D. PREVOSTO

Caractérisation des rayons de croissance minimale pour une réalisation d'un problème elliptique dégénéré

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 8, p. 1-47
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A8_0>

CARACTERISATION DES RAYONS DE CROISSANCE MINIMALE POUR UNE REALISATION D'UN PROBLEME ELLIPTIQUE DEGENERE.

I - NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > 0\} \ , \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\} \ , \\ (\forall x \in \Gamma) \ (\mathrm{grad}\ \varphi(x) \neq 0). \end{cases}$$

Soit $L = L(x;D_x)$ l'opérateur différentiel défini sur Ω par :

$$Lu(x) = L(x;D_x)\ u(x) = \sum_{h=o}^{m-r} P^{m-h}(x;D_x)\ \{\varphi(x)^{q(m-r-h)} u(x)\ \},$$

où m et r sont deux entiers tels que $0 < r \leq m$, q est un réel >1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$ et où :

(i) pour $h = 0,\dots,m-r$, $P^{m-h}(x;D_x)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$, d'ordre inférieur ou égal à $m-h$:

$$P^{m-h}(x,D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m-h} p_\alpha^{m-h}(x) D_x^\alpha \quad ,$$

avec : $D_x = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$; (si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $P^{m-h}(x,D_x)$ est, par définition, l'opérateur identiquement nul).

(ii) $P^m(x;D_x)$ est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire que, pour tout $x_o \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$P_m^m(x_o;\xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha^m(x_o)\ \xi^\alpha \neq 0 \ .$$

Pour tout $h = 0,\dots,m-r$, on notera $P_{m-h}^{m-h}(x;D_x)$ la partie principale d'ordre m-h de $P^{m-h}(x;D_x)$.

On fait alors, sur l'opérateur $L(x;D_x)$, l'hypothèse "d'ellipticité générale" suivante :

$$(C)\begin{cases}\text{Pour tout } x_o \in \Gamma, \text{ tout } x \in \bar{\Omega} \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \text{ on a :}\\ L_o(x_o;x;\xi) = \sum_{h=o}^{m-r} P_{m-h}^{m-h}(x_o;\xi)\,\varphi(x)^{q(m-r-h)} \neq 0 .\end{cases}$$

Cette hypothèse implique en particulier que l'opérateur $P^r(x;D_x)$ est elliptique sur Γ, c'est-à-dire que, pour tout $x_o \in \Gamma$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{o\}$, on a:

$$P_r^r(x_o;\xi) \neq 0 .$$

On suppose que de plus que P^r est proprement elliptique d'ordre $r = 2s$ sur Γ.

On définit alors s opérateurs frontière, à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$:

$$B_j(x;D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m_j} b_{j\alpha}(x)\,D_x^\alpha , \; j=1,\dots,s ,$$

où, pour $j = 1,\dots,s$, m_j est un entier inférieur ou égal à $r-1$. On note $\gamma B = (\gamma B_j \; ; \; j=1,\dots,s)$, où γ est l'opérateur restriction à Γ.

On suppose que le système $(B_j \; ; \; j=1,\dots,s)$ est normal sur Γ, c'est-à-dire que :

a) la frontière Γ est non caractéristique aux B_j en chaque point;

b) les ordres des B_j sont tous distincts.

On fait enfin l'hypothèse de "recouvrement" habituelle :

(C') Pour tout $x_o \in \Gamma$, soit ν la normale à Γ en x_o et $\xi \neq 0$ un vecteur tangent à Γ en x_o. On suppose que les polynômes en τ:

$$B_j^o(x_o;\xi+\tau\nu) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x_o)(\xi+\tau\nu)^\alpha, \; j=1,\dots,s ,$$

sont linéairement indépendants modulo le polynôme :

$$M^+(x_o;\xi,\nu,\tau) = \prod_{k=1}^{s} (\tau-\tau_k^+(\xi,\nu)) ,$$ où $\tau_k^+(\xi,\nu)$ sont les racines à

partie imaginaire positive de $P_r^r(x_o;\xi+\tau\nu) = 0$.

On dit alors que le problème aux limites $(P^r,\gamma B)$ est régulier.

On démontre alors (cf. [8]) le résultat suivant :

THEOREME 1.1. Sous les conditions (C) et (C'), il existe une constante $C_o > 0$ telle que, pour tout $u \in W^m_{q,m-r}(\Omega)$, on ait l'estimation a priori :

$$||u||_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \leq C_o\{||Lu||_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{s} ||\gamma B_j u||_{H^{r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + ||u||_{L^2(\Omega)}\}$$

Pour une définition de l'espace $W^m_{q,m-r}(\Omega)$, voir [6]. On démontre aussi dans [6] un résultat de régularité analogue à ceux obtenus pour les problèmes aux limites elliptiques.

II - ENONCE DU RESULTAT PRINCIPAL.

On définit l'espace avec poids suivant :

$$W^m_{q,m-r}(\Omega) = \{u \in H^r(\Omega) \ ; \varphi^{q(m-r)}.u \in H^m(\Omega)\} .$$

C'est un espace de Hilbert si on le munit de la norme :

$$u \longmapsto ||u||_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} = \{ ||u||^2_{H^r(\Omega)} + ||\varphi^{q(m-r)}.u||^2_{H^m(\Omega)}\}^{1/2} .$$

On désignera par L_2 l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$ défini par :

$$\begin{cases} \text{Le domaine de } L_2 \text{ est } D(L_2) = \{u \in W^m_{q,m-r}(\Omega) \ ; \ \gamma B_j u = 0, \ j=1,\dots,s\} \\ L_2 u = L(x,D_x)u, \text{ pour } u \in D(L_2) \ , \end{cases}$$

où $L(x;D_x)$ est l'opérateur introduit au paragraphe I.

On dit que L_2 est la réalisation de L dans $L^2(\Omega)$ sous les conditions aux limites homogènes $\gamma B_j u = 0$, $j=1,\dots,s$.

Il est clair que l'opérateur L_2 est fermé. D'autre part, le théorème

1.1 montre que le noyau de L_2 est de dimension finie et que son image est fermée.

Ainsi qu'il est fait dans [1], nous allons considérer une sous-classe de problèmes aux limites $(L,\gamma B)$ pour lesquels le spectre de L_2 sera discret ; et on obtiendra de plus des estimations pour la croissance du résolvant $R(\lambda;L_2) = (\lambda I-L_2)^{-1}$ le long de certains rayons du plan complexe. Pour cela rappelons la définition suivante :

DEFINITION 2.1. Un rayon $\arg\lambda = \theta$ du plan complexe est appelé rayon de croissance minimale de $R(\lambda;L_2)$ si le résolvant existe pour tout λ assez grand tel que $\arg\lambda = \theta$ et si, de plus, pour de tels λ, on a :

$$||R(\lambda;L_2)|| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \quad ,$$

C étant une constante > 0.

Nous allons pouvoir déterminer les rayons de croissance minimale du résolvant associé aux problèmes $(L,\lambda B)$ introduit au paragraphe I. Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant :

THEOREME 2.1. Pour que le spectre de L_2 soit discret et que le rayon $\arg\lambda = \theta$ soit un rayon de croissance minimale de $R(\lambda;L_2)$, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) $(\forall x_o \in \bar{\Omega})(\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})\left(\dfrac{P_m^m(x_o;\xi)}{|P_m^m(x_o;\xi)|} \neq e^{i\theta}\right)$;

(ii) $(\forall x_o \in \Gamma)(\forall x \in \bar{\Omega})(\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})\left(\dfrac{L_o(x_o;x;\xi)}{|L_o(x_o;x;\xi)|} \neq e^{i\theta}\right)$;

Pour tout $x_o \in \Gamma$, soit ν la normale à Γ en x_o et $\xi \neq 0$ un vecteur tangent à Γ en x_o. Notons $\tau_k^+(\xi;\lambda)$ les s racines à partie imaginaire positive du polynôme en τ:

$$P_r^r(x_o;\xi+\tau\nu) - \lambda \, ,$$

(iii) *où λ est un complexe tel que arg $\lambda = \theta$. Alors les polynômes en τ:*

$$B_j^o(x_o;\xi+\tau\nu) \quad , \; j = 1,\dots,s \quad ,$$

sont linéairement indépendants modulo le polynôme :

$$M^+(\xi;\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\tau-\tau_k^+(\xi;\lambda)) \, .$$

COROLLAIRE 2.1. S'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 2.1 soient vérifiées, alors l'opérateur L_2 est à indice de $D(L_2)$ dans $L^2(\Omega)$, d'indice nul.

III - DEMONSTRATION DE LA CONDITION SUFFISANTE.

Pour montrer que les conditions (i), (ii) et (iii) sont suffisantes, il faut montrer qu'elles impliquent :

(a) Pour tout $u \in D(L_2)$ et tout λ assez grand tel que arg $\lambda = \theta$, on a :

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|} ||(L_2-\lambda I)u||_{L^2(\Omega)}$$

(b) Pour λ assez grand tel que arg $\lambda = \theta$, l'image de $(L_2-\lambda I)$ est $L^2(\Omega)$.

Pour démontrer cela, nous allons introduire une nouvelle variable réelle y et considérer le nouvel opérateur différentiel défini par :

$$A = A(x,D_x,D_y) = L(x;D_x) - e^{i\theta} D_y^m \quad ,$$

avec : $D_y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$.

L'opérateur A est défini sur le domaine cylindrique :

$$\mathscr{C} = \Omega \times \mathbb{R}$$

dont le bord est : $\partial\mathscr{C} = \Gamma \times \mathbb{R}$.

III- 1 - LE RESULTAT POUR LE PROBLEME AUX LIMITES $(A,\gamma B)$.

La condition (i) du théorème 2.1 implique que l'opérateur A est un opérateur d'ordre m, elliptique dans $\overline{\mathscr{C}}$.

Notons $Q^r(x;D_x,D_y)$ l'opérateur :

$$Q^r(x;D_x,D_y) = P^r(x;D_x) - e^{i\theta}D_y^m \quad .$$

Cet opérateur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Q^r(x;D_x,D_y) = \sum_{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta\leqslant r}^{q} Q^r_{(\alpha,\beta)}(x)\; D_x^\alpha D_y^\beta \;.$$

La condition (ii) du théorème 2.1 implique la condition "d'ellipticité générale" suivante pour l'opérateur A :

Pour tout $x_o \in \Gamma$, tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$(D)\begin{cases} A_o(x_o;x;\xi,\eta) = \displaystyle\sum_{h=o}^{m-r-1} P^{m-h}_{m-h}(x_o;\xi)\;\varphi(x)^{q(m-r-h)} + Q^r_r(x_o;\xi,\eta) \neq 0 \;, \\ \text{où} \;:\; Q^r_r(x_o;\xi,\eta) = \displaystyle\sum_{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta=r}^{q} Q^r_{(\alpha,\beta)}(x_o)\xi^\alpha\eta^\beta. \end{cases}$$

La condition (D) implique que l'opérateur Q^r est quasi-elliptique sur $\partial\mathscr{C}$ et la condition (iii) est équivalente à la condition de "recouvrement" (C'), mais pour le problème aux limites quasi-elliptique à n+1 variables $(Q^r,\gamma B)$. Notons (D') cette condition de "recouvrement".

Posons $\sigma = \frac{r}{m}$ et pour tout entier $s \in \mathbb{N}$ définissons l'espace :

$$H^{s,\sigma}(\mathscr{C}) = \{u \in L^2(\mathscr{C}) \;;\; D_x^\alpha D_y^\beta u \in L^2(\mathscr{C}) \text{ pour } |\alpha|+\sigma\beta\leqslant s \text{ et } |\alpha|+\beta\leqslant m\},$$

muni de la norme canonique.

On définit alors l'espace :

$W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathscr{C}) = \{u \in H^{r,\sigma}(\mathscr{C}) \;;\; \varphi^{q(m-r)}\, u \in H^{m,\sigma}(\mathscr{C})\}$, muni de la norme canonique.

La démonstration de (a) découlera du théorème suivant :

THEOREME 3.1. Sous les conditions (D) et (D'), il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{C}})$ tel que $v = 0$ pour $|y| \geq 1$ et :

$$\gamma B_j v = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C} \quad , \quad \text{pour } j = 1,\dots,s \quad ,$$

on ait :

$$||v||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathcal{C})} \leq C \{ ||Av||_{L^2(\mathcal{C})} + ||v||_{L^2(\mathcal{C})} \} .$$

III - 2 - ESTIMATION A PRIORI DANS LE CAS DU DEMI-ESPACE $\mathbb{R}^{n+1}_+$, POUR LES COEFFICIENTS CONSTANTS.

III - 2.1. NOTATIONS ET RESULTAT.

- Ici : $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$ avec :

$$x = (x',t) \in \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$$

et : $y \in \mathbb{R}$.

On considère l'opérateur A défini sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$A(t;D_x,D_y) = \sum_{h=o}^{m-r} Q^{m-h} (D_x,D_y) \{t^{q(m-r-h)}.\} \quad ,$$

où m et r sont deux entiers tels que $0 \leq r \leq m$, q est un réel >1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$ et où :

(i) pour $h = 0,\dots,m-r$, $Q^{m-h}(D_x,D_y)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants, de la forme :

$$Q^{m-h}(D_x,D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta=m-h \\ |\alpha|+\beta\leq m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)} D^\alpha_x D^\beta_y \quad ,$$

avec : $D_x = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t})$ et $D_y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$; (si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$,

$Q^{m-h}(D_x,D_y)$ est, par définition, l'opérateur identiquement nul).

Pour tout $h = 0,\ldots,m-r$, notons :

$$Q_m^{m-h}(D_x,D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta=m-h \\ |\alpha|+\beta=m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)} D_x^{\alpha} D_y^{\beta} .$$

(ii) A est un opérateur d'ordre m, elliptique sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, c'est-à-dire que, pour tout $t > 0$, et tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a :

$$A^{o}(t;\xi,\eta) = \sum_{h=o}^{m-r} Q_m^{m-h}(\xi,\eta)\ t^{q(m-r-h)} \neq 0 .$$

On fait de plus, sur l'opérateur $\overset{A}{Q}(t;D_x,D_y)$, l'hypothèse "d'ellipticité générale" suivante :

$$(D_1) \begin{cases} \text{Pour tout } t \geqslant 0 \text{ et tout } (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \text{ on a :} \\ A(t;\xi,\eta) = \sum_{h=o}^{m-r} Q^{m-h}(\xi,\eta)\ t^{q(m-r-h)} \neq 0 \end{cases}$$

Cette hypothèse implique en particulier que l'opérateur $Q^r(D_x,D_x)$ est quasi-elliptique, c'est-à-dire que, pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on a :

$$Q^r(\xi,\eta) \neq 0 .$$

On suppose que Q^r est proprement quasi-elliptique d'ordre 2s. On définit alors s opérateurs frontière à coefficients constants :

$$B_j(D_x;D_y) = \sum_{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta=m_j} b_{j(\alpha,\beta)} D_x^{\alpha} D_y^{\beta} , \quad j = 1,\ldots,s .$$

où, pour $j = 1,\ldots,s$, m_j est un entier inférieur ou égal à r-1. On note $\gamma B = (\gamma B_j\ ;\ j = 1,\ldots,s)$, où γ est l'opérateur restriction à $\mathbb{R}^n$.

On suppose que le système $(B_j : j = 1,\ldots,s)$ est normal et l'on fait alors l'hypothèse de "recouvrement" habituelle:

$$(D_1')\begin{cases}\text{Pour tout } (\xi',\eta)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \text{ les polynômes en } \tau :\\ B_j(\xi',\tau;\eta) = \sum_{|\alpha'|+\alpha_n+\beta=m_j} b_{j(\alpha,\beta)}\, \xi'^{\alpha'}\tau^{\alpha_n}\eta^{\beta}, \quad j=1,\dots,s \quad ,\\ \text{sont linéairement indépendants modulo le polynôme :}\\ M^+(\xi',\eta;\tau) = \prod_{k=1}^{s}(\tau-\tau_k^+(\xi',\eta)) \text{ , où } \tau_k^+(\xi',\eta) \text{ sont les racines à partie}\\ \text{imaginaire positive de } Q^r(\xi',\tau;\eta)=0.\end{cases}$$

Définissons alors, de la même façon que dans le paragraphe III-1, les espaces $H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ et $W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Définissons aussi, pour $s\in\mathbb{R}$, l'espace :

$$H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \; ; \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi'|^2+\eta^{2/\sigma})^s |u(\xi',\eta)|^2 d\xi' d\eta < +\infty\}$$

muni de la norme évidente. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. Sous les conditions (D_1) et (D_1'), il existe $\delta>0$ et $C>0$ tels que, pour tout $u\in W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec supp $u\subset\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\delta[\times\mathbb{R}$, on ait :

$$||u||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leqslant C\,\{||Au||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{j=1}^{s} ||\gamma B_j u||_{H^{r-m_j-\frac{1}{2},\sigma}(\mathbb{R}^n)} + $$
$$+ ||u||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\}.$$

Avant de commencer la démonstration de cette proposition, remarquons que l'on a les propriétés de quasi-homogénéité suivantes :

(3.1) $\quad A(\frac{t}{\lambda};\lambda^q\xi,\lambda^{\sigma q}\eta) = \lambda^{qr}A(t;\xi,\eta)$;

(3.2) $\quad B_j(\lambda^q\xi,\lambda^{\sigma q}\eta) = \lambda^{qm_j}B_j(\xi,\eta)$.

Pour démontrer la proposition 3.1, on va se ramener à une étude à une variable, la variable t, sur un intervalle $[0,\delta[$, et ceci pour transformation de Fourier tangentielle qui change $A(t;D_x,D_y)$ en :

$$A(t;\xi',\eta,D_t) = \sum_{h=o}^{m-r} Q^{m-h}(\xi',\eta,D_t)\ \{t^{q(m-r-h)}.\}\ ,$$

avec :

$$Q^{m-h}(\xi',\eta,D_t) = \sum_{\substack{|\alpha'|+\alpha_n+\frac{r}{m}\beta=m-h\\ |\alpha|+\beta\leqslant m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)}\ \xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}D_t^{\alpha_n}\ ,$$

et qui transforme les $B_j(D_x,D_y)$ en :

$$B_j(\xi',\eta,D_t) = \sum_{|\alpha'|+\alpha_n+\frac{r}{m}\beta=m_j} b_{j(\alpha,\beta)}\ \xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}D_t^{\alpha_n}\ .$$

Pour $|\xi'|^2+\eta^{2/\sigma}$ assez grand. la démonstration utilise le découpage de $[o,\delta[$ en deux zones $[o,\tau_1]$ et $[\tau_2,\delta[$ dépendant de (ξ',η), comme cela a été introduit dans [8].

III-2.2. ETUDE SUR $[0,\tau_1]$. Pour $\delta_1 > 0$, on posera :

$$\tau_1 = \delta_1\ (|\xi'|^2+\eta^{2/\sigma})^{-\frac{1}{2q}}\ .$$

On va, sur $[0,\tau_1]$, montrer que $A(t;\xi,\eta,D_t)$ est approché par $Q^r(\xi',\eta,D_t)\ oM(t;D_t)$ avec :

(3.3) $$M(t;D_t) = \sum_{j=o}^{m-r} a_j\ D_t^j\ \{t^{qj}.\}\ ,$$

$$\text{où : } a_j = q^{r+j}_{(0,\dots,0,r+j,0)}\ .$$

Comme $a_o = q^r_{(0,\dots,0,r,0)} \neq 0$, on peut supposer que $a_o = 1$.

On a :

$$M(t,\tau)\tau^r = A(t;\overset{\xi'}{\overset{\downarrow}{0}},\overset{\eta}{\overset{\downarrow}{0}},\tau)$$

La propriété d'ellipticité générale (D_1) implique alors que, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a :

$$M(t,\tau) \neq 0\ .$$

De plus, $a_{m-r} = q^m_{(0,\ldots,0,m\sigma)} = A^o(1;\overset{\xi'}{\overset{\downarrow}{0}},\overset{\eta}{\overset{\downarrow}{0}},1) \neq 0$, d'après (ii), (ellipticité de A).

On sait alors (cf. [7], théorème II.2) qu'on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2. L'opérateur $M(t;D_t)$ est surjectif et à indice de $W^m_{q,m-r}(0,T)$ sur $H^r(0,T)$,

où : $W^m_{q,m-r}(0,T) = \{u \in H^r(0,T) \; ; \; t^{q(m-r)} u \in H^m(0,T)\}$.

Posons maintenant $\mathcal{U}(\xi',\eta)u = (Q^r(\xi',\eta,D_t)u, \gamma B(\xi',\eta,D_t)u)$.
On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3. L'opérateur $\mathcal{U}(\xi',\eta)$ est un isomorphisme de $H^r(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^s$.

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et tout $u \in H^r(\mathbb{R}_+)$, on ait l'inégalité :

$$(3.4) \qquad \sum_{h=o}^{r} (|\xi'|^2+\eta^{2/\sigma})^{\frac{1}{2}(r-h)} ||D_t^h u||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \{||Q^r(\xi',\eta,D_t)u||_{L^2(\mathbb{R}_+)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} (|\xi'|^2+\eta^{2/\sigma})^{\frac{1}{2}(r-m_j-\frac{1}{2})} |B_j(\xi',\eta,D_t)u(0)|\}.$$

DEMONSTRATION : La propriété de "recouvrement" (D_1') montre que le problème aux limites $(Q^r(\xi',\eta,D_t) \; , \; \gamma B(\xi',\eta,D_t))$ est régulier, c'est-à-dire que le problème aux limites sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} Q^r(\xi',\eta,D_t)v(t) = 0 \\ B_j(\xi',\eta,D_t)v(0) = 0, \; j = 1,\ldots,s \end{cases}$$

n'admet, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$, que la solution nulle, pour tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

Pour $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ fixé, le résultat de la proposition 3.3 est classique ; et l'inégalité (3.4) a lieu avec une constante $C(\xi',\eta)$. Mais, comme dans le cas elliptique, on montre facilement que l'application

$(\xi',\eta) \longmapsto C(\xi',\eta)$ est continue de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}_+$, donc bornée sur tout compact.

Par conséquent, l'estimation (3.4) est vraie avec une constante C ne dépendant pas de (ξ',η) tels que $|\xi'|^2+\eta^2 = 1$.

Pour tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, on posera :

(3.5) $$\theta(\xi',\eta) = (|\xi'|^2+\eta^{2/\sigma})^{1/2} .$$

Soit alors $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ quelconque. Il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\omega = (\omega_1,\omega_2) = (\lambda\xi',\lambda^\sigma\eta)$$

vérifie :

$$|\omega| = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} = 1 .$$

Alors il vient :

(3.6) $$\theta(\omega_1,\omega_2) = \lambda\ \theta\ (\xi',\eta)$$

Soit $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$. On définit v par :

$$v(t) = \lambda^{-r}\ u(\lambda t)$$

On a :

$$Q^r(\omega_1,\omega_2,D_t)v(t) = [Q^r(\xi',\eta,D_t)u]\ (\lambda t)$$

et :

$$B_j(\omega_1,\omega_2,D_t)v(0) = \lambda^{m_j-r}\ B_j(\xi',\eta,D_t)\ u(0)\ ,\quad j = 1,\ldots,s.$$

On écrit l'inégalité (3.4) pour v et $\omega = (\omega_1,\omega_2)$:

$$\sum_{h=o}^{r} \theta(\omega_1,\omega_2)^{(r-h)}||D_t^h\ ||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\ \{||Q^r(\omega_1,\omega_2,D_t)v||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \theta(\omega_1,\omega_2)^{r-m_j-\frac{1}{2}}|B_j(\omega_1,\omega_2,D_t)v(0)|\}.$$

D'où, en revenant à u :

$$\sum_{h=o}^{r} \theta(\omega_1,\omega_2)^{(r-h)} \lambda^{h-\frac{1}{2}-r} ||D_t^h u||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \{\lambda^{-\frac{1}{2}} ||Q^r(\xi',\eta,D_t u||_{L^2(\mathbb{R}_+)} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \theta(\omega_1,\omega_2)^{r-m_j-\frac{1}{2}m_j-r} |B_j(\xi',\eta,D_t)u(0)|\}.$$

On en déduit que l'inégalité (3.4) est vraie, en utilisant l'égalité (3.6). La proposition 3.3 est donc démontrée.

Des propositions 3.2 et 3.3 on déduit la :

PROPOSITION 3.4. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ tel que supp $u \subset [0,\tau_1[$, on ait, pour tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$:

$$\sum_{k=o}^{m-r} ||D_t^{r+k}\{t^{\mathfrak{q}k} u\}||_{L^2(0,\tau_1)} + \sum_{h=o}^{r} \theta(\xi',\eta)^{r-h} ||D_t^h u||_{L^2(0,\tau_1)}$$
$$\leqslant C \{||Q^r_o M u||_{L^2(0,\tau_1)} + \sum_{j=1}^{s} \theta(\xi',\eta)^{r-m_j-\frac{1}{2}} |B_j(\xi',\eta,D_t)u(0)|\}.$$

Pour simplifier, on utilisera la notation suivante :

$$||u;(0,\tau_1)||_1 = \sum_{k=o}^{m-r} ||D_t^{r+k}\{t^{\mathfrak{q}k} u\}||_{L^2(0,\tau_1)} + \sum_{h=o}^{r} \theta(\xi',\eta)^{r-h} ||D_t^h u||_{L^2(0,\tau_1)} .$$

Pour obtenir une estimation a priori relative à l'opérateur $(A,\gamma B)$, il faut maintenant évaluer la norme de l'opérateur $A-Q^r oM$. On va montrer que cette norme est petite à condition de prendre δ_1 petit et B assez grand avec $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$. Ceci va se déduire immédiatement des deux lemmes suivants :

LEMME 3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ et $0 < \delta_1 < 1$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ avec supp $u \subset [0,\tau_1[$, on ait, pour $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$:

$$||(A-D_t^r M-Q^r-D_t^r)u||_{L^2(0,\tau_1)} \leqslant \varepsilon\, ||u;(0,\tau_1)||_1 .$$

DEMONSTRATION. Les termes de $(A-D_t^r M-Q^r-D_t^r)u$ sont de la forme :

$$(3.7)\quad \begin{cases} \xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}D_t^{\alpha_n}\{t^{q(m-r-h)}u\}, \\ \text{avec :} \\ 0 \leqslant h < m-r \\ |\alpha'| + \frac{r}{m}\beta + \alpha_n = m-h \\ \alpha_n < m-h \end{cases}$$

Deux cas se présentent pour les termes de la forme (3.7) :

1° $\alpha_n \leqslant r$. Alors on écrit :

$$D_t^{\alpha_n}\{t^{q(m-r-h)}u\} = \sum_{j=o}^{\min(\alpha_n,q(m-r-h))} C_j\, t^{q(m-r-h)-j}\, D_t^{\alpha_n-j}\, u.$$

Or, pour tout $j = 0,\dots,\min(\alpha_n,q(m-r-h))$, on a :

$$\begin{aligned}|t^{q(m-r-h)-j}\xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}D_t^{\alpha_n-j}u| &\leqslant [t^q\theta(\xi',\eta)]^{m-r-h-\frac{j}{q}}.\theta(\xi',\eta)^{\frac{j}{q}(1-q)}.\theta(\xi',\eta)^{r-(\alpha_n-j)}|D_t^{\alpha_n-j}u| \\ &\leqslant \delta_1^{q(m-r-h)-j}.B^{\frac{j}{q}(1-q)}.\theta(\xi',\eta)^{r-(\alpha_n-j)}|D_t^{\alpha_n-j}u| \\ &\leqslant \varepsilon\,.\,\theta(\xi',\eta)^{r-(\alpha_n-j)}.|D_t^{\alpha_n-j}u|,\end{aligned}$$

à condition de prendre δ_1 assez petit et B assez grand, car $1-q < 0$ et si $j = 0$, alors $q(m-r-h) > 0$ car $h < m-r$.

2° $\alpha_n > r$. Alors on écrit : $\alpha_n = r+k$, $k = 1,\dots,m-r-h-1$. Et $D_t^{\alpha_n}\{t^{q(m-r-h)}u\}$ est combinaison linéaire de termes de la forme :

$$(3.8)\qquad t^{q(m-r-h-1)-(k-1)}D_t^{r+1}\{t^{q^{\ell}}u\}\ ,\ l = 1,\dots,k$$

et :

$$(3.8)'\qquad t^{q(m-r-h)-(k-1)-j}D_t^{r+1-j}u\ ,\quad l = 1,\dots,k\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant \min(r+1,q^{\ell}).$$

Pour les termes de la forme (3.8), on a :

$$|\xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}t^{q(m-r-h-1)-(k-1)}D_t^{r+1}\{t^{q^{\ell}}u\}| \leqslant [t^q\,\theta(\xi',\eta)]^{m-r-h-1-\frac{k-1}{q}}.\theta(\xi',\eta)^{\frac{k-1}{q}(1-q)}.$$

$$.|D_t^{r+1}\{t^{q^{\ell}}u\}| \leqslant \varepsilon.|D_t^{r+1}\{t^{q^{\ell}}u\}|,$$

pour δ_1 assez petit et B assez grand.

Pour les termes de la forme (3.8)', on a :

$$|\xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}t^{q(m-r-h)-(k-1)-j}D_t^{r+1-j}u| \leqslant [t^q\theta(\xi',\eta)]^{m-r-h-\frac{k-1+j}{q}}.\theta(\xi',\eta)^{\frac{k-1+j}{q}(1-q)}.$$

$$.\theta(\xi',\eta)^{j-1}|D_t^{r+1-j}u| \leqslant \varepsilon\,.\,\theta(\xi',\eta)^{r-(r+1-j)}|D_t^{r+1-j}u|\ ,$$

pour δ_1 assez petit et B assez grand.

Le lemme 3.1 est donc démontré.

<u>LEMME 3.2.</u> Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ et $0 < \delta_1 < 1$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ avec supp $u \subset [0,\tau_1[$, on ait, pour $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$:

$$||(Q^r oM - D_t^r M - Q^r + D_t^r)u||_{L^2(0,\tau_1)} \leqslant \varepsilon\ ||u;(0,\tau_1)||_1\ .$$

<u>DEMONSTRATION.</u> Les termes de $(Q^r oM - D_t^r M - Q^r + D_t^r)u$ sont encore de la forme (3.7). La démonstration est donc exactement la même que pour le lemme 3.1.

On déduit alors évidemment de la proposition 3.4 et des lemmes 3.1 et 3.2 la :

<u>PROPOSITION 3.5.</u> Il existe $C > 0$, $B > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ avec supp $u \subset [0,\tau_1[$, on ait, pour $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$:

$$||u;(0,\tau_1)||_1 \leqslant C\ \{||A(t;\xi',\eta,D_t)u||_{L^2(0,\tau_1)} + \sum_{j=1}^{s}\theta(\xi',\eta)^{r-m_j-\frac{1}{2}}|B_j(\xi',\eta,D_t)u(0)|\}.$$

<u>III- 2.3 - ETUDE SUR $[\tau_2,\delta]$.</u> Ici la condition "d'ellipticité générale" (D_1) va jouer un rôle essentiel.

Ayant choisi B et δ_1 de façon que la proposition 3.5 soit vérifiée, on prend δ_2 $(0<\delta_2<\delta_1)$ et on pose :

$$\tau_2 = \delta_2.\theta(\xi',\eta)^{-\frac{1}{q}}\ .$$

Pour $\delta > 0$ (indépendant de (ξ',η) et que l'on choisira plus loin), on prendra toujours B assez grand pour que : $0 < \tau_2 < \tau_1 < \delta$.

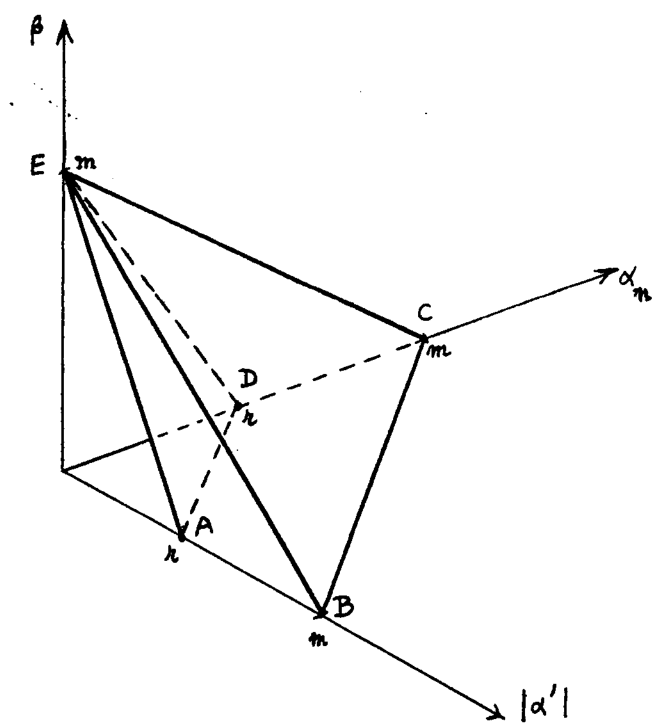
On posera :

$$||u;(\tau_2,\delta)||_2 = \sum_{j=o}^{m} ||t^{q(m-r)\frac{j}{m}}.\left[t^{q(m-r)}|\xi'|^m + \theta(\xi',\eta)^r\right]^{\frac{m-j}{m}} D_t^j u||_{L^2(\tau_2,\delta)} .$$

Pour comprendre pourquoi on définit cette norme, faisons un schéma représentant l'opérateur $A(t;D_x,D_t,D_y)$. Ce schéma est une pyramide ABCDE à l'intérieur de laquelle se trouve les triplets $(|\alpha'|,\alpha_n,\beta)$ d'ordres des dérivations dans A.

On calcule alors : $|\alpha'| + \sigma\beta + \alpha_n = m-h$

D'où l'on déduit h et la puissance de dégénérescence q(m-r-h) correspondant à $D_{x'}^{\alpha'} D_y^{\beta} D_t^{\alpha_n}$.



La face BCE correspond à la partie principale d'ordre m A^o de A puisque, sur cette face on a : $|\xi'| + \alpha_n + \beta = m$.

La norme $||.||_2$ majore tous les termes de l'opérateur A (ceci découlera de la démonstration suivante).

L'estimation a priori sur $]\tau_2,\delta[$ va utiliser un théorème de [8] sur les équations différentielles ordinaires à coefficients "peu variables". Pour se ramener à ce théorème, on va faire un changement de variables adapté à l'opérateur. Le résultat qu'on veut montrer est le suivant :

PROPOSITION 3.6. Il existe $C > 0$, $B > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec supp $u \subset]\tau_2,\delta[$ on ait, pour $\theta(\xi',\eta) \geq B$:

$$||u;(\tau_2,\delta)||_2 \leq C \, ||A(t;\xi',\eta,D_t)u||_{L^2(\tau_2,\delta)} .$$

DEMONSTRATION. Posons, pour tout $t \neq 0$ et tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n$:

$$h = h(\xi',\eta,t) = \left[\frac{t^{q(m-r)}|\xi'|^m + \theta(\xi',\eta)^r}{t^{q(m-r)}}\right]^{1/m}$$

On fait alors le changement de variables : $t \longrightarrow s$ défini par :

$$ds = h(\xi',\eta,t)\ dt .$$

Ecrivons d'abord quelques estimations qui serviront par la suite. On a :

$$h^m = |\xi'|^m + \frac{\theta(\xi',\eta)^r}{t^{q(m-r)}} .$$

On en déduit que, pour tout entier $l \in \mathbb{N}$, on a :

$$|D_t^l(h^m)| \leq C_l \, t^{-l} \, h^m .$$

Or, si u est une fonction de t ne s'annulant pas, on a, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout entier $l \geq 1$:

$$(3.9) \qquad D_t^l(u^\alpha) = \sum_{p=1}^{l} A_p u^{\alpha-p} \{ \sum_{\substack{|j|=p \\ \sum r j_r = l}} B_j \prod_{r=1}^{l} (D_t^r u)^{j_r} \} ,$$

avec : $|j| = \sum_{r=1}^{l} j_r$; (la démonstration se fait par récurrence sur l).

En prenant : $u = h^m$ et $\alpha = \frac{1}{m}$, il vient, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

(3.10) $\quad |D_t^l h| \leqslant C_l\, t^{-l}\, h$.

On a aussi :

$$D_t^l(t^{-\rho}h^\nu) = \sum_{j=o}^{l} \binom{l}{j} \beta_j\, t^{-(\rho+l-j)}\, D_t^j(h^\nu) .$$

D'où, en appliquant à nouveau (3.9) avec $u = h$, $\nu = \alpha$ et en utilisant (3.10), il vient, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

(3.11) $\quad |D_t^l(t^{-\rho}h^\nu)| \leqslant C_l\, t^{-(\rho+l)}\, h^\nu$.

De la définition de h, il est clair qu'on obtient :

(3.12) $\quad t^q h \geqslant (t^q\theta)^{r/m} \geqslant \delta_2^{\sigma q} \quad , \quad$ pour $t \geqslant \tau_2$.

D'où :

(3.13) $\quad th = \dfrac{t^q h}{t^{q-1}} \geqslant \dfrac{\delta_2^{\sigma q}}{\delta^{q-1}}$, pourra être rendu aussi grand qu'on veut à condition de prendre δ petit, puisque $q > 1$.

On a enfin :

(3.14) $\quad \theta^r \leqslant t^{q(m-r)}.h^m$

et :

(3.15) $\quad |\xi'| \leqslant h$.

On montre, par récurrence, que l'on a, pour $j \geqslant 1$:

(3.16) $\quad D_t^j u = h^j(D_s^j u + \sum_{k=1}^{j-1} \chi_{jk}\, D_s^{j-k} u)$,

avec, en utilisant (3.10) :

(3.17) $\quad |\chi_{jk}(\xi',\eta,t)| \leqslant C_k\, (th)^{-k}$

Inversement, on a, pour $j \geqslant 1$:

(3.18) $$D_s^j u = h^{-j} D_t^j u + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} h^{k-j} D_t^{j-k} u \quad ,$$

avec :

(3.19) $$|\psi_{jk}(\xi',\eta,t)| \leqslant C_k (th)^{-k} .$$

On multiplie l'équation : $A(t;\xi',\eta,D_t)u(t) = f(t)$ par $h^{-1/2}(\xi',\eta,t)$ et on fait le changement de fonctions :

$$\begin{cases} w(s) = t^{q(m-r)} h^{m-\frac{1}{2}} u(t) \\ g(s) = h^{-\frac{1}{2}} f(t) . \end{cases}$$

Alors l'équation :

$$A(t;\xi',\eta,D_t)u(t) = f(t)$$

est équivalente à l'équation :

$$P(s;D_s)\, w(s) = g(s) \; ,$$

avec :

$$P(s;D_s) = P_o(s;D_s) + P_1(s;D_s)$$

où :

$$P_o(s;D_s) = \sum_{\ell=o}^{m-r} t^{-q\ell} \sum_{|\alpha'|+\sigma\beta+\alpha_n=m-\ell} q^{m-\ell}_{(\alpha,\beta)} \xi'^{\alpha'}.\eta^{\beta}.h^{\alpha_n-m}.D_s^{\alpha_n} .$$

et $P_1(s;D_s)$ est combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\psi_{(\alpha,\beta)}\, t^{-q\ell}\, \xi'^{\alpha'}.\eta^{\beta}.h^{\alpha_n-m}.\,D_s^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad |\alpha'|+\sigma\beta+\alpha_n = m-\ell \; ,$$

où les fonctions $\psi_{(\alpha,\beta)}$ vérifient, pour $th \geqslant 1$ et $0 < \delta < 1$:

(3.20) $$\begin{cases} |\psi_{(\alpha,\beta)}(\xi',\eta,t)| \leqslant C\,(th)^{-1} \\ \text{ou :} \\ |\psi_{(\alpha,\beta)}(\xi',\eta,t)| \leqslant C\,\delta^{(q-1)} \end{cases}$$

Donc, si δ est petit, ces fonctions sont petites sur $[\tau_2,\delta]$.

Montrons maintenant que les coefficients de $P_o(s;D_s)$ sont bornés. Pour cela, nous allons revenir à la figure de la page 16 qui montre que les points A,B,C,D,E ont les coordonnées respectives suivantes :

$$(r,0,0)\ ,\ (m,0,0)\ ,\ (0,m,0)\ ,\ (0,r,0)\ ,\ (0,0,m).$$

Tout $(|\alpha'|,\alpha_n,\beta)$ correspondant à un terme de $P_o(s;D_s)$ est un barycentre de ces cinq points ; c'est-à-dire qu'il existe cinq réels positifs θ_i, $i = 1,\dots,5$ avec $\sum_{i=1}^{5} \theta_i = 1$ et tels que :

$$|\alpha'| = \theta_1 r + \theta_2 m$$

$$\alpha_n = \theta_3 m + \theta_4 r$$

$$\beta = \theta_5 m\ .$$

On a alors : $m-\ell = |\alpha'| + \frac{r}{m}\beta + \alpha_n = (\theta_1 + \theta_4 + \theta_5)r + (\theta_2 + \theta_3)m$

D'où : $\quad -\ell = (\theta_1 + \theta_4 + \theta_5)\ (r-m)$

et : $\quad \alpha_n - m = -(\theta_1 + \theta_5 + \theta_2)m + \theta_4(r-m)$

Ecrivons : $\alpha' = \alpha_1' + \alpha_2'$ avec : $|\alpha_2'| = \theta_2 m$.

Alors :

$$|\xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}t^{-q\ell}h^{\alpha_n-m}| < C|\xi'|^{|\alpha_2'|}.\theta(\xi';\eta)^{(\theta_1+\theta_5)r}t^{(\theta_1+\theta_4+\theta_5)q(r-m)}h^{\theta_4(r-m)-(\theta_1+\theta_2+\theta_5)}$$

$$\leqslant C\ (\theta^{r}t^{-q(m-r)}h^{-m})^{\theta_1+\theta_5}.(|\xi'|h^{-1})^{\theta_2 m}.(t^q h)^{\theta_4(r-m)}$$

D'après (3.14) et (3.15), il vient :

$$|\xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}t^{-q\ell}h^{\alpha_n-m}| \leqslant C.\ (t^q h)^{\theta_4(r-m)} \leqslant C\ \delta_2^{\theta_4\sigma q(r-m)} < C'\ .$$

On en déduit que les coefficients de l'opérateur $P_o(s;D_s)$ sont bornés et, en utilisant les inégalités (3.20), on en déduit aussi que les coefficients de $P_1(s;D_s)$ peuvent être rendu aussi petit que l'on veut à condition de prendre δ assez petit et B assez grand.

Etudions maintenant les dérivées des coefficients de $P_o(s;D_s)$. Pour tout entier $k = 1,\dots,m$, on a, pour $|\alpha'|+\sigma\beta+\alpha_n = m-\hbar$:

$$D_s^k(\xi'^{\alpha'}\eta^\beta t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m}) = \xi'^{\alpha'}\eta^\beta D_s^k(t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m})$$

$$= \xi'^{\alpha'}\eta^\beta h^{-k} D_t^k(t^{-qh} h^{\alpha_n-m})$$

$$+ \xi'^{\alpha'}\eta^\beta \sum_{l=1}^{k-1} \psi_{kl}\, h^{l-k}\, D_t^{k-1}\, (t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m})\,.$$

On utilise (3.11) et (3.19). Il vient :

$$|\xi'^{\alpha'}\eta^\beta h^{-k} D_t^k(t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m})| \leqslant C\ |\xi'^{\alpha'}\eta^\beta t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m}|(th)^{-k} \leqslant C''(th)^{-k}$$

et :

$$|\xi'^{\alpha'}\eta^\beta\ \psi_{kl}\ h^{l-k} D_t^{k-1}\ (t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m})| \leqslant C|\xi'^{\alpha'}\eta^\beta t^{-q\hbar} h^{\alpha_n-m}|\ (th)^{-k} \leqslant C''\ (th)^{-k}\ .$$

Les dérivées des coefficients de $P_o(s;D_s)$ peuvent donc être rendues aussi petites que l'on veut à condition de prendre δ assez petit.

Pour pouvoir utiliser la proposition (2.1) de [8] sur les équations différentielles à coefficients "peu variables", il reste à vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $s(\tau_2) \leqslant s \leqslant (\delta)$, les racines $\zeta_\nu(t;\xi',\eta)$ de $P_o(s;\zeta) = 0$ vérifient :

(3.21) $\quad |\mathrm{Im}\ \zeta_\nu\ (t;\xi',\eta)| \geqslant C$.

Tout d'abord, le coefficient de D_s^m dans $P_o(s;D_s)$ est :

$$q^m_{(o,\dots,o,m,o)} \neq 0 \quad , \quad \text{en vertu de l'ellipticité de A.}$$

On peut donc supposer, dans toute cette section, qu'il est égal à 1. Revenons aux racines de $P_o(s;\zeta) = 0$.

Le polynôme $A(1;\xi',\eta,z)$ est elliptique. Donc, si $z_\nu(t;\xi',\eta)$ désignent les racines de $A(t;\xi',\eta,z) = 0$, on a :

(3.22) $\quad |\mathrm{Im}\, z_\nu\ (1;\xi',\eta)| \geqslant C\,(|\xi'|^2 + \eta^2)^{1/2}$, pour $(|\xi'|^2 + \eta^2)^{1/2} \geqslant A$,

avec A assez grand. Cette inégalité est donc vraie pour $\theta(\xi',\eta) \geqslant A'$, avec A' assez grand.

Mais d'après l'hypothèse "d'ellipticité générale" (D_1), $A(1;\xi',\eta,z)$ ne s'annule pas pour $\delta_2^q \leqslant \theta(\xi',\eta) \leqslant A'$. Donc l'inégalité (3.22) reste vraie, quite à changer la constante C, pour $\theta(\xi',\eta) \geqslant \delta_2^q$.

Or, on a :

$$P_o(s,\zeta) = t^{-q(m-r)}\ h^{-m}\ A(t;\xi',\eta,h\zeta)$$

et :

$$A(t;\xi',\eta,\zeta) = t^{-qr}\ A(1;t^q\xi',t^{\sigma q}\eta,t^q\zeta)\ .$$

Les racines ζ_ν de $P_o(s,\zeta) = 0$ vérifient donc :

$$|\mathrm{Im}\ \zeta_\nu(t;\xi',\eta)| = h^{-1}t^{-q}\ |\mathrm{Im}\ z_\nu\ (1;t^q\xi',t^{\sigma q}\eta)|$$

$$\geqslant C\ h^{-1}\ t^{-q}\ (|t^q\xi'|^2 + |t^{\sigma q}\eta\ ^2)^{1/2}\ ,$$

pour $\theta(t^q\xi',t^{\sigma q}\eta) \geqslant \delta_2^q$,

c'est-à-dire : $(t^{2q}|\xi'|^2 + t^{2q}\eta^{2/\sigma})^{1/2} = t^q\theta(\xi',\eta) \geqslant \delta_2^q$;

soit : $t \geqslant \delta_2\ \theta(\xi',\eta)^{-\frac{1}{q}} = \tau_2$, ce qui est réalisé puisqu'on travaille sur $[\tau_2,\delta]$.

Pour démontrer l'inégalité (3.21), il reste donc à prouver qu'il existe une constante C telle que :

(3.23) $\quad t^q h \leqslant C\,(|t^q\xi'|^2 + (t^{\sigma q}\eta)^2)^{1/2}$.

on a :

$$(t^q h)^m = (t^q|\xi'|)^m + (t^q\theta)^r .$$

bien sûr :

$$(t^q|\xi'|)^m \leqslant C\,\left[(t^q|\xi'|)^2 + (t^{\sigma q}\eta)^2\right]^{m/2} .$$

D'autre part :

$$(t^q\theta)^{2r} = \left[(t^q|\xi'|)^2 + (t^{\sigma q}\eta)^{2/\sigma}\right]^r$$

$$= \sum_{j=o}^{r} \binom{r}{j} (t^q|\xi'|)^{2r-2j}\,(t^{\sigma q}\eta)^{\frac{2j}{\sigma}}$$

et :

$$\left[(t^q|\xi'|)^2 + (t^{\sigma q}\eta)^2\right]^m = \sum_{j=o}^{m} \binom{m}{j} (t^q|\xi'|)^{2m-2j}\,(t^{\sigma q}\eta)^{2j}$$

$$\geqslant \sum_{j=o}^{r} C_j\,(t^q|\xi'|)^{1/\sigma(2r-2j)}\,(t^{\sigma q}\eta)^{2j/\sigma}$$

or : $\quad (t^q|\xi'|)^{2(1-\frac{1}{\sigma})(r-j)} \leqslant C\,\delta_2^{2q(1-\frac{1}{\sigma})(r-j)}$

car : $1 - \frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma-1}{\sigma} \leqslant 0$ et $t^q|\xi'| \geqslant \frac{1}{2}\,\delta_2^q$.

L'inégalité (3.23) est donc prouvée, donc aussi l'inégalité (3.21).

On peut maintenant appliquer le résultat de la proposition 2.1 de [8]. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $w(s) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} w \subset \,]s(\tau_2),\, s(\delta)[$, on ait :

(3.24) $$\sum_{j=o}^{m} ||D_s w||_{L^2(s(\tau_2),s(\delta))} \leqslant C\,||(P_o+P_1)w||_{L^2(s(\tau_2)s(\delta))}$$

On revient alors à la variable t. En utilisant les égalités (3.16) et (3.18) et les inégalités (3.17), (3.19) (3.20) ainsi que les majorations des coefficients de P_o et P_1, il vient :

$$||u;(\tau_2,\delta)||_2 \leqslant C\,||A(t;\xi',\eta,D_t)u||_{L^2(\tau_2,\delta)} ,$$

ce qui est le résultat annoncé dans la proposition 3.6.

III - 2.4. ETUDE SUR $[0,\delta]$. On choisit $\delta_1 > 0$ dans la proposition 3.5, puis $0 < \delta_2 < \delta_1$; ensuite on prend $\delta > 0$ assez petit et $B > 0$ assez grand de façon que les propositions 3.5 et 3.6 soient vérifiées pour $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$.

On va faire une partition de l'unité. Soit $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\Phi_1 \equiv 1$ sur un voisinage de $[0,\delta_2]$ et supp $\Phi_1 \subset]-1,\delta_1[$. On pose alors : $\Phi_2 = 1 - \Phi_1$ et, pour $j = 1,2$:

$$\varphi_j(t) = \Phi_j\ (t.\theta(\xi',\eta)^{\frac{1}{q}}) .$$

Soit $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$, avec supp $u \subset [0,\delta[$. Alors :

$$u = \varphi_1\ u + \varphi_2\ u .$$

Pour $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$, avec supp $v \subset [0,\delta[$, on définit :

$$||v;(0,\delta)||_3 = ||v;(0,\delta_1)||_1 + ||v;\ (\tau_2,\delta)||_2 .$$

On a les deux lemmes suivants :

LEMME 3.3. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ avec supp $u \subset [0,\delta[$ et pour tout $j = 1,2$, on ait :

$$||\varphi_j\ u\ ;\ (0,\delta)||_3 \leqslant C\ ||\ u\ ;\ (0,\delta)||_3 .$$

DEMONSTRATION. Sur $[\tau_2,\tau_1]$ les normes : $||u\ ;\ (\tau_2,\tau_1)||_1$, $||\ u\ ;\ (\tau_2,\tau_1)||_2$ et $||\ u\ ;\ (\tau_2,\tau_1)||_3$ sont équivalentes à la norme :

$$||\ u\ ;\ (\tau_2,\tau_1)||'_1 = \sum_{h=o}^{m} \theta(\xi',\eta)^{r-h}\ ||D_t^h\ u||_{L^2(\tau_2,\tau_1)} .$$

Pour démontrer le lemme 3.3 on utilise alors le fait que les fonctions φ_j $(j=1,2)$ sont égales à 0 ou 1 sur les intervalles $(0,\tau_2)$ et (τ_1,δ)

et satisfont, sur (τ_2,τ_1) les inégalités suivantes :

(3.25) $$|D_t^1 \varphi_j| \leqslant C_j.\theta(\xi',\eta)^{1/q}$$
$$\leqslant C_j.\theta(\xi',\eta)^1 \quad , \quad j = 1,2, \quad (\text{car } q > 1).$$

LEMME 3.4. Il existe une constante $C > 0$ et une constante $\lambda > 0$ telles que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ avec supp $u \subset [0,\delta[$ et tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$, on ait :

$$||(A\varphi_j - \varphi_j A)u||_{L^2(0,\delta)} \leqslant C\ \theta(\xi',\eta)^{-\lambda}\ ||u\ ;\ (0,\delta)||_3 \ , \quad j = 1,2.$$

DEMONSTRATION. Elle découle encore du fait que les dérivées des φ_j sont nulles sur $(0,\tau_2)$ et (τ_1,δ) et que, sur (τ_2,τ_1), on a les majorations (3.25) pour les dérivées des φ_j.

On peut prendre $-\lambda = \frac{1-q}{q} < 0$, car $q > 1$.

On déduit alors des propositions 3.5 et 3.6, en utilisant les lemmes 3.3 et 3.4, la :

PROPOSITION 3.7. Les nombres $\delta > 0$ et $B > 0$ ayant été choisis comme précédemment, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$, avec supp $u \subset [0,\delta[$ et pour tout $(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$, on ait :

$$||u\ ;\ (0,\delta)||_3 \leqslant C\ \{||\mathcal{A}(t;\xi',\eta,D_t)u||_{L^2(0,\delta)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \theta(\xi',\eta)^{r-m_j-\frac{1}{2}} |B_j(\xi',\eta,D_t)u(0)|.$$

III - 2.5. ETUDE POUR $\theta(\xi',\eta) \leqslant B$.

PROPOSITION 3.8. Pour tout $B > 0$, il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout

$(\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n$ avec $\theta(\xi',\eta) \leqslant B$ et tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ tel que supp $u \subset [0,\delta[$, on ait :

$$\sum_{k=o}^{m-r} ||D_t^{r+k}\{ t^{q_k} u\}||_{L^2(0,\delta)} + \sum_{h=o}^{r} ||D_t^h u||_{L^2(0,\delta)} \leqslant C||A(t;\xi',\eta,D_t)u||_{L^2(0,}$$

DEMONSTRATION. Pour simplifier l'écriture on notera :

$$||u\ ;\ (0,\delta)||_1'' = \sum_{k=o}^{m-r} ||D_t^{r+k}\ \{t^{q_k} u\}||_{L^2(0,\delta)} + \sum_{h=o}^{r} ||D_t^h u||_{L^2(0,\delta)}$$

Considérons à nouveau l'opérateur :

$$M(t;D_t) = \sum_{k=o}^{m-r} a_k\ D_t^k\ \{t^{q_k} .\}\ ,$$

avec : $\quad a_k = q^{r+k}_{(0,\dots,0,r+k,0)}$.

On remarque que $D_t^r o M(t;D_t)$ représente exactement les termes de l'opérateur A qui ne contiennent que des dérivations par rapport à t (c'est-à-dire l'arête DC sur la figure de la page 16).

Pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ avec supp $u \subset [0,\delta[$, on a, à condition de prendre $\delta > 0$ assez petit :

$$||u||_{H^r(0,\delta)} \leqslant C\ ||D_t^r\ u||_{L^2(0,\delta)}\quad ,\qquad \text{où } C > 0$$

ne dépend pas de u ni de δ.

Si l'on applique cette inégalité à $M(t;D_t)u$, il vient :

$$||M(t;D_t)u||_{H^r(0,\delta)} \leqslant C\ ||D_t^r o M(t;D_t)u||_{L^2(0,\delta)}\ .$$

Maintenant on utilise la proposition 3.2. Il vient :

$$(3.26)\qquad ||u\ ;\ (0,\delta)||_1'' \leqslant C\ ||D_t^r\ Mu||_{L^2(0,\delta)}\ .$$

Pour finir la démonstration de la proposition 3.8, on remarque que $A(t;\xi',\eta,D_t) - D_t^r oM(t;D_t)$ est combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\xi'^{\alpha'}\eta^{\beta}D_t^{\alpha_n}\{t^{q(m-r-h)}.\}$$

avec : $\begin{cases} h = 0,\dots,m-r \\ |\xi'| + \sigma\beta + \alpha_n = m-h \\ \alpha_n < m-h \end{cases}$

Pour majorer ces termes on distingue deux cas, comme dans la démonstration du lemme 3.1. Et on utilise le fait que $\theta(\xi',\eta) \leq B$, $t \leq \delta$ (δ pouvant être pris aussi petit qu'on veut) ainsi que les inégalités :

$$||D_t^{\alpha_n - j} u||_{L^2(0,\delta)} \leq \delta^j \; ||D_t^{\alpha_n}u||_{L^2(0,\delta)} \quad , j = 0,\dots,\alpha_n \; ,$$

pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ tel que supp $u \subset [0,\delta[$; tout ceci permet de montrer que, pour δ assez petit on a, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ tel que supp $u \subset [0,\delta[$, et pour $\theta(\xi',\eta) \leq B$:

$$||(A(t;\xi',\eta,D_t) - D_t^r oM(t;D_t))u||_{L^2(0,\delta)} \leq \varepsilon \; ||u;(0,\delta)||''_1 \; .$$

L'estimation annoncée dans la proposition 3.8 résulte alors de l'inégalité (3.26).

<u>III - 2.5. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1.</u> Il suffit de faire la démonstration pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$:

Soit $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ avec supp $u \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\delta[\times \mathbb{R}$.

On définit $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+})$ par :

$v(t) = \hat{u}\,(\xi',t,\eta)$, où $\hat{}$ désigne la transformée de Fourier par rapport aux variables x' et y. On écrit les inégalités obtenues dans les propositions 3.7 et 3.8, pour $\mathcal{N}(t)$. Il ne reste plus qu'à intégrer en (ξ',η) en séparant les deux cas $\theta(\xi',\eta) \geqslant B$ et $\theta(\xi',\eta) \leqslant B$. Et l'on obtient immédiatement le résultat cherché.

III - 3. ESTIMATION A PRIORI DANS LE CAS DU DEMI-ESPACE $\mathbb{R}_+^{n+1}$, POUR LES COEFFICIENTS VARIABLES.

On considère l'opérateur A défini sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$A(t;(x,y);D_x,D_y) = \sum_{h=o}^{m-r} Q^{m-h}(x,y;D_x,D_y)\ \{t^{q(m-r-h)}.\} ,$$

où m et r sont deux entiers tels que $0 \leqslant r \leqslant m$, q est un réel >1 tel que $q(m-r) \in \mathbb{N}$ et où :

(i) pour $h = 0,\ldots,m-r$, $Q^{m-h}(x,y;D_x,D_y)$ est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients C^∞, de la forme :

$$Q^{m-h}(x,y;D_x,D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta\leqslant m-h \\ |\alpha|+\beta\leqslant m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)}(x,y)D_x^\alpha D_y^\beta ,$$

avec : $D_x = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)$ et $D_y = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$; (si $q(m-r-h) \notin \mathbb{N}$, $Q^{m-h}(x,y;D_x,D_y)$ est, par définition, l'opérateur identiquement nul).

Pour tout $h = 0,\ldots,m-r$, notons :

$$Q^{m-h}_{m-h}(x,y;D_x,D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta=m-h \\ |\alpha|+\beta\leqslant m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)}(x,y)\ D_x^\alpha\ D_y^\beta$$

$$Q^{m-h}_{m}(x,y;D_x,D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta\leqslant m-h \\ |\alpha|+\beta=m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)}(x,y)\ D_x^\alpha\ D_y^\beta$$

et : $$Q^{m-h}_{m-h,m}(x,y;D_x,D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta=m-h \\ |\alpha|+\beta=m}} q^{m-h}_{(\alpha,\beta)}(x,y)\, D^{\alpha}_x D^{\beta}_y$$

(ii) A est un opérateur d'ordre m tel que $A(t;0;D_x,D_y)$ soit elliptique d'ordre m pour $t > 0$,

c'est-à-dire, pour tout $t > 0$ et tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$A^m(t;0,\xi,\eta) = \sum_{h=0}^{m-r} Q^{m-h}_m(0;\xi,\eta)t^{q(m-r-h)} \neq 0 .$$

On en déduit que, pour tout $t > 0$ et tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$A^o(t;0;\xi,\eta) = \sum_{h=0}^{m-r} Q^{m-h}_{m-h,m}(0;\xi,\eta)t^{q(m-r-h)} \neq 0 .$$

On fait, de plus, sur l'opérateur A l'hypothèse "d'ellipticité générale" suivante :

$$(D_2) \quad \begin{cases} \text{Pour tout } t \geqslant 0 \text{ et tout } (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}, \text{ on a :} \\ A_o(t;0;\xi,\eta) = \sum_{h=0}^{m-r} Q^{m-h}_{m-h}\ (0;\xi,\eta)\ t^{q(m-r-h)} \neq 0 \end{cases}$$

Cette hypothèse implique en particulier que l'opérateur $Q^r(x,y;D_x,D_y)$ est quasi-elliptique, c'est-à-dire que, pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$Q^r_r\ (0;\xi,\eta) \neq 0 .$$

On suppose que Q^r est proprement quasi-elliptique d'ordre 2s. On définit alors s opérateurs frontière à coefficients C^∞:

$$B_j\ (x',y;D_x,D_y) = \sum_{|\alpha|+\frac{r}{m}\beta\leqslant m_j} b^j_{(\alpha,\beta)}(x',y)\ D^{\alpha}_x\ D^{\beta}_y\ ,\ j = 1,\ldots,s\ ,$$

où, pour tout $j = 1,\ldots,s$, m_j est un entier inférieur ou égal à r-1. On note

$\gamma B = (\gamma B_j\ ;\ j = 1,\ldots,s)$ où γ est l'opérateur restriction à $\mathbb{R}^n$.

On notera B_j° la partie principale quasi-homogène d'ordre m_j de B_j. On suppose que le système $(B_{j_n}\ ;\ j = 1,\ldots,s)$ est normal et l'on fait alors l'hypothèse de "recouvrement" :

$$(D_2')\quad \begin{cases} \text{Pour tout } (\xi',\eta) \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \text{ les polynômes en } \tau: \\ B_j^o\ (0;\xi',\tau,\eta) = \displaystyle\sum_{|\alpha'|+\alpha_n+\frac{r}{m}\beta=m_j} b^j_{(\alpha,\beta)}(0)\ \xi'^{\alpha'}\tau^{\alpha_n}\eta^\beta\ ,\ j = 1,\ldots,s\ , \\ \text{sont linéairement indépendants modulo le polynôme :} \\ M^+(\xi',\eta,\tau) = \displaystyle\prod_{k=1}^{s}\ (\tau-\tau_k^+(\xi',\eta))\ ,\ \text{où } \tau_k^+(\xi',\eta) \text{ sont les racines à par-} \\ \text{tie imaginaire positive de } Q_r^r(0;\xi',\tau,\eta) = 0. \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3.9. Sous les conditions (D_2) et (D_2'), il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $u \in W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec $\operatorname{supp} u \subset B(0,\delta)$, on ait :

$$||u||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leqslant C\{||Au||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + \sum_{j=1}^{s} ||\gamma B_j u||_{H^{r-m_j-\frac{1}{2},\sigma}(\mathbb{R}^n)} + ||u||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\}.$$

DEMONSTRATION. On applique la proposition 3.1 à l'opérateur à coefficients constants :

$$(A_o(t;0;D_x,D_y)\ ;\ \gamma B_j^o(0;D_x,D_y)\quad ,\quad j = 1,\ldots,s)\ .$$

Il reste ensuite à évaluer la norme des différences :

$$(A(t;(x,y);D_x,D_y) - A(t;0;D_x,D_y))u$$

et :

$$\gamma(B_j(x',y;D_x,D_y) - B_j(0;D_x,D_y))u\quad ,\quad j = 1,\ldots,s$$

et de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ avec supp $u \subset B(0,\delta)$, on ait :

$$\|(A(t;(x,y);D_x,D_y) - A(t;0;D_x,D_y))u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leqslant \varepsilon \|u\|_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

et, pour $j = 1,\ldots,s$:

$$\|\gamma(B_j(x',y;D_x,D_y) - B_j(0;D_x,D_y))u\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2},\sigma}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon\|u\|_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}$$

Ceci se fait de façon classique (cf. [6] par exemple), en utilisant les propriétés des espaces et en remarquant que, à condition de prendre $\delta > 0$ petit, les coefficients des opérateurs varient peu dans $B(0,\delta)$.

III - 4. ETUDE SUR $\mathcal{C} = \Omega \times \mathbb{R}$; (démonstration du théorème 3.1).

On reprend les notations des paragraphes I, II et III-1. On a vu que les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 3.1 impliquent, pour l'opérateur $A = L - e^{i\theta}D_y^m$, l'ellipticité dans $\overline{\mathcal{C}}$, la condition "d'ellipticité générale" (D) et, pour le problème $(Q^r,\gamma B)$, la condition de "recouvrement" (D').

Par "cartes locales" et partition de l'unité, on se ramène, pour démontrer le théorème 3.1, à la situation du paragraphe III.3. Et l'on démontre (cf. [6]) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{C}})$ tel que $v = 0$ pour $|y| \geqslant 1$, on a :

$$\|v\|_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathcal{C})} \leqslant C \{\|Av\|_{L^2(\mathcal{C})} + \sum_{j=1}^{s}\|\gamma B_j v\|_{H^{r-m_j-\frac{1}{2},\sigma}(\partial\mathcal{C})} + \|v\|_{L^2(\mathcal{C})}\},$$

où $H^{r-m_j-\frac{1}{2},\sigma}(\partial\mathcal{C})$ est défini de façon habituelle à partir de $H^{r-m_j-\frac{1}{2},\sigma}(\mathbb{R}^n)$ par "cartes locales" et partition de l'unité.

On en déduit évidemment le résultat du théorème 3.1 pour les fonctions v telles que $\gamma B_j v = 0$ pour $j = 1,\dots,s$.

III - 5. DEMONSTRATION DE LA CONDITION SUFFISANTE.

Ayant l'estimation du théorème 3.1, la démonstration suit celle utilisée dans [1]. Soit $\zeta(y)$ une fonction fixée C^∞, telle que $\zeta(y) = 0$ pour $|y| \geq 1$, $\zeta(y) = 1$ pour $|y| \leq \frac{1}{2}$. Etant donné une fonction $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que:

$$\gamma B_j u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad j = 1,\dots,s \quad ,$$

on définit :

$$v_\mu(x,y) = \zeta(y) e^{i\mu y}\, u(x) \quad , \qquad \mu \in \mathbb{R} \, .$$

Pour tout $r > 0$, notons $\mathcal{C}_r = \{(x,y) \in \mathcal{C} \, ; \, |y| < r\}$. Le théorème 3.1 peut s'appliquer à v_μ. Il vient :

$$(3.27) \qquad ||v_\mu||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathcal{C}_1)} \leq C \, \{||Av_\mu||_{L^2(\mathcal{C}_1)} + ||v_\mu||_{L^2(\mathcal{C}_1)}\}.$$

Mais $Av_\mu = \zeta(y) e^{i\mu y}(L-\mu^m e^{i\theta})u$ + une combinaison linéaire de dérivées en y d'ordre $\leq m-1$ de $e^{i\mu y}\, u(x)$. On déduit alors de (3.27) l'inégalité :

$$(3.28) \qquad ||ue^{i\mu y}||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathcal{C}_{1/2})} \leq ||v_\mu||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathcal{C}_1)}$$

$$\leq C \, \{||(L-\mu^m e^{i} \;)u||_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=o}^{m-1} |\mu|^{m-1-j} ||u||_{H^{[\sigma j]}(}$$

où $[\sigma j]$ est la partie entière de σj.

$$\text{Or :} \qquad ||ue^{i\mu y}||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathcal{C}_{1/2})} \geq ||ue^{i\mu y}||_{H^{r,\sigma}(\mathcal{C}_{1/2})}$$

$$\geq \sum_{|\alpha|+\sigma\beta=r}' ||D_x^\alpha u(x) . D_y^\beta (e^{i\mu y})||_{L^2(\mathcal{C}_{1/2})}$$

d'où :

$$(3.29) \qquad ||ue^{i\mu y}||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathscr{C}_{1/2})} \geqslant C \sum_{j=o}^{m} |\mu|^{m-j} \, ||u||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)}$$

On déduit de (3.28) et (3.29) :

$$\sum_{j=o}^{m} |\mu|^{m-j}||u||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)} \leqslant C \, ||(L-\mu^m e^{i\theta})u||_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{|\mu|} \sum_{j=o}^{m-1} |\mu|^{m-j}||u||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)}$$

Ceci donne :

$$(3.30) \qquad (1 - \frac{C}{|\mu|}) \sum_{j=o}^{m} |\mu|^{m-j}||u||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)} \leqslant C \, ||(L-\mu^m e^{i\theta})u||_{L^2(\Omega)} \ .$$

On pose alors $\lambda = \mu^m e^{i\theta}$. Il résulte de (3.30) que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ telle que $\gamma B_j u = 0$ sur Γ, pour $j = 1,\dots,s$ et pour tout λ sur le rayon $\arg\lambda = \theta$ tel que $|\lambda|^{1/m} = |\mu| \geqslant 2C$, on a l'inégalité suivante :

$$(3.31) \qquad \sum_{j=o}^{m} |\lambda|^{\frac{m-j}{m}} \, ||u||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)} \leqslant 2C \, ||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} \ .$$

Par densité, cette inégalité reste vraie dans $D(L_2)$. Prenant $j = 0$ dans l'inégalité (3.31), on déduit que pour tout $u \in D(L_2)$, et pour tout λ assez grand tel que $\arg\lambda = \theta$, on a :

$$(3.32) \qquad ||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \, ||(L_2-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} \ .$$

C'était la propriété (a) que l'on voulait démontrer. L'inégalité (3.32) montre en particulier que, pour tout λ assez grand tel que $\arg\lambda = \theta$, l'application $u \longmapsto (L_2-\lambda)u$ est injective de $D(L_2)$ dans $L^2(\Omega)$. Pour complèter la démonstration de la condition suffisante du théorème 2.1 on doit encore montrer la propriété (b) c'est-à-dire que l'image de l'application : $u \longmapsto (L_2-\lambda)u$ est $L^2(\Omega)$ tout entier pour λ assez grand tel que $\arg\lambda = \theta$. Ceci résulte de l'existence d'un problème adjoint formel $(L^*, \gamma B_j^*)$ qui vérifie les mêmes propriétés que le problème $(L,\gamma B_j)$ (cf. [5]). De plus, ce problème vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 2.1 par rapport au rayon conjugué $\arg\lambda = -\theta$.

La condition suffisante est donc complètement démontrée.

IV - DEMONSTRATION DE LA CONDITION NECESSAIRE.

On se place sous les notations et hypothèses du paragraphe I. On doit montrer que si l'inégalité (3.32) est vérifiée pour tout $u \in D(L_2)$ et tout λ assez grand tel que $\arg\lambda = \theta$, alors les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 2.1 sont vérifiées.

Montrons tout d'abord que l'inégalité (3.32) implique l'inégalité plus forte (3.31). On a, pour tout $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $\gamma B_j = 0$, pour $j = 1,\dots,s$ et pour tout λ assez grand tel que $\arg\lambda = \theta$:

$$(4.1) \qquad ||u||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|} ||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} .$$

Or, d'après le théorème 1.1, on a :

$$(4.2) \qquad ||u||_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \leq C_o \{||Lu||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)}\}$$

$$\leq C_o \{||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} + (1+|\lambda|)||u||_{L^2(\Omega)}\}$$

$$\leq C_1 ||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} \text{ , pour } \lambda \text{ assez grand tel que}$$

$\arg\lambda = \theta$.

Maintenant, pour tout $j = 0,\dots,m$, on a (cf. [4], par exemple)

$$(4.3) \qquad ||u||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)} \leq C\, ||u||_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{[\sigma j]}{r}} \; ||u||_{H^r(\Omega)}^{\frac{[\sigma j]}{r}}$$

$$\leqslant C \; ||u||_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{[\sigma j]}{r}} \cdot ||u||_{W^m_{q,m-r}(\Omega)}^{\frac{[\sigma j]}{r}}$$

Utilisant (4.1), (4.2) et (4.3), il vient alors que pour λ assez grand avec $\arg\lambda = \theta$ et tout $j = 0,\dots,m$, on a :

$$(4.4) \qquad ||u||_{H^{|\sigma j|}(\Omega)} \leqslant C \; |\lambda|^{j/m^{-1}} \cdot ||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} \; .$$

Cette inégalité implique l'inégalité (3.31). De la même façon, on démontre :

$$(4.4') \qquad ||\varphi^{q(m-r)}u||_{H^j(\Omega)} \leqslant C \; |\lambda|^{j/m^{-1}} \cdot ||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} \, , \text{ pour } j = 0,\dots,m.$$

Considérons alors $v(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{C}})$, v étant périodique en y, de période 2π et vérifiant $\gamma B_j v = 0$ sur $\partial\mathcal{C}$ pour $j = 1,\dots,s$.

Soit : $v(x,y) \sim \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)e^{iny}$ le développement en série de Fourier de v.

On a : $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $\gamma B_j u_n = 0$ sur Γ pour $j = 1,\dots,s$.

On a aussi les développements en série suivants :

$$(4.5) \qquad D_x^\alpha D_y^j v \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} D_x^\alpha u_n \cdot (n)^j e^{iny}$$

et :

$$(4.6) \qquad A(x;D_x,D_y) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} (L(x;D_x) - n^m e^{i\theta}) \, u_n(x) . e^{iny} \; .$$

De plus, d'après (4.4) et (4.4'), on a, pour $j = 0,\dots,m$ et pour $n \geqslant N_o$:

$$(4.7) \qquad ||u_n||_{H^{[\sigma j]}(\Omega)} \leqslant C \; |n|^{j-m} ||(L-n^m e^{i\theta})u_n||_{L^2(\Omega)} \, .$$

et :

$$(4.8)\qquad ||\varphi^{q(m-r)}.u_n||_{H^j(\Omega)} \leqslant C\ |n|^{j-m}||(L-n^m e^{i\theta})u_n||_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $n \leqslant N_o$, on a :

$$(4.9)\qquad ||u_n||_{W^m_{q,m-r}(\Omega)} \leqslant C_o\ \{||(L-n^m e^{i\theta})u_n||_{L^2(\Omega)} + (1+N_o)||u_n||_{L^2(\Omega)}\}.$$

On déduit alors des développements (4.5) et (4.6) et des inégalités (4.7), (4.8) et (4.9) que $\mathscr{v}$ satisfait l'inégalité a priori suivante sur $\mathscr{C}_\pi$:

$$(4.10)\qquad ||\mathscr{v}||_{W^m_{q,m-r}(\mathscr{C}_\pi)} \leqslant C\ \{||A\mathscr{v}||_{L^2(\mathscr{C}_\pi)} + ||\mathscr{v}||_{L^2(\mathscr{C}_\pi)}\}.$$

Par cartes locales, on déduit de (4.10) qu'il existe $\rho > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $\mathscr{v} \in W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec supp $\mathscr{v} \subset B(0,\rho)$ et $\gamma\mathscr{B}_j\mathscr{v} = 0$, $j = 1,\dots,s$, on a :

$$(4.11)\qquad ||\mathscr{v}||_{W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \leqslant C\ \{||\mathscr{A}\mathscr{v}||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)} + ||\mathscr{v}||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)}\},$$

où $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}_j$ sont des opérateurs de la forme de ceux définis au paragraphe III-3.

Soit alors : $\mathscr{v} \in W^{m,\sigma}_{q,m-r}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec supp $\mathscr{v} \subset B(0,\rho)$ et $\gamma\mathscr{B}_j\mathscr{v} = 0$, $j = 1,\dots,s$.

On pose, pour $\lambda > 0$:

$$\mathscr{v}_\lambda(x,y) = \mathscr{v}(\lambda x, \lambda^\sigma y).$$

Pour tout $h = 0,\dots,m-r$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $|\alpha|+\sigma\beta \leqslant m-h$, on a, en posant $|\alpha|+\sigma\beta = m-h-s$:

$$D^{\alpha'}_{x'}D^{\beta}_{y}D^{\alpha_n}_{t}\ \{t^{q(m-r-h)}\mathscr{v}(\lambda x, \lambda^\sigma y)\} =$$

$$= \lambda^{-q(m-r-h)} . D_{x'}^{\alpha'} D_y^{\beta} D_t^{\alpha_n} \{(\lambda t)^{q(m-r-h)} v(\lambda x, \lambda^{\sigma} y)\}$$

$$= \lambda^{r-s} . \lambda^{(1-q)(m-r-h)} . D_{x'}^{\alpha'} D_y^{\beta} D_t^{\alpha_n} \{t^{q(m-r-h)} v\}(\lambda x, \lambda^{\sigma} y) .$$

On en déduit, en appliquant l'inégalité (4.11) à v_λ, en simplifiant par $\lambda^{r-\frac{n+\sigma}{2}}$ et en faisant tendre λ vers $+\infty$, l'inégalité :

$$(4.12) \qquad ||v||_{H^{r,\sigma}(\mathbb{R}_+^{n+1})} \leqslant C \{||Q_r^r(0;D_x,D_y)v||_{L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})} + ||v||_{L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})}\} .$$

Comme dans [2], on en déduit que $Q^r(0;D_x,D_y)$ est quasi-elliptique et que $(Q_r^r(0;D_x,D_y), \gamma\mathcal{B}_j^o(0;D_x,D_y))$ vérifie la condition de recouvrement (D_2'). On en déduit que, pour tout $(x_o,y_o) \in \partial\mathcal{E}$, $Q^r(x_o,y_o;D_x,D_y)$ est quasi-elliptique et que la propriété (iii) du théorème 2.1 est vérifiée.

Pour la fin, on s'inspire des méthodes utilisées dans [3].

Soit maintenant $(x_o,y_o) \in \mathcal{E}$. Soit alors $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact dans $\mathcal{E}$ et contenant (x_o,y_o). De l'inégalité (4.10) on déduit que, pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, on a :

$$(4.13) \qquad ||v||_{H^m(\mathcal{O})} \leqslant C \{||Av||_{L^2(\mathcal{O})} + ||v||_{L^2(\mathcal{O})}\} .$$

Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. On suppose que $\zeta = 1$ sur $\mathcal{O}'$ où $\mathcal{O}'$ est un ouvert relativement compact contenu dans $\mathcal{O}$ et contenant (x_o,y_o). Soit alors $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ et supposons qu'il existe $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ tel que :

$$A^o(x_o;\xi,\eta) = P_m^m(x_o;\xi)\,\varphi(x_o)^{q(m-r)} - \eta^m e^{i\theta} = 0 .$$

Posons alors, pour $\lambda > 0$:

$$v_\lambda(x,y) = \zeta(x,y)\, w((x-x_o)\lambda^{s},(y-y_o)\lambda^{s})e^{i\lambda(x\xi+y\eta)},\quad 0<s<1 .$$

On applique l'inégalité (4.13) à v_λ, et dans les intégrales, on fait le changement de variables : $(X,Y) = ((x-x_o)\lambda^{s},(y-y_o)\lambda^{s})$. Il vient, pour Av_λ :

$$||Av_\lambda||_{L^2(\Theta)} \leqslant C\lambda^{m-\frac{n+1}{2}s} ||\zeta(x_o+\lambda^{-s}x,y_o+\lambda^{-s}y)\{\varphi(x_o+\lambda^{-s}x)^{q(m-r)}P_m^m(x_o+\lambda^{-s}x;\xi)-$$

$$-\eta^m e^{i\theta}\}w(X,Y)||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} + R,$$

où R est somme de termes faisant intervenir des dérivées de w jusqu'à l'ordre m et ayant en facteur une puissance de λ strictement inférieure à $m-\frac{n+1}{2}s$.

Quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, $\varphi(x_o+\lambda^{-s}x)^{q(m-r)}\ P_m^m(x_o+\lambda^{-s};\xi)$ converge uniformément vers $\varphi(x_o)^{q(m-r)}\ P_m^m(x_o;\xi)$.

On évalue de même $||v_\lambda||_{H^m(\Theta)}$ et $||v_\lambda||_{L^2(\Theta)}$. Puis on simplifie par $m-\frac{n+1}{2}s$ et on fait tendre λ vers $+\infty$. Il vient :

$$(4.14)\qquad (|\xi|^2+\eta^2)^{m/2}||w||_{L^2(\Theta')} \leqslant C\ |A^o(x_o;\xi,\eta)|.||w||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Ceci étant vrai pour tout $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, on en déduit que :

$$(|\xi|^2+\eta^2)^{m/2} \leqslant C\ |A^o(x_o;\xi,\eta)| .$$

On a donc une contradiction avec le fait que l'on a supposé que $A^o(x_o;\xi,\eta) = 0$. Par conséquent, pour tout $(x_o,y_o) \in \mathcal{C}$ et tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$A^o(x_o;\xi,\eta) \neq 0 .$$

Ceci prouve l'ellipticité à l'intérieur de A. Pour montrer la propriété (i) du théorème 2.1, il reste à montrer l'ellipticité au bord. Pour cela, on va de nouveau se placer dans le demi-espace $\mathbb{R}^{n+1}_+$ et utiliser l'inégalité (4.11) pour montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$\mathcal{A}^m(t;0;\xi,\eta) = \sum_{h=o}^{m-r} \mathcal{Q}_m^{m-h}(0;\xi,\eta)t^{q(m-r-h)} \neq 0 .$$

En fait on peut choisir les coordonnées locales de façon que l'opérateur $\mathcal{A}$ s'écrive :

$$(4.15) \qquad \mathcal{A}(t;(x,y);D_x,D_y) = \sum_{h=o}^{m-r} \mathcal{P}_m^{m-h}(x;D_x)\{t^{q(m-r-h)}.\} - e^{i\theta}D_y^m .$$

Par conséquent, on a :

$$(4.16) \qquad \mathcal{A}^m(t;(x,y);D_x,D_y) = \mathcal{P}_m^m(x;D_x)\{t^{q(m-r)}.\} - e^{i\theta}D_y^m .$$

On a aussi, et cela servira plus loin :

$$(4.17) \qquad \mathcal{A}_o(t;(x,y);D_x,D_y) = \sum_{h=o}^{m-r} \mathcal{P}_{m-h}^{m-h}(x;D_x)\{t^{q(m-r-h)}.\} - e^{i\theta}D_y^m .$$

Prenons $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ avec supp $\zeta \subset B(0,\rho)$, $\zeta = 1$ sur $B(0,\rho/2)$ et $0 \leq \zeta \leq 1$.

Soit alors $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Pour $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ et $\lambda > 0$, on définit :

$$v_\lambda(x,y) = \zeta(x,y)w(x\lambda^{s},y\lambda^{s'})\, e^{i(\lambda x\xi+\lambda^\nu y\eta)}$$

avec : $\begin{cases} 0 < s < \dfrac{1}{q} \\ \nu = 1 - q(1-\sigma)s \\ 0 < s' < \nu \end{cases}$

On utilise l'inégalité (4.11) pour v_λ ; on fait le changement de variables $(X,Y) = (x\lambda^{s},y\lambda^{s'})$. On obtient pour $\mathcal{A}v_\lambda$:

$$\mathcal{A}v_\lambda = \zeta(X\lambda^{-s},Y\lambda^{-s'})\lambda^{m-q(m-r)s}\mathcal{A}^m(T;(X\lambda^{-s},Y\lambda^{-s'});\xi,\eta) + R ,$$

où R est composé de termes ayant en facteur une puissance de λ strictement inférieure à $m-q(m-r)\delta$. On évalue de même les autres termes de l'inégalité (4.11). On simplifie par $\lambda^{m-q(m-r)\delta-n\frac{\delta}{2}\frac{\delta'}{2}}$ et on fait tendre λ vers $+\infty$. Il vient :

$$(4.18) \qquad |\xi|^m ||T^{q(m-r)}w||_{L^2(B(0,\rho/2))} + \eta^m ||w||_{L^2(B(0,\rho/2))} \leqslant C||\mathcal{A}^m(T;0;\xi,\eta)w||_{L^2(\mathbb{R}^{n}}$$

Soit maintenant $t_o \in B(0,\rho/2)$ et soit $\rho' > 0$ tel que $B = B(0,t_o,0;\rho') \subset B(0,\rho/2) \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$. On considère $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ tel que supp $\zeta \subset B(0,\rho/2)$, $\zeta = 1$ sur B et $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Pour $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, on pose, pour $\lambda > 0$:

$$w_\lambda(x,y) = \zeta(x,y)\ w(x',(t-t_o)\lambda,y) \ .$$

On applique l'inégalité (4.18) à w_λ . Il vient :

$$|\xi|^m||t^{q(m-r)}w(x',(t-t_o)\lambda,y)||_{L^2(B)} + \eta^m||w(x',(t-t_o)\lambda,y||_{L^2(B)} \leqslant$$

$$\leqslant C\ ||\mathcal{A}^m(t;0;\xi,\eta)\ w(x',(t-t_o)\lambda,y)||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \ .$$

D'où, en faisant le changement de variables : $T = (t-t_o)\lambda$:

$$|\xi|^m||(t_o+\lambda^{-1}T)^{q(m-r)}\ w(x',T,y)||_{L^2(B(0,\rho'))} + \eta^m||w||_{L^2(B(0,\rho'))}$$

$$\leqslant C\ ||\mathcal{A}^m(t_o+\lambda^{-1}T;0;\xi,\eta)w||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \ .$$

En faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient :

$$(|\xi|^m t_o^{q(m-r)}+\eta^m)||w||_{L^2(B(0,\rho')} \leqslant C|\mathcal{A}^m(t_o;0;\xi,\eta)|.||w||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \ .$$

On en déduit que, pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$\mathcal{A}^m(t_o,0;\xi,\eta) \neq 0 \ .$$

Soit maintenant $t > 0$ quelconque et $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$t_o = \lambda t .$$

On a :

$$\mathcal{A}^m(t;0;\xi,\eta) = \lambda^{qr}\mathcal{A}^m(t_o;0;\lambda^{-q}\xi,\lambda^{-\sigma q}\eta) \neq 0 .$$

Ceci achève de démontrer la propriété (i) du théorème 2.1.

Il ne reste plus qu'à établir la propriété (ii) du théorème 2.1. Cette fois-ci, étant donné $\zeta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ avec supp $u \subset B(0,\rho)$, $\zeta = 1$ sur $B(0,\rho/2)$ et $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, on pose, pour $w\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ et $\lambda > 0$:

$$v_\lambda(x,y) = \zeta(x,y)w(x\lambda^{\frac{1}{q}},y\lambda^{s'})e^{i(\lambda x\xi+\lambda^\sigma y\eta)}$$

avec : $\quad 0 < s' < \sigma = \frac{r}{m}$

On utilise encore l'inégalité (4.11) appliquée à v_λ. Il vient :

$$(4.19)\qquad \sum_{h=o}^{m-r}|\xi|^{m-h}||T^{q(m-r-h)}w||_{L^2(B(0,\rho/2))}+\eta^m||w||_{L^2(B(0,\rho/2))} \leqslant$$

$$\leqslant C\ ||\mathcal{A}_o(T;0;\xi,\eta)w||_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} .$$

On en déduit alors, comme pour le cas précédent, que, pour tout $t > 0$ et tout $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, on a :

$$\mathcal{A}_o(t;0;\xi,\eta) \neq 0 ,$$

ce qui démontre la propriété (ii).

Ceci achève la démonstration de la condition nécessaire et donc du théorème 2.1.

V - DENSITE DES FONCTIONS PROPRES ET DISTRIBUTION ANGULAIRE DES VALEURS PROPRES.

Commençons ce paragraphe en énonçant un théorème qui se déduit d'un résultat beaucoup plus général de Dunford-Schwartz [9] sur la croissance des résolvants d'opérateurs compacts. Ces résultats sont énoncés dans [1].

THEOREME 5.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ possèdant la propriété du cône strict et soit T un opérateur compact défini dans $L^2(\Omega)$ et tel que :

$$(5.1) \qquad TL^2(\Omega) \subset H^r(\Omega) \, ,$$

où r est un entier ≥ 1. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de nombres positifs ρ_i, convergeant vers 0, telle que, $R(\lambda;T) = (\lambda I-T)^{-1}$ existe pour tout λ tel que $|\lambda| = \rho_i$, avec :

$$(5.2) \qquad (\forall i \in \mathbb{N}) \; (\|R(\lambda;T)\| \leq \exp(|\lambda|^{-\frac{n}{r}-\varepsilon}), \text{ pour } |\lambda| = \rho_i) \, .$$

Reprenons maintenant les hypothèses et notations des paragraphes I et II. Considérons à nouveau l'opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$, noté L_2, de domaine $D(L_2)$. Si l'ensemble résolvant de L_2 est non vide, prenons z_o dans cet ensemble. Posons alors $T_2 = (L_2-z_oI)^{-1})$. Il est clair que T_2 est compact dans $L^2(\Omega)$ car il envoie $L^2(\Omega)$ dans $V \hookrightarrow H^r(\Omega)$.

Si la suite des valeurs propres de L_2 est $\{\lambda_k \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$, les valeurs propres de T_2 sont données par :

$$\mu_k = \frac{1}{\lambda_k - z_o} \, .$$

Et entre les résolvantes de L_2 et de T_2, on a la relation :

$$R(\frac{1}{\lambda-z_o} \; ; \; T_2) = (\lambda-z_o)I - (\lambda-z_o)^2 \; R(\lambda;L_2) \, .$$

On dit qu'une fonction non nulle $\Phi \in L^2(\Omega)$ est un vecteur propre généralisé (ou fonction propre) de T_2 correspondant à la valeur propre μ_k si on a $(T_2-\mu_k I)^j\Phi = 0$ pour un entier $j \geqslant 1$. Le plus petit de ces entiers est appelé l'indice de Φ.

On sait que l'espace des vecteurs propres généralisés correspondant à une valeur propre μ_k est de dimension finie ; cette dimension est appelée la multiplicité de μ_k.

Nous noterons $sp(T_2)$ le sous-espace fermé dans $L^2(\Omega)$ engendré par tous les vecteurs propres généralisés de T_2.

On a des définitions analogues pour les vecteurs propres généralisés $\Phi \in D(L_2)$ de L_2 ainsi que pour $sp(L_2)$, sous-espace fermé dans $L^2(\Omega)$ engendré par tous les vecteurs propres généralisés de L_2.

Nous allons maintenant pouvoir donner le résultat principal concernant la densité des fonctions propres de L_2 dans $L^2(\Omega)$.

THEOREME 5.2. *On considère le problème aux limites $(L,\gamma B)$ défini au paragraphe I. On suppose que les conditions (C) et (C') sont vérifiées. Supposons qu'il existe des rayons $\arg\lambda = \theta_j$, $j = 1,\dots,N$ dans le plan complexe tels que l'on ait les propriétés suivantes :*

(a) Ces rayons divisent le plan complexe en angles strictement inférieurs à $\frac{\pi r}{n}$.

(b) Les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 2.1 sont vérifiées pour $\theta = \theta_j$, $j = 1,\dots,N$.

Alors le spectre de l'opérateur L_2 associé est discret. De plus, les fonctions propres de L_2 sont denses dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que $sp(L_2) = L^2(\Omega)$.

En fait, comme le théorème 2.1 caractérise les rayons de croissance minimale à l'aide des conditions (i), (ii) et (iii), le théorème 5.2 est le corollaire d'un théorème plus abstrait.

THEOREME 5.3. *Soit L un opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$, de domaine $D(L) \hookrightarrow H^r(\Omega)$, avec r un entier $\geqslant 1$ et $D(L)$ dense dans $L^2(\Omega)$. Supposons qu'il existe des rayons $\arg\lambda = \theta_j$, $j = 1,\dots,N$ dans le plan complexe qui soient des rayons de croissance minimale pour L et qui divisent le plan complexe en angles strictement inférieurs à $\frac{\pi r}{n}$.*

Alors, le spectre de L est discret et les fonctions propres de L sont denses dans $L^2(\Omega)$.

La démonstration est faite dans [1] (théorème 3.2) ; elle utilise le principe de Phragmen-Lindelöf dans les angles déterminés par les rayons $\arg\lambda = \theta_j$, en se servant de l'inégalité du théorème 5.1.

On a aussi un résultat sur la distribution angulaire des valeurs propres.

THEOREME 5.4. *Soit L un opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$, de domaine $D(L) \hookrightarrow H^r(\Omega)$, avec r un entier $\geqslant 1$. Supposons qu'il existe deux rayons de croissance minimale $\arg\lambda = \theta_1$ et $\arg\lambda = \theta_2$ pour L, avec $0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$, tels que :*

(a) $\theta_2 - \theta_1 < \frac{r\pi}{n}$.

(b) Il existe θ_o avec $\theta_1 < \theta_o < \theta_2$ tel que le rayon $\arg\lambda = \theta_o$ ne soit pas un rayon de croissance minimale pour L.

Alors L possède une infinité de valeurs propres dans l'angle $\theta_1 < \arg\lambda < \theta_2$.

En utilisant le théorème 2.1 on a alors un théorème concernant la distribution des valeurs propres pour l'opérateur L_2 associé au problème aux limites $(L,\gamma B)$.

Le théorème 5.4 se démontre en utilisant le théorème 5.1 et en raisonnant par l'absurde de façon à pouvoir utiliser à nouveau le principe de Phragmen-Lindelöf. (cf. théorème 3.3 de [1]).

On dira qu'un rayon $\arg\lambda = \theta_o$ est une direction de condensation des valeurs propres pour un opérateur si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'angle $|\arg\lambda - \theta_o| < \varepsilon$ contient une infinité de valeurs propres. On déduit du théorème 5.4 le :

COROLLAIRE 5.1. Soit L un opérateur non borné dans $L^2(\Omega)$, de domaine $D(L) \hookrightarrow H^r(\Omega)$, avec r un entier $\geqslant 1$. On suppose que le rayon $\arg\lambda = \theta_o$ n'est pas un rayon de croissance minimale pour L et qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\theta \neq \theta_o$ avec $|\theta-\theta_o| < \delta$, le rayon $\arg\lambda = \theta$ soit un rayon de croissance minimale pour L. Alors le rayon $\arg\lambda = \theta_o$ est une direction de condensation des valeurs propres de L.

VI - CAS PARTICULIER - PROBLEMES AUTO-ADJOINTS FORMELS.

On dira qu'un problème aux limites $(L,\gamma B)$ du type introduit au paragraphe I est formellement auto-adjoint si l'opérateur associé L_2, de domaine $D(L_2)$, est auto-adjoint. Dans ce cas, on obtient immédiatement, pour tout $u \in D(L_2)$ et tout λ non réel tel que $\arg\lambda = \theta$:

$$(6.1) \qquad ||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{|\sin\theta|.|\lambda|} ||(L_2-\lambda I)u||_{L^2(\Omega)} .$$

Ceci implique que tout rayon $\arg\lambda = \theta$, avec $0 < |\theta| < \pi$, est un rayon de croissance minimale pour L_2. On en déduit, en particulier, que le spectre de L_2 est discret.

En utilisant des procédés analogues à ceux de la fin du paragraphe IV, on montre que, si $(L,\gamma B)$ est formellement auto-adjoint alors :

1) pour tout $x_o \in \bar{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $P_m^m(x_o;\xi)$ est réel ;

2) pour tout $x_o \in \Gamma$, tout $t > 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $L_o(x_o;t;\xi)$ est réel.

Nous supposerons maintenant que ces quantités sont strictement positives (elles sont non nulles en vertu des conditions données au paragraphe I.)

Il résulte alors du théorème 2.1 et du corollaire 5.1 que l'opérateur L_2 admet une infinité de valeurs propres positives.

Et comme les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées pour $\lambda < 0$, suivant que la propriété (iii) sera vérifiée ou non pour tout $\lambda < 0$, l'axe réel négatif sera un rayon de croissance minimale pour L_2 ou une direction de condensation des valeurs propres de L_2.

Enfin, on aura les mêmes résultats que précédemment pour tout problème aux limites $(L,\gamma B)$ qui ne diffèrera du problème précédent que par des termes non principaux, puisque les conditions (i), (ii) et (iii) ne font intervenir que les termes principaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - AGMON S. : On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems.
Comm. Pure Appl. Math., Vol 15, (1962), pp. 119-147.

[2] - AGMON S. - DOUGLIS A. - NIRENBERG L. : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I.
Comm. Pure Appl. Math., Vol 12, (1959), pp. 623-727.

[3] - HELFFER B. : Conditions nécessaires d'hypoellipticité.
Thèse Orsay, (1976).

[4] - NIRENBERG L. : On elliptic partial differential equations.
Ann. Scuola Norm. Super. Pisa., Vol 13, (1959), pp. 115-162.

[5] - PREVOSTO D. : Opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière. Application au calcul de l'indice pour une classe de problèmes aux limites associés à ces opérateurs.
Astérisque 34-35, (1976), pp. 279-309.

[6] - PREVOSTO D. - ROLLAND J. : Publications des séminaires de Mathématiques Université de Rennes.
Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (1974).

[7] - ROLLAND J. : Théorème d'indice pour une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière.
Astérisque 34-35, (1976), pp.311-340.

[8] - VISIK M.I. - GRUSIN V.V. : Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain.
Math. U.S.S.R. Sbornik, Vol 9, (1969), n° 4.

[9] - DUNFORD N. - SCHWARTZ J.T. : Linear operators, Vol II.