu(C_i(n)) \leq \alpha \mu\left(\bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1} C_j(n)\right) , \text{ pour tout } n ,$$

la multiplicité spectrale de T est au plus m .

Preuve : Posons $B_n = \bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1} C_j(n)$, et $w_n = 1_{B_n}$.

Pour toute fonction v dans $L^2(\mu)$, ξ_n -mesurable , on a , d'après le lemme 2 ,

$$\begin{aligned} d^2(v, H_T(w_n)) &\leq \|v\|^2 (1 - \mu(B_n) / \sup \mu(C_i(n))) \\ &\leq \|v\|^2 (1 - 1/\alpha) . \end{aligned}$$

Etant donnée u dans $L^2(\mu)$, on peut écrire : $u = v_n + h_n$, avec v_n ξ_n -mesurable et $\lim_n \|h_n\| = 0$. On a donc :

$$d^2(u, H_T(w_n)) \leq \|u_n\|^2 (1 - 1/\alpha) + \|h_n\| \|u\|$$

d'où : $\lim_n \sup d^2(u, H_T(w_n)) \leq \|u\|^2 (1 - 1/\alpha) < \|u\|^2_{m/m+1}$, si $u \neq 0$

Si la multiplicité spectrale de T était $> m$, on pourrait , d'après le lemme 1 , trouver des éléments u_1, \dots, u_{m+1} de norme 1 dans $L^2(\mu)$ tels que :

$$\sum_{k=1, \dots, m+1} d^2(u_k, H_T(w_n)) \geq m , \text{ pour tout } n .$$

On aurait donc : $m \leq \lim_n \sup \sum_{k=1, \dots, m+1} d^2(u_k, H_T(w_n)) < m$,

ce qui conduit à une contradiction .

Définition 1 : On dit que l'automorphisme T admet une approximation de vitesse θ/n s'il existe une suite de partitions

$\xi_n = (C_i(n), i=1, \dots, q_n)$ telle que :

- 1) $\xi_n \rightarrow \xi_X$,
- 2) $\sum_{1 \leq i < j \leq q_n} \mu(TC_i(n) \cap C_j(n)) \leq \theta/2q_n$,
- 3) $\lim_n \sup \mu(C_i(n)) = 1$.

Remarques .

1. Si les éléments de chaque partition ξ_n ont la même mesure , la condition d'approximation de vitesse θ/n se réduit à 1) et

$$2') \sum_{1 \leq i < q_n} \mu(TC_i(n) \Delta C_{i+1}(n)) \leq \theta/q_n .$$

2. l'approximation simple (cf. BAXTER [1]) correspond au cas où la constante θ est nulle .

Théorème 1. [STEPIN [10]] . Si un automorphisme T admet une approximation de vitesse θ/n , avec $\theta < 2m/m+1$, où m est un entier , la multiplicité spectrale de T est au plus m .

Preuve : On a la majoration :

$$\begin{aligned} \mu(C_1(n) - \bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1}C_j(n)) &\leq \sum_{j=1}^{q_n-1} \mu(T^{-j+1}C_j(n) \cap T^{-j}C_{j+1}(n)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q_n-1} \mu(TC_j(n) \cap C_{j+1}^c(n)) \leq \theta/2q_n . \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{q_n} T^{-j+1}C_j(n)\right) / \sup \mu(C_i(n)) \geq q_n \mu(C_1(n) - \theta/2) / q_n \sup \mu(C_i(n)) .$$

Le minorant de droite tend vers $1 - \theta/2 > 1/m+1$. La proposition 1 implique le résultat .

SPECTRE SINGULIER .

Lemme 3 . Soient $\xi = (C_i, i=1,2,\dots)$ une partition et $v \in L^2(\mu)$ une fonction ξ -mesurable . On a pour tout entier s :

$$|\langle T^s v, v \rangle - \|v\|_2^2| \leq \|v\|_2^2 \sup [\mu(T^s C_i \Delta C_i) / \mu(C_i)] .$$

Preuve : Soit $C_i^! = C_i \cap T^{-s}C_i$. La fonction v est de la forme

$v = \sum a_i 1_{C_i}$, et on peut écrire $v = v_1 + v_2$, avec $v_1 = \sum a_i 1_{C_i^!}$,

et $v_2 = \sum a_i 1_{C_i - C_i^!}$. Comme v_1 et v_2 sont orthogonaux , ainsi

que $T^s v - v_1$ et v_1 , on a :

$$|\langle T^s v, v \rangle - \|v\|_2^2| \leq \|v_2\|_2^2 + \|T^s v - v_1\| \|v_2\| .$$

D'autre part, on a, d'après $C_i' \subset T^{-s}C_i$ et $\mu(T^{-s}C_i) = \mu(C_i)$,

$$\|T^s v - v_1\|^2 = \sum |a_i|^2 \mu(T^{-s}C_i - C_i') = \sum |a_i|^2 \mu(C_i - C_i') = \|v_2\|^2.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} |\langle T^s v, v \rangle - \|v\|^2| &\leq 2 \|v_2\|^2 = 2 \sum |a_i|^2 \mu(C_i - C_i') \\ &\leq 2 \sum |a_i|^2 \mu(C_i) \sup\left\{ \frac{\mu(C_i - C_i')}{\mu(C_i)} \right\} = \|v\|^2 \sup\left\{ \frac{\mu(T^s C_i \Delta C_i')}{\mu(C_i)} \right\}. \end{aligned}$$

Proposition 2. Soit (ξ_n) , $\xi_n = (C_i(n), i=1, \dots, q_n)$, une suite de partitions de X telle que $\xi_n \rightarrow \xi_X$. S'il existe une suite d'entiers (s_n) tendant vers l'infini, et un nombre fixe $\theta < 1$

tels que : $\sup\left\{ \frac{\mu(T^{s_n} C_i(n) \Delta C_i(n))}{\mu(C_i(n))} \right\} \leq \theta$, l'automorphisme T a un spectre singulier, et n'est pas fortement mélangeant.

Preuve : Soit $u \in L^2(\mu)$, de norme 1. On peut écrire $u = v_n + h_n$; avec v_n ξ_n -mesurable et $\lim_n \|h_n\| = 0$. D'après le lemme 3, on a :

$$|\langle T^{s_n} u, u \rangle| \geq \|u\|^2 (1 - \theta); \text{ d'où } \liminf_n |\langle T^{s_n} u, u \rangle| \geq 1 - \theta > 0.$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue implique que T a un spectre singulier, et il est clair que T ne peut être fortement mélangeant.

Remarque. La condition $\lim_n \sup\left\{ \frac{\mu(T^{s_n} C_i(n) \Delta C_i(n))}{\mu(C_i(n))} \right\} = 0$, implique que T est rigide, c'est à dire vérifie la condition suivante :

il existe une suite (s_n) tendant vers l'infini telle que, pour toute $f \in L^2(\mu)$, $\lim_n \|T^{s_n} f - f\|_2 = 0$.

Définition 2 . On dit que T admet une approximation cyclique (de périodes $q_n, n=1,2,\dots$) de vitesse θ/n (resp. $o(1/n)$), s'il existe une suite de partitions $\xi_n = (C_i(n), i=1,\dots,q_n)$ telle que :

- 1) $\xi_n \rightarrow \xi_\infty$,
- 2) $\sum_{1 \leq i < j \leq q_n} \mu(TC_i(n) \Delta C_{i+1}(n)) + \mu(TC_{q_n}(n) \Delta C_1(n)) \leq \theta/q_n$
(resp. $= o(1/q_n)$)
- 3) $\lim_n \sup_i q_n \mu(C_i(n)) = 1$.

Théorème 2 . [KATOK -STEPIN [7]] . Si l'automorphisme T admet une approximation cyclique de vitesse θ/n , avec $\theta < 1$, il a un spectre singulier, et n'est pas fortement mélangeant .

Preuve : Il suffit de vérifier la condition de la proposition 2, avec $s_n = q_n$.

Faisons la convention $C_{q_n+j} = C_j$. On a, pour $1 \leq i \leq q_n$:

$$\begin{aligned} \mu(T^{q_n} C_i(n) \Delta C_i(n)) &\leq \sum_{0 \leq s < q_n} \mu(T^{q_n-s} C_{i+s}(n) \Delta T^{q_n-s-1} C_{i+s+1}(n)) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq q_n} \mu(TC_j(n) \Delta C_{j+1}(n)) \leq \theta/q_n . \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\sup_i \left[\mu(T^{q_n} C_i(n) \Delta C_{i+1}(n)) / \mu(C_i(n)) \right] \leq \theta/q_n \inf_i \mu(C_i(n)) ,$$

majorant qui tend vers $\theta < 1$, quand n tend vers l'infini .

Remarques .

- 1) Si T admet une approximation cyclique de vitesse $o(1/n)$, il résulte de la démonstration précédente que T est rigide .
- 2) Si T admet une approximation simple par une suite de partitions $\xi_n, \xi_n = (C_i(n), i=1,\dots,q_n)$, avec $\alpha = \sup_n (X - \bigcup_{i=1}^{q_n} C_i(n))$, l'approximation est cyclique de vitesse α/n . En particulier, T est à spectre singulier si $\alpha < 1$.

II . APPROXIMATIONS ET AUTOMORPHISMES SPECIAUX.

Rappelons la définition d'un automorphisme spécial . Soit f une fonction définie sur X , intégrable , à valeurs dans $\{0,1,2,\dots\}$. Soit Y le sous-ensemble de $X \times \mathbb{Z}$ défini par $Y = \{ (x,n) , x \in X , 0 \leq n \leq f(x) \}$, muni de la mesure $\tilde{\mu}$ obtenue par restriction à Y et normalisation de la mesure produit sur $X \times \mathbb{Z}$. L'automorphisme spécial T_f , de base T sous la fonction f , est défini sur Y par :

$$T_f(x,n) = \begin{cases} (x,n+1) , & \text{pour } 0 \leq n < f(x) , \\ (Tx,0) , & \text{pour } n = f(x) . \end{cases}$$

On définit de façon analogue le flot spécial $(T_f^t, t \in \mathbb{R})$, de base T sous la fonction f , f étant alors à valeurs réelles strictement positives .

Le sous-ensemble $X \times \{0\}$ de Y est identifié à X . La partition de X en les ensembles $A_k = f^{-1}(k-1)$, $k=1,2,\dots$ est notée ζ_f . Si T admet une approximation par une suite de partitions ζ_n , on peut construire une approximation pour T_f , si l'on fait une hypothèse convenable d'approximation de la partition ζ_f par la suite (ζ_n) . Pour formuler cette hypothèse , donnons d'abord une définition.

Définition 3 . Soit $\zeta = (A_1, A_2, \dots)$ une partition dans X . On dit qu'une suite de partitions $\zeta_n = (C_i(n), i=1, \dots, q_n)$ forme une approximation de vitesse δ/n (resp. $o(1/n)$) de ζ , s'il existe , pour chaque n , des ensembles $F_k(n)$, $k=1,2,\dots$, formés d'éléments de ζ_n , tels que

$$\mu \left(\bigcup_k (A_k \Delta F_k(n)) \right) \leq \delta/q_n \quad (\text{resp. } o(1/q_n)) .$$

On fera dans toute la suite l'hypothèse $\delta < 1$. Cette hypothèse permet d'utiliser la remarque suivante :

Si $\delta < 1$, si ζ est telle que $\bigcup_k A_k = X$, et si $\limsup_n |1 - q_n \mu(C_i(n))| = 0$,

pour n assez grand , chaque ensemble $C_i(n)$ figure une fois et une seule dans l'un des $F_k(n)$.

On peut donc , dans cette situation , associer à chaque $C_i(n)$ un ensemble , noté $A_{k_i}(n)$, de ζ , de telle façon que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^{q_n} \mu(C_i(n) \cap A_{k_i}^c(n)) \leq \delta/q_n .$$

Pour la construction d'une approximation de T_f , une hypothèse un peu plus forte est nécessaire. Nous dirons que la suite (ξ_n) forme une approximation uniforme de vitesse δ/n de ξ_f , si, outre la condition de la définition 3, on a :

$$\mu(C_i(n) \cap A_{k_i}^c(n)) = o(1/q_n) \quad (\text{uniformément en } i).$$

Théorème 3. Si T admet une approximation (resp. une approximation cyclique) de vitesse θ/n par une suite de partitions ξ_n , et si la suite (ξ_n) forme une approximation uniforme de vitesse δ/n de ξ_f , l'automorphisme spécial T_f admet une approximation (resp. une approximation cyclique) de vitesse $(\theta+2\delta)/n$.

Preuve : Nous raisonnons dans le cas d'une approximation cyclique de T . Le raisonnement serait analogue pour une approximation. Nous utilisons les notations introduites précédemment (la remarque suivant la définition 3 s'applique à la partition ξ_f).

Posons $C_i^!(n) = C_i(n) \cap A_{k_i}(n)$. Pour chaque n , soit $\tilde{\xi}_n$ la partition dans Y ainsi définie :
ses éléments $\tilde{C}_j(n)$, $1 \leq j \leq t_n$, $t_n = \sum_{i=1}^{q_n} k_i(n)$, sont les copies de $C_i^!(n)$ dans $A_{k_i}(n)^{\times s}$, pour $0 \leq s \leq k_i(n) - 1$, munies de l'ordre lexicographique.

Il est clair que $\tilde{\xi}_n \rightarrow \xi_Y$. Faisons les conventions

$C_{q_n+1}(n) = C_1(n)$, $\tilde{C}_{t_n+1}(n) = \tilde{C}_1(n)$. Soit $a = (1 + \int_X f d\mu)^{-1}$ la constante de normalisation de $\tilde{\mu}$.

On a, d'après la condition d'approximation uniforme,

$$\begin{aligned} |1 - q_n \mu(C_i^!(n))| &\leq |1 - q_n \mu(C_i(n))| + q_n \mu(C_i(n) - C_i^!(n)) \\ &\leq |1 - q_n \mu(C_i(n))| + o(1/q_n) q_n, \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_n \sup |1 - q_n \mu(C_i^!(n))| = 0 .$$

Il en résulte que :

$$\lim_n t_n/q_n = 1/a \quad \text{et} \quad \lim_n \sup_j |1 - t_n \tilde{\mu}(\tilde{C}_j(n))| = 0 .$$

On a , d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q_n} \tilde{\mu}(T_f \tilde{C}_j(n) \Delta \tilde{C}_{j+1}(n)) &= a \sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_i'(n) \Delta C_{i+1}'(n)) \\ &\leq a \sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_i(n) \Delta C_{i+1}(n)) + 2a \sum_{i=1}^{q_n} \mu(C_i(n) \cap A_{k_i}^c(n)) \\ &\leq a/q_n (\theta + 2\delta) = (at_n/q_n) (\theta + 2\delta) / t_n , \end{aligned}$$

avec $\lim_n at_n/q_n = 1$.

Corollaire 1 . Sous les hypothèses du théorème 3 , avec approximation cyclique et la condition $\theta + 2\delta < 1$, l'automorphisme spécial T_f a un spectre singulier , et n'est pas fortement mélangeant .

Si T admet une approximation cyclique de vitesse $o(1/n)$ par une suite de partitions ξ_n et si cette suite forme une approximation uniforme de vitesse $o(1/n)$ de \mathcal{C}_f , l'automorphisme T_f est rigide .

le théorème permet également d'obtenir une borne pour la multiplicité spectrale de T_f . Cependant , on peut obtenir ce résultat sans la condition d'uniformité .

Théorème 4 . [GOODSON - WHITMAN [5]] . Si T admet une approximation de vitesse θ/n par une suite de partitions ξ_n , et si cette suite (ξ_n) forme une approximation de vitesse δ/n de \mathcal{C}_f , avec $\theta + 2\delta < m/m+1$, où m est un entier , la multiplicité spectrale de T_f est au plus m .

Preuve : En réutilisant les notations précédentes , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \tilde{\mu} \left(\bigcap_{j=1}^{t_n} T_f^{-j+1} \tilde{C}_j(n) \right) &= \mu \left(\bigcap_{i=1}^{q_n} T^{-i+1} C_i'(n) \right) \\ &\geq \mu \left(\bigcap_{i=1}^{q_n} T^{-i+1} C_i(n) \right) - \sum_{i=1}^{q_n} \mu(C_i(n) - C_i'(n)) \\ &\geq (1 - (\theta + 2\delta)) / q_n . \end{aligned}$$

(Cf. la démonstration du théorème 1)

D'autre part , on a :

$$\frac{1}{\alpha} \sup \mu(\tilde{C}_j(n)) \leq \frac{1}{\alpha} \sup \mu(C_i(n)) ,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \mu\left(\bigcap_{j=1}^{t_n} T_f^{-j+1} \tilde{C}_j(n)\right) / \sup \mu(\tilde{C}_j(n)) &\geq (1 - (\frac{\theta}{2} + \delta)) / (q_n \sup \mu(C_i(n))) \\ &\geq \frac{1}{m+1} \cdot 1 / q_n \sup \mu(C_i(n)) , \end{aligned}$$

et le théorème résulte de la proposition 1 .

ABSENCE DE MELANGE POUR CERTAINS FLOTS SPECIAUX .

Nous avons vu que la propriété d'approximation cyclique avec une vitesse convenable implique l'absence de mélange . D'après ce qui précède , un résultat de ce type peut être obtenu pour certains automorphismes spéciaux . Nous donnons maintenant un résultat analogue , qui étend un théorème de KOCHERGIN sur les flots spéciaux dont la base est une rotation .

Proposition 3 . Si l'automorphisme T admet une approximation cyclique (avec périodes q_n) de vitesse θ/n , avec $\theta < 1$, et s'il existe une suite (s_n) et une constante M telles que :

$$\lim_n \mu \left\{ x : \left| \sum_{0 \leq k < q_n} f(T^k x) - s_n \right| > M \right\} = 0 ,$$

alors T_f n'est pas fortement mélangeant .

Preuve: Posons $f_{q_n}(x) = \sum_{0 \leq k < q_n} f(T^k x)$, et $D_n = \left\{ x : |f_{q_n}(x) - s_n| > M \right\}$.

On a : $T_f^{q_n} x = T^{q_n} x$, pour $x \in X$ ($X \setminus \{0\}$ étant identifié à X) .

Soit $A \subset X$. On a la majoration :

$$\int_A 1_A(T^{q_n} x) d\mu(x) = \int_A 1_A(T_f^{q_n} x) d\mu(x) \leq \mu(D_n) + \sum_{|k| \leq M} \int_A 1_A(T_f^{s_n+k} x) d\mu(x) .$$

Si T_f était fortement mélangeant , la limite du second membre de l'inégalité serait $2M \mu(A)^2$. D'après la proposition 2 , la limite inférieure du membre de gauche majore $(1-\theta) \mu(A)$. On aurait donc : $\mu(A) \geq \frac{1-\theta}{2M} > 0$, pour tout $A \subset X$, ce qui est absurde .

Considérons maintenant un flot spécial $(T_f^t, t \in \mathbb{R})$ de base T , sous une fonction f (à valeurs dans \mathbb{R}^+). La démonstration de la proposition précédente s'étend facilement au cas du flot, et on obtient:

Théorème 5 . Si T admet une approximation cyclique de périodes q_n , de vitesse θ/n , avec $\theta < 1$, et s'il existe une suite S_n et une constante M telles que:

$$\lim_n \mu \left\{ x : \left| \sum_{0 \leq k < q_n} f(T^k x) - S_n \right| > M \right\} = 0 ,$$

alors le flot spécial (T_f^t) n'est pas fortement mélangeant.

Corollaire 2 (KOCHERGIN [8]) . Si T est une rotation irrationnelle et si f est à variation bornée, (T_f^t) n'est pas fortement mélangeant.

Preuve : Soient α un nombre irrationnel, $(p_n/q_n, n \in \mathbb{N})$ la suite du développement de α en fraction continue. On sait qu'il existe une constante c , avec $c \leq 1/\sqrt{5}$, telle que $|\alpha - p_n/q_n| < c/q_n^2$.

Cette condition implique que la rotation $T : x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$, sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} , admet une approximation cyclique de périodes q_n , de vitesse $2c/n$, avec $2c < 1$.

D'autre part, d'après un lemme dû à Koksma, si f est à variation bornée, on a:

$$\left| \sum_{0 \leq k < q_n} f(x+k\alpha) - q_n \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq M = \text{var}(f).$$

Remarque: On a montré en fait que les transformations et les flots considérés dans les divers énoncés de ce paragraphe, relatifs au mélange fort, n'ont pas de facteur fortement mélangeant.

III . PRODUITS GAUCHES FINIS

Nous appliquons maintenant la méthode des approximations à l'étude des propriétés spectrales des produits gauches.

Soit φ une fonction mesurable définie sur X à valeurs dans le groupe Γ_N des racines nièmes de l'unité (on pourrait, sans changer les résultats, considérer un groupe Γ abélien fini).

Sur l'espace $Z = X \times \Gamma_N$ muni de la mesure produit m , on construit une transformation τ_ψ (produit gauche de T par ψ) en posant:

$$\tau_\psi(x, \gamma) = (Tx, \psi(x)\gamma) .$$

Les sous-espaces H_j formés des fonctions de la forme $(x, \gamma) \mapsto \gamma^j f(x)$, $f \in L^2(X)$, $j=0, 1, \dots, N-1$, constituent une décomposition de $L^2(m)$ en sous-espaces orthogonaux invariants par τ_ψ .

Soit $V_{T, \psi}$ l'opérateur $f \mapsto \psi \cdot Tf$, opérant dans $L^2(X)$. La restriction de τ_ψ à H_j est unitairement équivalente à l'action de V_{T, ψ^j} dans $L^2(X)$. L'étude des propriétés spectrales de τ_ψ se ramène donc à celle des opérateurs V_{T, ψ^j} .

On note ζ_ψ la partition de X formée des ensembles $\psi^{-1}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_N$.

Démontrons d'abord un lemme analogue au lemme 3.

On note simplement V l'opérateur $V_{T, \psi}$.

Lemme 4. Soient ξ une partition dans X , $\xi = (C_i, i=1, 2, \dots)$, et $u = \sum a_i 1_{C_i}$ une fonction de $L^2(\mu)$, ξ -mesurable. Soient c un nombre de module 1 et s un entier. On a:

$$\left| \langle V^s u, u \rangle - c \|u\|^2 \right| \leq 2 \|u\|^2 \sup_i \left[1 - \frac{\mu(C_i^s)}{\mu(C_i)} \right]$$

où $C_i^s = \{x \in C_i : V^s 1_{C_i}(x) = c\}$.

Preuve: Ecrivons $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 = \sum a_i 1_{C_i^s}$ et $u_2 = \sum a_i 1_{C_i - C_i^s}$.

On a : $u_1 \cdot u_2 = 0$ et $u_1 \cdot (V^s u - cu_1) = 0$. Il en résulte:

$$\begin{aligned} \left| \langle V^s u, u \rangle - c \langle u, u \rangle \right| &= \left| \langle V^s u - cu_1, u_2 \rangle - c \langle u_2, u_2 \rangle \right| \\ &\leq \|u_2\|^2 + \|V^s u - cu_1\| \|u_2\| = 2 \sum |a_i|^2 \mu(C_i - C_i^s) \\ &\leq 2 \sum |a_i|^2 \mu(C_i) \cdot \sup_i \left[\mu(C_i - C_i^s) / \mu(C_i) \right] . \end{aligned}$$

Théorème 6 (RILEY [9]). Supposons que l'automorphisme T admette une approximation cyclique de vitesse θ/n , par une suite (ξ_n) de partitions formant une approximation de ζ_ψ de vitesse δ/n .

Si $\theta + 2\delta < 1$, le spectre de τ_ψ est singulier.

Preuve: Notons $\psi_{q_n}(x)$ le produit $\prod_{j=0}^{q_n-1} \psi(T^j x)$, $C_i = C_i(n)$ les

éléments de ξ_n . Pour tout c , on a :

$$\mu \left\{ x : V^{q_n} 1_{C_i}(x) \neq c \right\} \leq \mu(C_i \cap T^{-q_n} C_i^c) + \mu \left\{ x : \psi_{q_n}(x) \neq c \right\} .$$

D'après la démonstration du théorème 2, on a :

$$\mu(C_i \cap T^{-q_n} C_i^c) \leq \theta/2q_n .$$

D'après l'hypothèse d'approximation de ζ_ψ , il existe un nombre c (racine de l'unité) tel que: $\mu \left\{ x : \psi_{q_n}(x) \neq c \right\} \leq \delta/q_n$.

Il en résulte d'après le lemme 4, pour une fonction u_n ξ_n -mesurable :

$$\left| \langle V^{q_n} u_n, u_n \rangle \right| \geq \|u_n\| \frac{1 - (\theta + 2\delta)}{q_n \sup_i \mu(C_i(n))} ,$$

et dont, pour toute fonction $u \in L^2(\mu)$,

$$\liminf_n \left| \langle V^{q_n} u, u \rangle \right| \geq \|u\| (1 - (\theta + 2\delta)) > 0 .$$

Ceci implique que le spectre est singulier.

Pour terminer, énonçons le résultat de GOODSON sur la multiplicité spectrale. La démonstration serait analogue à celle du théorème 1.

Théorème 7 (GOODSON [4]). Supposons que l'automorphisme T admette une approximation de vitesse θ/n , par une suite (ξ_n) de partitions formant une approximation de ζ_ψ de vitesse δ/n . Si $\theta + 2\delta < \frac{2m}{m+1}$, où m est un entier, la multiplicité spectrale de $V_{T, \psi}$ est au plus m .

REFERENCES

- [1] J.R. BAXTER : A class of ergodic transformations having simple spectrum, Proc A.M.S. 27 (1971) p.275-279
- [2] R.V. CHACON : Contribution to ergodic theory and probability, Lectures Notes n° 160 (1970) p.18-27
- [3] G.R. GOODSON : Induced automorphism and simple approximation, Proc. A.M.S. 54 (1976) p.141-145

- [4] G.R. GOODSON : Approximation and the spectral multiplicity of finite skew products, J. London Math.Soc. (2) 14 (1976) p.249-259
- [5] G.R. GOODSON ; P.N. WHITMAN : Approximation and the spectral multiplicity of special automorphisms, preprint
- [6] P.R. HALMOS : Introduction to Hilbert spaces and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, N.Y. (1951)
- [7] A.B. KATOK ; A.M. STEPIN : Approximation in ergodic theory, Russian Math. Surveys 22 (1967) p.77-102
- [8] A.V. KOCHERGIN : On the absence of Mixing in special flows... Dokl. AK. N. SSSR. 205(1972) p.515-518
- [9] G.W. RILEY : On spectral properties of skew products over irrational rotations , J. London Math. Soc. (2) 17 (1978) p.152-161
- [10] A.M. STEPIN : On the connexion between approximation and spectral properties of automorphisms, Mat.Zamet. 13 (1973) p.403-409