Monique Sablé-Tougeron

Problème d'évolution parabolique pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3
« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 9, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___3_A9_0>

PROBLEME D'EVOLUTION PARABOLIQUE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES.

Monique SABLÉ-TOUGERON
UER Mathématiques
Avenue du Général Leclerc
35000 - RENNES

INTRODUCTION.

La résolution du problème parabolique non homogène, par la méthode d'Agranovich-Visik [1] ou Lions [7], pour les opérateurs elliptiques dégénérés décrits par Bolley-Camus-Helffer [5] pose deux sortes de problèmes :

Pour se ramener au cas homogène on doit résoudre un problème de relèvement dans des espaces de Sobolev avec poids sur le cylindre $\Omega x]o,T[$. Ce résultat permet en outre de décrire l'espace des conditions initiales, interpolé 1/2 d'espaces avec poids dont la théorie générale de l'interpolation n'est pas connue.

Le cas homogène se déduit par transformation de Laplace de l'étude de la résolvante de réalisations dans L^2 de ces opérateurs dégénérés. Suivant la méthode d'Agranovich-Visik [1] on est ramené à l'étude d'un opérateur différentiel sur la demi-droite dépendant des paramètres ξ' et λ, ξ' provenant d'une transformation de Fourier en variable tangentielle et λ étant le paramètre spectral. Au contraire du cas elliptique, l'espace sur lequel on étudie cet opérateur différentiel change de type en fonction du paramètre. Pour plus de clarté on a dégagé un problème aux limites à une variable dépendant d'un paramètre global ω et formulé des hypothèses plus abstraites que celles vérifiées par le cas d'application qui nous intéresse.

1 - NOTATIONS ET RESULTATS.

Dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ, on considère l'opérateur différentiel :

$$L \equiv L(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} A_\alpha(x) D^\alpha$$

où $m \in \mathbb{N}-\{o\}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = -i\,\dfrac{\partial}{\partial x_k}$

On note S le secteur fermé du plan complexe :

$$S = \{\rho e^{i\theta},\ \rho \geqslant o,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}.$$

On suppose que les coefficients A_α sont indéfiniment dérivables dans $\bar{\Omega}$ et que la condition suivante est satisfaite :

E_o : Pour tous $x \in \Omega$, $(\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n x S) - \{0\}$ on a :

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x)\xi^\alpha - \lambda \neq 0\ .$$

On suppose que le bord Γ est recouvert par une famille $\{0_1,\ldots,0_p\}$ d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que pour chaque i il existe une application $\Phi_i : x \longrightarrow y$, indéfiniment dérivable de 0_i dans $\mathbb{R}^n$ et qui vérifie :

$$\begin{cases} \Phi_i\ (0_i \cap \Gamma) \subset \{y = (y',y_n),\ y_n = 0\} \\ \Phi_i\ (0_i \cap \Omega) \subset \{y,\ y_n > 0\} \\ \Phi_i\ :\ 0_i \longrightarrow \Phi_i(0_i) \text{ est inversible et son inverse est indéfini-} \end{cases}$$

ment dérivable.

De plus si $y_1^i,\ldots,y_n^i$ sont des coordonnées dans $\Phi_i(0_i)$, et si $0_i \cap 0_j \neq \emptyset$ on suppose que $y_n^i = y_n^j$ et que pour $k \leqslant n-1$, y_k^j n'est fonction que de $y_1^i,\ldots,y_{n-1}^i$.

On suppose que dans chaque O_i l'opérateur L s'exprime en coordonnées locales sous la forme :

$$L(y,D_y) = \sum_{|\alpha|+j\leq 2m} a_{\alpha j}(y)\; y_n^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]_+} D_y^\alpha, D_{y_n}^j \quad ,$$

avec $\sigma < o$, $\delta > o$, $\sigma + 2m \in \mathbb{N}$, $\sigma + 2\delta m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $j \in \mathbb{N}$, $[A]_+$ désignant le plus petit entier $\geq o$ supérieur ou égal à A, et les fonctions $a_{\alpha j}$ étant indéfiniment dérivables dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

Cette classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés a été introduite par Bolley-Camus-Helffer [5] ; elle contient les opérateurs de Visik-Grusin [10], et aussi des opérateurs qui s'expriment simplement sous forme globale dans $\bar{\Omega}$: Baouendi [2], Baouendi-Goulaouic [3], Triebel [9], Shimakura [8].

Soit O_o un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{O}_o \subset \Omega$ et tel que la famille $\{O_i\}_{i=o}^p$ recouvre Ω. Soit $\{\varphi_i\}_{i=o}^p$ une partition de l'unité indéfiniment dérivable subordonnée à ce recouvrement. On considère les espaces :

$$W^m_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n_+),\ y_n^{\frac{\sigma}{2}+\delta|\alpha|+j} D_y^\alpha, D_{y_n}^j\ u \in L^2(\mathbb{R}^n_+),\ \frac{\sigma}{2} + \delta|\alpha|+j \geq o,\ |\alpha|+j \leq m\},$$

$$W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varphi_o u \in H^{2m}(\mathbb{R}^n),\ \varphi_i u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+),\ i = 1,\dots,p\},$$

l'appartenance à $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ s'exprimant en coordonnées locales, et on les munit de la norme canonique.

En chaque point x de Γ, $x = (y',o)$ en coordonnées locales on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

E_1 : pour tout $(\xi',\zeta,\lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times S) - \{o\}$ on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|+j=2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}(y')\ \xi'^\alpha \zeta^j - \lambda \neq 0$$

E_2 : l'équation $F(x,\rho) = \sum_{-\sigma\leq j\leq 2m} a_{oj}(y')\ (-i)^j\ \rho(\rho-1)\dots(\rho-j+1) = 0,$

n'a pas de racine à partie réelle Reρ supérieure ou égale à $-\sigma-1/2$.

Si $-\sigma-m\geq 1$ on considère de plus des opérateurs frontière B_j, $j=o,\dots,-\sigma-m-1$, qui s'écrivent en coordonnées locales :

$$B_j(y',D_y) = \sum_{\delta|\beta|+q\leq m_j} b_{jq\beta}(y')\, D^{\beta}_{y'}\, D^{q}_{y_n} ,$$

où les fonctions $b_{jq\beta}$ sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et où $m_j\leq -\sigma-1$.
On note K le compact de $\mathbb{C}^n$:

$$K = \{\omega = (\xi',\lambda),\ \xi'\in \mathbb{R}^{n-1},\ \lambda \in S,\ \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 + |\lambda|^{1/m} = 1\},$$

On suppose que $-\sigma-m$ est positif ou nul et que la condition suivante est vérifiée :

E_3 : Pour tous $x\in \Gamma$, $\omega = (\xi',\lambda)\in K$, le problème

$$\begin{cases} L^o(x,\omega)u \equiv \Big(\displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|+j\leq 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}(y')\ t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\ \xi'^{\alpha} D_t^j - \lambda\Big)\ u = 0 \\[2ex] B_j^o(x,\omega)u(o) \equiv \Big(\displaystyle\sum_{\delta|\beta|+q=m_j} b_{jq\beta}(y')\ \xi'^{\beta}\ D_t^q u\Big)\ (o) = 0,\ j=o,\dots,-\sigma-m-1 \\[2ex] u\in L^2(\mathbb{R}_+),\ |\xi'|\ t^{\sigma+2\delta m}\ u\in L^2(\mathbb{R}_+),\ t^{\sigma+2m}\ D_t^{2m}u \in L^2(\mathbb{R}_+) \end{cases}$$

n'admet que la solution nulle.

On démontre le résultat suivant :

<u>Théorème 1.1.</u> Sous les conditions E_o, E_1, E_2, E_3, il existe $C > 0$, $\lambda_o > 0$ tels que pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \lambda_o$ le résolvant $(L-\lambda)^{-1}$ dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L ayant pour domaine :

$$D(L) = \{u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega),\ B_j u = 0 \text{ sur } \Gamma,\ j = o,\dots,-\sigma-m-1\},$$

existe et vérifie : pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$||(L-\lambda)^{-1}f||_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|}\, ||f||_{L^2(\Omega)} .$$

On introduit ensuite la variable de temps t, $o<t<T$,et pour $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$ on considère les espaces d'évolution [7] :

$$H^{r,s}(\Gamma x]0,T[) = L^2(0,T\ ;\ H^r(\Gamma)) \cap H^s(0,T\ ;\ L^2(\Gamma)),$$

munis des normes canoniques. Supposant de plus que le système $\{B_j\}_{j=o}^{-\sigma-m-1}$ est normal sur Γ, c'est-à-dire que $m_j \neq m_k$ si $j \neq k$ et que pour tout $x \in \Gamma$, $x = (y',o)$ en coordonnées locales, on a $b_{jm_j o}(y') \neq 0$ pour tout j, on démontre aussi :

<u>Théorème 1.2.</u> Sous les hypothèses du théorème 1.1, si le système $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=o}^{-\sigma-m-1}$ est normal sur Γ et si le secteur S est le demi-plan Re $\lambda \leqslant 0$, pour tous $f \in L^2(]0,T[x\Omega)$, $\{u_o,g_j\} \in W^m_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\Omega) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j,\nu_j}(\Gamma x]0,T[)$, $\mu_j = \frac{-\sigma-m_j-1/2}{\delta}$,

$\nu_j = \frac{-\sigma-m_j-1/2}{-\sigma}$, vérifiant les relations de compatibilité :

$$\mathcal{R}\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \begin{cases} B_j u_o(x) = g_j(x,o) \text{ pour } x \in \Gamma,\ m_j < -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ \int_o^T \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\ B_j(\varphi_i u_o)\ (y',\tau^{-\frac{1}{\sigma}}) - (\varphi_i g_j)\ (y',\tau)|^2\ dy'\ \frac{d\tau}{\tau} < +\infty, \text{ si } -\sigma \\ \text{est impair et } m_j = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}, \text{ en coordonnées locales dans } O_i\ , \end{cases}$$

il existe $u \in L^2(0,T;W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ unique vérifiant :

$$\begin{cases} Lu + \frac{\partial u}{\partial t} = f\ ,\ o < t < T \\ u(x,o) = u_o \\ B_j u = g_j \text{ sur } \Gamma \times]o,T[,\ o \leqslant j \leqslant -\sigma-m-1\ . \end{cases}$$

2 - ETUDE D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL SINGULIER DEPENDANT D'UN PARAMETRE SUR $\mathbb{R}_+$

Cette étape est essentielle pour établir le théorème 1.1 :

On considère sur $\mathbb{R}_+$ l'opérateur différentiel dépendant du paramètre $\omega \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$:

$$L(\omega) \equiv L(\omega,t,D_t) = \sum_{\substack{|k|+j\leqslant m \\ \sigma+<\delta,k>+j\in\mathbb{N}}} a_{kj}(\omega)\; t^{\sigma+<\delta,k>+j}\; D_t^j \;,$$

où $m \in \mathbb{N}-\{o\}$, $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_n > 0$, $\sigma = -m\delta_n$, $\sigma+m\in\mathbb{N}$, $\sigma+\delta_i m\in\mathbb{N}$ pour $i = 1,\ldots,n$, $k \in \mathbb{N}^n$, $j \in \mathbb{N}$, $<\delta,k> = \sum_{i=1}^{n} \delta_i k_i$, $a_{kj}(\omega) \in \mathbb{C}$ et $a_{om} = 1$.

On introduit les conditions :

$H_{o,\omega}$: Pour tout $t > o$, l'équation en τ :

$$L_o(\omega,t,\tau) \equiv \sum_{\substack{|k|+j=m \\ \sigma+<\delta,k>+j\in\mathbb{N}}} a_{kj}(\omega)\; t^{<\delta,k>}\; \tau^j = 0 \;,$$

n'a pas de racine réelle et il existe $C = C(\omega)>0$ telle que pour $t \geqslant 1$, les racines $\tau(\omega,t)$ à partie imaginaire $\operatorname{Im}\tau(\omega,t)$ positive vérifient :

$$\operatorname{Im}\tau(\omega,t) \geqslant C\, \Big(\sum_{\substack{|k|=m \\ \sigma+<\delta,k>\in\mathbb{N}}} |a_{ko}(\omega)|\, t^{<\delta,k>} \Big)^{1/m}$$

$H_{1,\omega}$: il existe $C = C(\omega)>0$ telle que pour tous k,j, $|k|+j\leqslant m$, $\sigma+<\delta,k>+j\in\mathbb{N}$ on ait :

$$|a_{kj}(\omega)|\; t^{<\delta,k>} \leqslant C\, \Big(\sum_{\substack{|k|=m \\ \sigma+<\delta,k>\in\mathbb{N}}} |a_{ko}(\omega)|\, t^{<\delta,k>} \Big)^{\frac{|k|}{m}} \;, \text{ pour } t > 0.$$

$H_{2,\omega}$: l'équation : $F(\omega,\rho) \equiv \sum_{-\sigma\leqslant j\leqslant m} a_{oj}(\omega)\; (-i)^j\; \rho(\rho-1)\ldots(\rho-j+1) = 0,$

n'a pas de racine sur la droite $\operatorname{Re}\rho = -\sigma - \frac{1}{2}$.

$L(\omega)$ opère sur l'espace :

$W_\omega(\mathbb{R}_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+), a_{kj}(\omega)t^{\sigma+<\delta,k>+j}D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+), |k|+j\leq m, \sigma+<\delta,k>+j \in \mathbb{N}\}$,

que l'on munit de la norme canonique. Pour chaque valeur du paramètre ω on a alors le résultat suivant :

Proposition 2.1 : On suppose que l'opérateur $L(\omega)$ satisfait les conditions $H_{o,\omega}$, $H_{1,\omega}$ et $H_{2,\omega}$. Soit $m_+(\omega)$ le nombre de racines de l'équation $L_o(\omega,t,\tau)=0$ à partie imaginaire positive et soit $r_o(\omega)$ le nombre de racines de l'équation $F(\omega,\rho) = 0$ de partie réelle supérieure ou égale à $-\sigma-1/2$. Alors, considéré comme linéaire continu de $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, l'opérateur $L(\omega)$ est à indice d'indice $m_+(\omega) + r_o(\omega)-\sigma-m$.

Démonstration : La proposition se déduit, à l'aide de théorèmes généraux d'indice, de l'étude de $L(\omega)$ sur $(0,T)$ et sur (T,∞), pour T assez grand.

a) Etude de $L(\omega)$ sur $(0,T)$: on note :

$$W_\omega(0,T) = \{u \in L^2(0,T),\ a_{kj}(\omega)\ t^{\sigma+<\delta,k>+j}D_t^j u \in L^2(0,T), |k|+j\leq m, \sigma+<\delta,k>+j \in \mathbb{N}\}$$

$$V(0,T) = \{u \in H^{-\sigma}(0,T),\ t^{\sigma+j}\ D_t^j u \in L^2(0,T),\ -\sigma\leq j\leq m\}\ .$$

et on munit ces espaces des normes canoniques. Puisque l'on a :

$V(0,T) = \{u \in L^2(0,T),\ t^{\alpha+m}\ D_t^m u \in L^2(0,T)\}$, les espaces $W_\omega(0,T)$ et $V(0,T)$ coïncident.

D'après Bolley-Camus-Helffer [1], la condition $H_{2,\omega}$ implique alors que l'opérateur $L(\omega)$, considéré comme linéaire continu de $V(0,T) = W_\omega(0,T)$ dans $L^2(0,T)$, est à indice, d'indice $-\sigma+r_o(\omega)$.

b) Etude de $L(\omega)$ sur (T,∞) : on introduit la fonction :

$$h(\omega,t) = t^{-1}\Big(\sum_{\substack{|k|=m \\ \sigma+<\delta,k>\in\mathbb{N}}} |a_{ko}(\omega)|\,t^{<\delta,k>}\Big)^{1/m}\ .$$

Pour $t > 0$, $h(\omega,t)$ est non nulle d'après $H_{o,\omega}$ et de plus on a :

$$h(\omega,t) \geqslant t^{-1+\delta_n} \Big(\sum_{\substack{|k|=m \\ \sigma+<\delta,k>\in \mathbb{N}}} |a_{ko}(\omega)| \Big)^{1/m} ,$$

donc, $T = T(\omega)$ restant à choisir, l'application : $t \longrightarrow y = \int_T^t h(\omega,\tau)d\tau$, est une bijection croissante de (T,∞) sur $(0,\infty)$.

On note :

$$V_\omega(T,\infty) = \{u \in \mathcal{D}'(T,\infty),\ t^{\sigma+m}h^m(\omega,t)u \in L^2(T,\infty), t^{\sigma+m}D_t^m u \in L^2(T,\infty)\}$$

et encore :

$$W_\omega(T,\infty) = \{u \in L^2(T,\infty)\ a_{kj}(\omega)t^{\sigma+<\delta,k>+j}D_t^j u \in L^2(T,\infty), |k|+j\leqslant m, \sigma+<\delta,k>+j\in \mathbb{N}\} ,$$

ces espaces étant munis des normes canoniques. On a de façon évidente l'inclusion $W_\omega(T,\infty) \subset V_\omega(T,\infty)$; de plus , pour $u \in V_\omega(T,\infty)$, on a :

$$t^{\sigma+m}h^{m-j}(\omega,t)\ D_t^j u \in L^2(T,\infty) \text{ pour } o\leqslant j\leqslant m.$$

La condition $H_{1,\omega}$ montre alors qu'on a aussi $V_\omega(T,\infty) \subset W_\omega(T,\infty)$ pour T assez grand.

Pour $u \in W_\omega(T,\infty)$ on note $v(y) = t^{\sigma+m}h^{m-1/2}(\omega,t)u(t)$; l'égalité $W_\omega(T,\infty) = V_\omega(T,\infty)$ et la formule :

$$(2.1)\quad t^{\sigma+m}h^{m-j}(\omega,t)D_t^j u + h^{1/2-j}(\omega,t)\sum_{\ell=o}^{j-1}\psi_{j,\ell}(\omega,t)D_t^\ell u =$$

$$h^{1/2}(\omega,t)(D_y^j v+h^{-j}(\omega,t)\sum_{\ell=1}^{j-1}\chi_{j,\ell}(\omega,t)D_y^\ell v)$$

où les fonctions $\psi_{j,\ell}$ et $\chi_{j,\ell}$ vérifient : pour $t > 0$,

$$(2.2)\quad |\psi_{j,\ell}(\omega,t)| \leqslant C\ t^{\sigma+m-j+\ell}\ h^{m-1/2}(\omega,t)$$

$$(2.3)\quad |\chi_{j,\ell}(\omega,t)| \leqslant C\ t^{-j+\ell}\ h^\ell(\omega,t) ,$$

permettent de montrer que l'application $u \longrightarrow v$ est un isomorphisme de $W_\omega(T,\infty)$ sur $H^m(0,\infty)$.

Gardant les notations $y = \int_T^t h(\omega,\tau)d\tau$ et $v(y) = t^{\sigma+m_h}h^{m-1/2}(\omega,t)u(t)$, on montre que :

$$L(\omega)u(t) = h^{1/2}(\omega,t)\ M(\omega)v(y) \equiv h^{1/2}(\omega,t)\ (M_o(\omega) + M_1(\omega))v(y),$$

où :

$$M_o(\omega)\ v = D_y^m\ v + \sum_{j=o}^{m-1} A_{o,j}(\omega,y)\ D_y^j\ v$$

$$M_1(\omega)\ v = \sum_{j=o}^{m-1} A_{1,j}(\omega,y)\ D_y^j\ v, \text{ avec}$$

$$A_{o,j}(\omega,y) = \sum_{\substack{|k|=m-j \\ \sigma+<\delta,k>+j\in \mathbb{N}}} a_{kj}(\omega)\ t^{<\delta,k>+j-m_h-m+j}(\omega,t)\ ,$$

$$|D_y^\ell\ A_{o,j}(\omega,y)| \leqslant C\ (th(\omega,t))^{-\ell} \text{ pour } o\leqslant j\leqslant m-1,\ o\leqslant \ell\leqslant m,\ y \geqslant 0$$

$$|A_{1,j}(\omega,y)| \leqslant C\ (th(\omega,t))^{-1} \text{ pour } o\leqslant j\leqslant m-1,\ y \geqslant 0 \text{ si } T \text{ est assez}$$

grand.

L'hypothèse $H_{o,\omega}$ se traduit alors par : pour tout $y \geqslant 0$ l'équation en ζ:

$$M_o(\omega,y,\zeta) = \zeta^m + \sum_{j=o}^{m-1} A_{o,j}(\omega,y)\ \zeta^j = 0\ ,$$

n'a pas de racine réelle et il existe $C = C(\omega) > 0$ telle que pour $y \geqslant 0$, les $m_+(\omega)$ racines $\zeta(\omega,y)$ à partie imaginaire positive vérifient $\operatorname{Im} \zeta(\omega,y) \geqslant C$.

En choisissant $T = T(\omega)$ assez grand on voit que l'opérateur $M(\omega)$ vérifie pour $y \geqslant 0$ les hypothèses du théorème 3.1 de Visik-Grusin [10]: $M(\omega)$ est donc un opérateur linéaire continu surjectif de $H^m(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ et son noyau est de dimension $m_+(\omega)$. On en déduit que $L(\omega)$ considéré comme linéaire continu de $W_\omega(T,\infty)$ dans $L^2(T,\infty)$ est à indice, d'indice $m_+(\omega)$. Ceci démontre la proposition 2.1.

On suppose maintenant que le paramètre ω décrit un compact K de $\mathbb{C}^n$ et que les fonctions $a_{kj}(\omega)$ sont continues sur K ; on va imposer à $L(\omega)$, opérant sur $W_\omega(\mathbb{R}_+)$, des hypothèses plus fortes pour obtenir un résultat d'isomorphisme uniforme en ω (en ajoutant au besoin des conditions différentielles en 0). Plus précisément on introduit les conditions :

H_o : Pour tout $\omega \in K$, $H_{o,\omega}$ est vérifiée et $m_+(\omega) = m_+$ est indépendant de ω.

H_1 : Pour tout $\omega \in K$, $H_{1,\omega}$ est vérifiée.

H_2 : Pour $-\sigma \leq j \leq m$ $a_{oj}(\omega) = a_{oj}$ est indépendant de ω et $r_o(\omega) = 0$.

Si le nombre $\chi = m_+ - m - \sigma$ est strictement positif, on considère de plus des opérateurs différentiels $B_j(\omega, D_t)$, $j = o,\dots,\chi-1$, d'ordre m_j, $o \leq m_j \leq -\sigma-1$, qui s'écrivent :

$$B_j(\omega) \equiv B_j(\omega, D_t) = \sum_{q \leq m_j} b_{jq}(\omega)\, D_t^q ,$$

où les fonctions b_{jq} sont continues sur K.

On introduit alors la dernière condition :

H_3 : le nombre $\chi = m_+ - m - \sigma$ est positif ou nul et pour tout $\omega \in K$ le problème :

$$\begin{cases} L(\omega) \quad u(t) = 0 \\ B_j(\omega) \quad u(o) = 0, \text{ pour } 0 \leq j \leq \chi - 1 \end{cases} ,$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans $W_\omega(\mathbb{R}_+)$.

On va démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.2. On suppose que l'opérateur :

$$\mathcal{P}(\omega) : u \longrightarrow \{L(\omega)\, u,\ B_j(\omega)u(o)\ ,\ j = 0,\dots,\chi-1\},$$

vérifie les conditions H_o, H_1, H_2 et H_3. Alors pour tout $\omega \in K$, $\mathcal{P}(\omega)$ est un isomorphisme de $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\chi$, et la norme de son inverse est bornée sur K.

On obtient ce théorème en étudiant le noyau de $L(\omega)$ sur $(0,T)$ et sur (T,∞), T assez grand, et en construisant un inverse à droite pour $L(\omega)$ sur $(0,T)$, et un sur (T,∞), dont on sait contrôler la norme en fonction du paramètre ω ; l'hypothèse H_3 permet ensuite de conclure à l'isomorphisme:

<u>Proposition 2.3</u> : Sous l'hypothèse H_2, pour tout $\omega \in K$, l'opérateur $L(\omega)$ considéré comme linéaire continu de $V(0,T)$ dans $L^2(0,T)$ est surjectif et a un noyau de dimension $-\sigma$. Ce noyau admet pour base un système $\{\varphi_1(\omega,t),\ t\varphi_2(\omega,t), \ldots,\ t^{-\sigma-1}\varphi_{-\sigma}(\omega,t)\}$, où les fonctions φ_j sont continues sur $K\times[0,T]$ ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à t, et vérifient $\varphi_j(\omega,o) = 1$.

<u>Démonstration</u> : Pour $\omega \in K$, $L(\omega) : V(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ est d'indice $-\sigma$; en particulier son image est fermée dans $L^2(0,T)$; l'ellipticité de $L(\omega)$ dans $]0,T[$ montre que cette image contient $\mathcal{D}(]0,T[)$; $L(\omega)$ est donc une surjection de $V(0,T)$ sur $L^2(0,T)$ et son noyau est de dimension $-\sigma$. L'équation $F(\rho) = 0$ n'ayant pas de racine entière supérieure ou égale à $-\sigma$ on peut trouver $-\sigma$ fonctions $\varphi_j(\omega,t)$, $1 \leqslant j \leqslant -\sigma$, analytiques dans $]-2T,2T[$ vérifiant $\varphi_j(\omega,o) = 1$ et $L(\omega)\ (t^{j-1}\varphi_j(\omega,t) = 0$ dans $]-2T,2T[$. De plus les coefficients du développement en série entière de $D_t^k\varphi_j(\omega,t)$, $k \in \mathbb{N}$, sont continus dans $K \times [0,T]$, (les $-\sigma-j-1$ premiers coefficients du développement de $\varphi_j(\omega,t)$ étant pris égaux à 1), et ce développement converge uniformément sur $K \times [0,T]$; alors les fonctions $D_t^k\varphi_j$ sont continues en (ω,t) dans $K \times [0,T]$; d'où la proposition.

<u>Proposition 2.4</u> : Sous l'hypothèse H_2, pour tout $\omega \in K$, l'opérateur :

$$\mathcal{U}(\omega) \quad : \quad W_\omega(0,T) \longrightarrow L^2(0,T) \times \mathbb{C}^{-\sigma}$$

$$u \longrightarrow \{L(\omega)u,\ (D_t^j u)(o),\ j = 0,\ldots,-\sigma-1\} ,$$

est inversible et la norme de son inverse est bornée sur K.

Démonstration : Puisque $W_\omega(0,T) = V(0,T)$ pour tout $\omega \in K$, l'opérateur $\mathcal{U}(\omega)$ est linéaire continu de $W_\omega(0,T)$ dans $L^2(0,T)\times\mathbb{C}^{-\sigma}$. En utilisant la base du noyau ker $L(\omega)$ de $L(\omega) : V(0,T) \longrightarrow L^2(0,T)$ décrite à la proposition 2.3, on voit que l'application :

$$\ker L(\omega) \longrightarrow \mathbb{C}^{-\sigma}$$

$$u \longrightarrow \{(D_t^j u)\ (0),\ j = 0,\ldots,-\sigma-1\}.$$

est bijective. Ceci entraîne l'injectivité de $\mathcal{U}(\omega)$ et aussi la surjectivité puisque $L(\omega)$ est une surjection de $W_\omega(0,T)$ sur $L^2(0,T)$.

D'autre part $L(\omega)$ ayant des coefficients continus sur K, on montre facilement que la norme de l'application inverse de $\mathcal{U}(\omega) : V(0,T) \longrightarrow L^2(0,T) \times \mathbb{C}^{-\sigma}$ est bornée sur K ; la norme de l'injection de $V(0,T)$ dans $W_\omega(0,T)$ étant aussi bornée sur K on en déduit le corollaire.

Lemme 2.5.

i) Pour $T > 0$, la norme de l'isomorphisme :

$$V_\omega(T,\infty) \longrightarrow H^m(0,\infty)$$

$$u \longrightarrow t^{\sigma+m} h^{m-1/2}(\omega,t)u\ ,$$

est bornée sur K, ainsi que celle de son inverse.

ii) Pour $T > 0$, la norme de l'injection de $V_\omega(T,\infty)$ dans $W_\omega(T,\infty)$ est bornée sur K.

Démonstration : ii) se déduit de i) à l'aide de H_1. On montre donc i): soit $t > 0$ et soit $u \in V_\omega(T,\infty)$; alors $u \in L^2(T,\infty)$ et il existe $C > 0$ telle que pour tout $\omega \in K$ on ait :

$$||u||_{L^2(T,\infty)} \leqslant C\ ||t^{\sigma+m} h^m(\omega,t)u||_{L^2(T,\infty)}\ .$$

On en déduit que pour $j = 0,\ldots,m$ on a, avec C indépendante de $\omega \in K$:

$$||t^{\sigma+j}\ D_t^j u||_{L^2(T,\infty)} \leqslant C\ ||u||_{V_\omega(T,\infty)}\ .$$

On a de plus :

$$|D_t^j\, h^{-1}(\omega,t)| \leqslant C\, t^{-j} h^{-1}(\omega,t), \text{ pour } t > o,\ \omega \in K,$$

et dans (2.2) la constante C peut être choisie indépendante de $\omega \in K$;
Alors la formule :

$$h^{\frac{1}{2}} D_y^m v = \sum_{\substack{i_o+i_1j_1+\ldots+i_kj_k=m \\ j_o+j_1+\ldots+j_k=m \\ i_pj_p\neq o \text{ pour } p=1,\ldots,k,\, k\geqslant 1}} C_{ij}(h^{-1})^{j_o}(D_t^{i_1}h^{-1})^{j_1}\ldots$$

$$(D_t^{i_k}h^{-1})^{j_k}\,(t^{\sigma+m}h^m D_t^{i_o}u + h^{1/2}\sum_{\ell=o}^{i_o-1}\psi_{i_o,\ell}\, D_t^{\ell}u),$$

montre que l'on a :

$$||D_y^m v||_{L^2(0,\infty)} \leqslant C\, ||u||_{V_\omega(T,\infty)}\ , \text{ avec C indépendante de } \omega \in K.$$

Ceci démontre, puisque $||u||_{L^2(T,\infty)} = ||v||_{L^2(0,\infty)}$, que la norme de l'application $u \longrightarrow v$ est bornée sur K.

enfin de la majoration :

$$||D_y^j w||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\,\{\, ||w||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + ||D_y^m w||_{L^2(\mathbb{R}_+)}\} \text{ pour } w \in H^m(\mathbb{R}_+),$$

de la formule (2.1), et du fait que dans (2.3) la constante peut être rendue indépendante de $\omega \in K$, on déduit qu'il existe $c > o$ telle que pour tout $\omega \in K$ on ait :

$$||t^{\sigma+m}h^{m-j}(\omega,t)D_t^j u||_{L^2(T,\infty)} \leqslant C\,\{||v||_{L^2(0,\infty)} + ||D_t^m v||_{L^2(0,\infty)}\}\ ,$$

pour $j = 1,\ldots,m$.

Ceci démontre que la norme de l'application inverse de $u \longrightarrow v$ est aussi bornée sur K.

Proposition 2.6. Sous les hypothèses H_o et H_1 il existe $T > 0$, $C > 0$ tels que pour tout $\omega \in K$ le noyau de l'opérateur $L(\omega) : W_\omega(T,\infty) \longrightarrow L^2(T,\infty)$ admette une base $\{u_1(\omega,t),\ldots,u_{m_+}(\omega,t)\}$ de fonctions continues sur $K \times [T,\infty[$ ainsi que leurs dérivées $D_t^j u$ pour $j \leq m$, $1 \leq k \leq m_+$, et qui vérifient :

$$\sum_{k=1}^{m_+} ||u_k(\omega)||_{W_\omega(T,\infty)} \leq C .$$

Démonstration : D'après H_o, on peut choisir T assez grand de façon que l'opérateur $M(\omega)$ vérifie sur K les hypothèses du théorème 3.1 de Visik-Grusin [10]; alors le noyau de $M(\omega) : H^m(0,\infty) \longrightarrow L^2(0,\infty)$ admet une base $\{v_1(\omega,y),\ldots,v_{m_+}(\omega,y)\}$ de fonctions continues sur $K \times [0,\infty[$ ainsi que leurs dérivées $D_y^j v_k$ pour $j \leq m$, $1 \leq k \leq m_+$ et de plus : il existe $C > 0$, $d > 0$ telles que pour $j \leq m$, $1 \leq k \leq m_+$, $\omega \in K$, $y \geq 0$, on ait :

$$|D_y^j v_k(\omega,y)| \leq C\, e^{-dy}$$

les fonctions $\psi_{j,\ell}(\omega,t)$ et $\chi_{j,\ell}(\omega,t)$ intervenant dans la formule (2.1) étant continues sur $K \times]0,\infty[$, on obtient la proposition en posant:

$$u_k(\omega,t) = t^{-\sigma-m_h-m+1/2}(\omega,t)v_k(\omega,y)$$

et en utilisant le lemme 2.5.

Proposition 2.7. Sous les hypothèses H_o et H_1 il existe $T > 0$ tel que pour tout $\omega \in K$, l'opérateur :

$$\mathcal{V}(\omega) : W_\omega(T,\infty) \longrightarrow L^2(T,\infty) \times \mathbb{C}^{m_+}$$

$$u \longrightarrow \{L(\omega)u,\ (D_t^j u)\ (T),\quad j = 0,\ldots,m_+-1\} ,$$

soit inversible et tel que la norme de l'inverse de $\mathcal{V}(\omega)$ soit bornée sur K, Démonstration : D'après Visik-Grušin, en choisissant T assez grand, l'opérateur

$$\mathcal{W}(\omega)\ :\ H^m(0,\infty) \longrightarrow L^2(0,\infty) \times \mathbb{C}^{m_+}$$

$$v \longrightarrow \{M(\omega)v,\ (D_t^j v)\ (0),\ j = 0,\ldots,m_+-1\},$$

est inversible pour tout $\omega \in K$ et la norme de son inverse est bornée sur K.

La proposition s'en déduit en remarquant que le problème :

$$\begin{cases} L(\omega)\ u(t) = f(t)\ \ t > T \\ (D_t^j u)\ (T) = c_j\ ,\ 0 \leq j \leq m_+-1\ , \end{cases}$$

est équivalent à :

$$\begin{cases} M(\omega)\ v(y) = g(y)\ ,\ y > 0 \\ (D_t^j v)\ (0) = d_j\ ,\ 0 \leq j \leq m_+-1, \quad \text{avec :} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = h^{-1/2}(\omega,t)\ f(t) \\ d_j = T^{\sigma+m_h m-j-1/2}(\omega,T)\, c_j + h^{-j}(\omega,T) \displaystyle\sum_{\ell=0}^{j-1} \psi_{j,\ell}(\omega,T) C_\ell - h^{-j}(\omega,T) \sum_{\ell=1}^{j-1} \chi_{j,\ell}(\omega,T) d_\ell\ , \end{cases}$$

et en utilisant le lemme 2.5.

Démonstration du théorème 2.2: La proposition 2.1 et l'hypothèse H_3 montrent déjà que pour chaque $\omega \in \bar{K}$, l'opérateur $\mathcal{P}(\omega)$ est un isomorphisme de $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^\chi$. Il reste à contrôler la norme de $\mathcal{P}(\omega)^{-1}$:

Le problème aux limites :

$$\begin{cases} L(\omega)\ u(t) = f(t)\ ,\ t > 0 \\ B_j(\omega)\ u(0) = g_j\ ,\ j = 0,\ldots,\chi-1 \\ u \in W_\omega(\mathbb{R}_+)\ , \end{cases}$$

se transforme grâce aux propositions 2.3, 2.4, 2.6 et 2.7, en notant :

$$u^1 = \mathcal{U}(\omega)^{-1}\,(f|_{(0,T)},0)\ ,\ u^2 = \mathcal{V}(\omega)^{-1}(f|_{(T,\infty)},0)$$

$$(u-u^1)\ (\omega,t) = \sum_{k=o}^{-\sigma-1} \lambda_k(\omega)\ t^k \varphi_{k+1}(\omega,t)$$

$$(u-u^2)\ (\omega,t) = \sum_{k=-\sigma}^{-\sigma+m_+-1} \lambda_k(\omega)\ u_{k+\sigma+1}(\omega,t)\ ,$$

en le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=o}^{-\sigma-1} B_j(\omega)\ (t^k\varphi_{k+1}(\omega,t))\ (0)\ .\ \lambda_k(\omega) = g_j\ ,\ j = 0,\dots,\chi-1 \\ \displaystyle\sum_{k=o}^{-\sigma-1} D_t^j(t^k\varphi_{k+1}(\omega,t))\,(T)\ \lambda_k(\omega) - \sum_{k=-\sigma}^{-\sigma+m_+-1} D_t^j(u_{k+\sigma+1}(\omega,t))\ (T).\lambda_k(\omega) = \\ D_t^j u^2(T)-D_t^j u^1(T),\ j=0,\dots,m-1\ . \end{cases}$$

D'après H_3, ce système admet une solution unique. Chaque coefficient de son déterminant $D(\omega)$, ainsi que $D(\omega)^{-1}$, est continu sur K d'après les propositions 2.3 et 2.6, donc sa solution $\{\lambda_o(\omega),\dots,\lambda_{-\sigma+m_+-1}(\omega)\}$ vérifie,avec C indépendante de $\omega \in K$:

$$|\lambda_k(\omega)| \leq C\ \{\sum_{j=o}^{\chi-1}|g_j| + \sum_{j=o}^{m-1}|D_t^j u^1(T)| + \sum_{j=o}^{m-1}|D_t^j u^2(T)|\}$$

$$\leq C\ \{\sum_{j=o}^{\chi-1}|g_j| + ||u^1||_{W_\omega(0,T)} + ||u^2||_{W_\omega(T,\infty)}\}$$

$$\leq C\ \{||f||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=o}^{\chi-1}|g_j|\}\ ,$$

ce qui implique :

$$||u||_{W_\omega(\mathbb{R}_+)} \leq C\ \{||f||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=o}^{\chi-1}|g_j|\ ,$$ d'où le théorème 2.2.

3 - RESOLVANTE DE REALISATIONS DANS L^2 POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES.

Pour obtenir le théorème 1.1, suivant la méthode d'Agranovich-Visik, on étudie deux aspects des problèmes aux limites dans un ouvert borné pour l'opérateur $L-\lambda$, $|\lambda|$ assez grand : les estimations à priori contrôlées en λ et l'existence. Pour cela on déduit d'abord du point 2) un résultat d'isomorphisme dans $\mathbb{R}^n_+$ pour des opérateurs quasi-homogènes, opérateurs qui proviendront d'un figeage sur le bord des coefficients d'une partie principale de L :

3.1. Problèmes aux limites dans $\mathbb{R}^n_+$ pour des opérateurs elliptiques dégénérés quasi-homogènes.

On considère dans $\mathbb{R}^n_+$ les opérateurs quasi-homogènes :

$$L^o \equiv L^o(y_n, D_y) = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}\, y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\, D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} ,$$

$$B^o_j \equiv B^o_j(D_y) = \sum_{\delta|\beta|+q=m_j} b_{jq\beta}\, D^\beta_{y'} D^q_{y_n} \;,\; j = o,\dots,-\sigma-m-1 \;,\quad \text{où}$$

$a_{\alpha j}$ et $b_{jq\beta}$ sont constants et les scalaires m,σ,δ vérifient les hypothèses de 1).
On note γu la trace de u sur $y_n = o$ lorsqu'elle a un sens et $H^s(\Omega)$, $s \geqslant 0$, les espaces de Sobolev usuels. La continuité de l'opérateur

$$\mathcal{P}^o_\lambda = \{L^o-\lambda, \gamma B^o_j, j = o,\dots,-\sigma-m-1\}$$

de $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\mu_j = \dfrac{-\sigma-m_j-1/2}{\delta}$, résulte du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

<u>Lemme 3.1.</u> Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $j \in \mathbb{N}$ tels que $\delta|\alpha|+j<-\sigma-1/2$.
Si $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ on a $\gamma D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} u \in H^{\frac{-\sigma-j-\delta|\alpha|-1/2}{\delta}}(\mathbb{R}^{n-1})$; De plus il existe $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \geqslant 0$ on ait : pour tout $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$.

$$||\gamma D^{\alpha}_{y'},D^{j}_{y_n}u||_{H^{\frac{-\sigma-j-\delta|\alpha|-1/2}{\delta}}(\mathbb{R}^{n-1})} + \lambda^{\frac{\sigma+j+\delta|\alpha|+1/2}{\sigma}} ||\gamma D^{\alpha}_{y'},D^{j}_{y_n}u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leqslant C\,\{||y_n{}^{\sigma+2m}D^{2m}_{y_n}u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m}||y_n{}^{\sigma+2\delta m}D^{\alpha}_{y'},u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + (1+\lambda)||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

Ce lemme montre de plus qu'il existe C > 0 telle que pour tout $\lambda \in S$ on ait, pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$:

$$||(L^o-\lambda)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1}(||\gamma B^o_j u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}||\gamma B^o_j u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})})$$

$$\leqslant C\,\{||y_n{}^{\sigma+2m}D^{2m}_{y_n}u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m}||y_n{}^{\sigma+2\delta m}D^{\alpha}_{y'},u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + (1+|\lambda|)||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\},$$

où $\nu_j = \dfrac{\sigma+m_j+1/2}{\sigma}$.

Du théorème 2.2 on va déduire :

Proposition 3.2. On suppose vérifiées les conditions E_1, E_2 et E_3. Alors pour tout $\lambda \in S-\{o\}$, l'opérateur :

$$\mathcal{P}^o_\lambda : W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$u \longrightarrow \{(L^o-\lambda)u,\ \gamma B^o_j u\ ,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\},$$

est inversible et il existe C > 0 telle que pour tout $\lambda \in S-\{o\}$ on ait : pour tout $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$.

$$(3.1)\quad ||y_n{}^{\sigma+2m}D^{2m}_{y_n}u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m}||y_n{}^{\sigma+2\delta m}D^{\alpha}_{y'},u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|.||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leqslant C\,\{||(L^o-\lambda)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1}(||\gamma B^o_j u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}||\gamma B^o_j u||)_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\}$$

Démonstration. Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, $g_j \in H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 0,\dots,-\sigma-m-1$. On note $\hat{f}(\xi',y_n)$, $\hat{g}_j(\xi')$ les transformées de Fourier en y' de f et g_j.

Pour $(\xi',\lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times S) - \{0\}$ on note $r(\xi',\lambda)$ l'unique réel positif solution de :

$$\sum_{i=1}^{n-1} r^{-2\delta}\, \xi_i^2 + r^{\frac{\sigma}{m}}\, |\lambda|^{\frac{1}{m}} = 1,$$

et $\omega = (r^{-\delta}\xi', r^{\sigma}\lambda)$. Sous les hypothèses E_1, E_2, E_3 les opérateurs $L(\omega) = L^o(t, r^{-\delta}\xi', D_t) - r^{\sigma}\lambda$, $B_j(\omega) = B_j^o(r^{-\delta}\xi', D_t)$ vérifient les conditions H_o, H_1, H_2, H_3 de 2), l'espace $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ s'identifiant à :

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ t^{\sigma+2m}\, D_t^{2m}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+)\} \quad \text{si } \xi' = 0$$

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ t^{\sigma+2\delta m}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+),\ t^{\sigma+2m}\, D_t^{2m}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+)\} \quad \text{si } \xi' \neq 0.$$

Une condition nécessaire pour que $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ soit solution de $\mathcal{P}^o_\lambda u = (f, g_j)$ est que pour presque tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ la fonction $v(t) = \hat{u}\,(\xi', y_n)$, avec $t = r(\xi',\lambda) y_n$ vérifie :

$$(3.2) \quad \begin{cases} (L^o(t, r^{-\delta}\xi', D_t) - r^{\sigma}\lambda)\ v(t) = r^{\sigma}\ \hat{f}(\xi', r^{-1}t) \\ (B_j^o(r^{-\delta}\xi', D_t)\ v(t))(o) = r^{-m_j}\ \hat{g}_j(\xi')\ ,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\ , \\ \qquad v \in W_\omega(\mathbb{R}_+) \end{cases}$$

D'après le théorème 2.2, (3.2) admet une solution unique ; ceci démontre l'injectivité de $\mathcal{P}^o_\lambda$; de plus la solution de (3.2) vérifie :

$$||t^{\sigma+2m} D_t^{2m} v||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{|\alpha|=2m} ||t^{\sigma+2\delta m}(r^{-\delta}\xi')^{\alpha} v||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + ||r^{\sigma}\lambda v||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq C\ \{||r^{\sigma}\hat{f}(\xi', r^{-1}t)||_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} |r^{-m_j}\hat{g}_j(\xi')|\},$$

avec C indépendante de ξ' et λ. En revenant en variable y_n on voit que pour $\lambda \in S$, $\lambda \neq 0$, $v(r(\xi',\lambda) y_n)$ est la transformée de Fourier en y' d'une fonction

$u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ qui vérifie $\mathcal{P}^o_\lambda u = (f,g_j)$ et l'inégalité (3.1) ; d'où la proposition.

3.2. Problèmes aux limites dans un ouvert borné pour des opérateurs dégénérés : estimations à priori.

On reprend les notations de 1). Il résulte du lemme 3.1 que l'opérateur :
$\mathcal{P}_\lambda = \{L-\lambda, \gamma B_j, \ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\}$ est linéaire continu de $W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\Gamma)$, et qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq 1$ on ait, pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$:

$$||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B_j u||_{H^{\mu_j}(\Gamma)} + |\lambda|^{\nu_j} ||\gamma B_j u||_{L^2(\Gamma)})$$

$$\leq C \{||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda| \ ||u||_{L^2(\Omega)}\} .$$

On va montrer une inégalité inverse pour $|\lambda|$ grand :

Proposition 3.3. Sous les hypothèses E_o, E_1, E_2, E_3 il existe $\lambda_o > 0$, $C > 0$ tels que pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \lambda_o$ on ait pour tout $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$:

$$(3.3) \quad ||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda| \ ||u||_{L^2(\Omega)} \leq C \{||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B_j u||_{H^{\mu_j}(\Gamma)}$$
$$|\lambda|^{\nu_j} ||\gamma B_j u||_{L^2(\Gamma)})\} .$$

Démonstration. D'après Agranovich-Visik, pour tout $x \in \Omega \cap O_i$, il existe un voisinage ouvert O_x de x contenu dans $\Omega \cap O_i$, $\lambda_x > 0$, $C_x > 0$ tels que pour tout $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \lambda_x$, et pour toute fonction $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support contenu dans O_x on ait :

$$||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda|.||u||_{L^2(\Omega)} \leq C_x \ ||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} .$$

Pour montrer une inégalité du même type si $x \in \Gamma \cap O_i$, on décompose les opérateurs $L-\lambda$ et B_j, en coordonnées locales dans O_i sous la forme :

$$L-\lambda \equiv (L^o-\lambda) + L^1 + L^2 \quad , \quad B_j = B_j^o + B_j^1 \text{ , avec}$$

$$L^o = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(y)\, y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\, D_{y'}^{\alpha}\, D_{y_n}^{j}$$

$$L^1 = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j>0 \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\notin \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(y)\, y_n^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]+}\, D_{y'}^{\alpha},\, D_{y_n}^{j}$$

$$L^2 = \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j<0}} a_{\alpha j}(y)\, D_{y'}^{\alpha},\, D_{y_n}^{j}$$

$$B_j^o = \sum_{\delta|\beta|+q=m_j} b_{jq\beta}(y')\, D_{y'}^{\beta}, D_{y_n}^{q} \quad , \quad B_j^1 = \sum_{\delta|\beta|+q<m_j} b_{jq\beta}(y')\, D_{y'}^{\beta}, D_{y_n}^{q} .$$

On note $L^o(x)$, $B_j^o(x)$ les opérateurs obtenus à partir de L^o et B_j^o en figeant les coefficients $a_{\alpha j}$ et $b_{jq\beta}$ au point x. Ces opérateurs sont du type étudié en 3.1. De la proposition 3.2 on déduit donc qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tous $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant 1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $O_i \cap \bar{\Omega}$ on ait en coordonnées locales :

$$||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|\; ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_1 \;\{||(L-\lambda)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B_j u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ |\lambda|^{\nu_j}\; ||\gamma B_j u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}) + R_u\} ,$$

$$\text{avec } R_u = ||(L^o-L^o(x))u + L^1u + L^2u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma(B_j^o-B_j^o(x))u + \gamma B_j^1 u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ |\lambda|^{\nu_j}\; ||\gamma(B_j^o-B_j^o(x))u + \gamma B_j^1 u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}) .$$

La majoration de R_u va se déduire des lemmes suivants qui seront utilisés aussi par la suite et dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 3.4. Il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$ les quantités suivantes se majorent par : $C\lambda^{-\gamma}\{||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + \lambda ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}\}$:

i) $||D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ si $|\alpha|+j\leq 2m$, $\sigma+\delta|\alpha|+j<0$

ii) $||y_n^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]+} D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ à support dans $y_n \leq 1$ si $\sigma+\delta|\alpha|+j>0$, $\sigma+\delta|\alpha|+j \notin \mathbb{N}$, $|\alpha|+j\leq 2m-1$.

iii) $||y_n^{\sigma+\delta(|\alpha|+1)+j} D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ et $||y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j+\inf(1,\delta)} D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$,

pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ à support dans $y_n \leq 1$, si $\sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N}$, $|\alpha|+j\leq 2m-1$.

Lemme 3.5. Si $0 \leq s_1 \leq s_2$, il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ tels que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$ on ait pour $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$||u||_{H^{s_1}(\mathbb{R}^{n-1})} + \lambda^{\frac{\delta s_1}{-\sigma}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\lambda^{-\gamma}\{||u||_{H^{s_2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$
$$+ \lambda^{\frac{\delta s_2}{-\sigma}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\}.$$

Ces lemmes donnent alors : il existe un voisinage U de x contenu dans O_i et $C > 0$ tels que pour $\lambda \geq 1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $U \cap \bar{\Omega}$, on ait :

$$||L^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B^1_j u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + \lambda^{\nu_j} ||\gamma B^1_j u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C\lambda^{-\gamma}(||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + \lambda||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage ouvert U_ε de x contenu dans U,il existe $C > 0$ tels que pour $\lambda \geqslant 1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $U_\varepsilon \cap \bar{\Omega}$ on ait :

$$||(L^o-L^o(x))u + L^1u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma(B^o_j-B^o_j(x))u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ \lambda^{\nu_j} ||\gamma(B^o_j-B^o_j(x))u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}) \leq (\varepsilon + C\lambda^{-\gamma}).\ (||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + \lambda\ ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}).$$

Ceci donne une majoration de R_u en fonction de $\varepsilon > 0$, $\lambda \geqslant 1$ et $(||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + \lambda\ ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)})$ pour u à support dans $U_\varepsilon \cap \bar{\Omega}$; on choisit alors ε assez petit, λ_x assez grand, on note $0_x = U_\varepsilon$ de façon que pour $\lambda \geqslant \lambda_x$ et u à support dans $0_x \cap \bar{\Omega}$, on ait :

$$C_1.R_u. \leqslant \frac{1}{2} (||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + \lambda\ ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}) .$$

Alors on a aussi :

$$||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|\ ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_x(||(L-\lambda)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B_j u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$+ |\lambda|^{\nu_j} ||\gamma B_j u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}) ,$$

pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_x$, $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans $0_x \cap \bar{\Omega}$.

De la famille des ouverts 0_x lorsque x parcourt $\bar{\Omega}$ on extrait une famille finie $\{U_1 \ldots U_q\}$ recouvrant $\bar{\Omega}$ et on considère une partition de l'unité $\{\psi_1 \ldots \psi_q\}$ subordonnée à ce recouvrement. Il existe donc $C > 0$, $\lambda_1 \geqslant 1$ tels que pour tous $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_1$ et $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ on ait :

$$\begin{cases} ||\psi_k u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda|\ ||\psi_k u||_{L^2(\Omega)} \leqslant C\ ||(L-\lambda)(\psi_k u)||_{L^2(\Omega)}, \\ \text{si } U_k \subset \Omega, \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ||\psi_k u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|\ ||\psi_k u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\{||(L-\lambda)(\psi_k u)||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \\ + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B_j(\psi_k u)||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}\ ||\gamma B_j u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})})\}, \\ \text{Si } U_k \cap \Gamma \neq \emptyset, \text{ en coordonnées locales.} \end{array}\right.$$

On montre facilement que si $U_k \subset \Omega$ on a, en notant $AB-BA \equiv [A,B]$,

$$||[L-\lambda,\psi_k]u||_{L^2(\Omega)} \leqslant C\,|\lambda|^{\frac{-1}{2m}}(||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda|\ ||u||_{L^2(\Omega)}),$$

De plus les lemmes 3.4 et 3.5 donnent dans le cas $U_k \cap \Gamma \neq \emptyset$:

$$||[L-\lambda,\psi_k]u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1}(||\gamma[B_j,\psi_k]u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}\ ||\gamma[B_j,\psi_k]u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})})$$

$$\leq C\ |\lambda|^{-\gamma}(||\chi_k u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + |\lambda|\ ||\chi_k u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)})$$

où $0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2m}$ et χ_k est une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}^n$ à support dans U_k et égale à 1 sur un voisinage du support de ψ_k.

Une sommation sur k donne enfin pour $|\lambda| \geqslant \lambda_1$:

$$||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda|\ ||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant C\,\{||(L-\lambda)u||_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1}(||\gamma B_j u||_{H^{\mu_j}(\Gamma)} +$$

$$|\lambda|^{\nu_j}||\gamma B_j u||_{L^2(\Gamma)}) + |\lambda|^{-\gamma}(||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)} + |\lambda|\ ||u||_{L^2(\Omega)})\}\ ,$$

d'où la proposition 3.3 en choisissant λ_o assez grand.

On montre maintenant une réciproque de la proposition 3.3:

Proposition 3.6. Si la conclusion de la proposition 3.3 est vraie alors les conditions E_o, E_1, E_3 sont vérifiées pour $\lambda \in S$. Si de plus pour tout $x \in \Gamma$

l'équation $F(x,\rho) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\mathrm{Re}\rho = -\sigma-1/2$ alors E_2 est aussi vérifiée.

Démonstration. On suppose donc que (3.3) est vérifiée pour $|\lambda|$ grand. Les mêmes techniques que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 3.3 montrent que pour tout $x \in \bar{\Omega}$ il existe un voisinage ouvert O_x de x, $C_x > 0$ et $\mu_x > 0$ tels que pour tout $\mu \in S$, $|\mu| \geqslant \mu_x$ on ait :

(3.4) $$||u||_{H^{2m}(\Omega)} + |\mu|.||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant C_x \, ||(\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x)D^\alpha-\mu)u||_{L^2(\Omega)},$$

si $x \in \Omega$, pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support dans O_x.

(3.5) $$||u||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)} + |\mu|.||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_x \, \{||(L^o(x)-\mu)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$
$$+ \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B^o_j(x)u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\mu|^{\nu_j}||\gamma B^o_j(x)u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})})\},$$

en coordonnées locales, si $x \in \Gamma$, pour $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)$ à support contenu dans $O_x \cap \bar{\Omega}$. La nécessité des conditions E_i s'obtient en appliquant (3.4) et (3.5) à des fonctions test :

Nécessité de E_o: (3.4) implique E_o pour $\lambda \neq 0$ d'après Agranovich-Visik. De plus si dans (3.4) on fixe μ on obtient, pour tout $u \in \mathcal{D}(O_x)$:

$$||u||_{H^{2m}(O_x)} \leqslant C(\mu) \, \{||\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x)D^\alpha u||_{L^2(O_x)} + ||u||_{L^2(O_x)}\};$$

il est bien connu que cette estimation implique l'ellipticité de L dans Ω c'est à dire E_o pour $\lambda = 0$.

Nécessité de E_1: Soit $x \in \Gamma$; d'après (3.5) il existe $\varepsilon > 0$, $\mu_o > 0$, $C > 0$ tels que pour tous $\mu \in S$, $|\mu| \geqslant \mu_o$, $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ à support dans

$\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2,\ y_n > \varepsilon/4\}$ on ait :

$$(3.6)\quad ||y_n^{\sigma+2m} D_{y_n}^{2m} u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=2m} ||y_n^{\sigma+2\delta m} D_{y'}^{\alpha} u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + |\mu|\ ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leqslant C\ ||(L^o(x)-\mu)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} .$$

E_1 est trivialement vérifiée pour $(\xi',\zeta) = 0$; si $(\xi',\zeta) \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$, on applique (3.6) avec $\mu = \rho^{2m}\lambda$, $\rho > 0$ assez grand, à la fonction

$$(3.7)\quad u_\rho(y) = \varphi(y')\ \psi(y_n)\ e^{i\rho(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\xi_i + y_n\zeta)}$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le support de $\varphi\psi$ est contenu dans $\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2,\ y_n > \varepsilon/4\}$ $\varphi = 1$ au voisinage de 0 ; puis on fait tendre ρ vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue. On obtient :

$$|\lambda|.||\psi||_{L^2(0,3\varepsilon/4)} \leqslant C\ ||\sum_{\substack{|\alpha|+j=2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(x) y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi'^{\alpha} \zeta^{j} - \lambda)\psi||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

On applique cette nouvelle inégalité à la fonction :

$$(3.8)\quad \psi_\rho(y_n) = \psi_1(y_n)\ \psi_2(\rho(y_n-\varepsilon/2)) ,$$

où $\rho > 0$, $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi_2(0) \neq 0$, ψ_1 est à support dans $]\varepsilon/4,\ 3\varepsilon/4[$, à valeurs dans $[0,1]$ et égale à 1 dans $[\varepsilon/3,\ 2\varepsilon/3]$; puis on fait tendre ρ vers $+\infty$, ce qui donne E_1 pour $\lambda \neq 0$.

Pour montrer E_1 pour $\lambda = 0$ on applique (3.6) avec μ fixé à la fonction μ_ρ définie par (3.6) et on fait tendre ρ vers $+\infty$; ceci donne :

$$((\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2)^m + \zeta^{2m})||\psi||_{L^2(\varepsilon/4,3\varepsilon/4)} \leqslant C(\mu)||(\sum_{\substack{|\alpha|+j=2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(x) y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi'^{\alpha} \zeta^{j})\psi||_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

Cette inégalité appliquée à la fonction ψ_ρ définie par (3.8) donne E_1 pour $\lambda = 0$ faisant tendre ρ vers $+\infty$.

Nécessité de E_3: Soit $x \in \Gamma$. D'après (3.5) il existe $\varepsilon > 0$, $\mu_o > 0$, $C > 0$ tels que pour tout $\mu \in S$, $|\mu| \geqslant \mu_o$, $u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ à support dans $\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2\}$ on ait :

$$(3.9) \quad \sum_{|\alpha|=2m} ||y_n^{\sigma+2\delta m} D_y^\alpha u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + |\mu|.||u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \{||(L^o(x)-\mu)u||_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||\gamma B_j^o(x)u||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\mu|^{\nu_j}||\gamma B_j^o u||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})})\} .$$

Soient $\omega = (\xi',\lambda) \in K$ et $v \in W_\omega(\mathbb{R}_+)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tellesque le support de $\varphi\psi$ soit contenu dans $\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \varepsilon^2\}$, $\varphi = 1$ dans un voisinage de 0, $\psi = 1$ dans $[0,\varepsilon/2]$.

Pour $\lambda \neq 0$ on applique (3.9) avec $\mu = \rho^{-\sigma} \lambda$ à la fonction :

$$(3.10) \quad u_\rho(y) = \varphi(y') \, \psi(y_n) \, v(\rho y_n) \, e^{i\rho^\delta \sum_{i=1}^{n-1} y_i \xi_i} ,$$

en distinguant les deux cas $\xi' \neq 0$ et $\xi' = 0$. On effectue le changement de variable $z = \rho y_n$ puis on fait tendre ρ vers $+\infty$. Ceci donne E_3 pour $\lambda \neq 0$. Pour $\lambda = 0$ on applique encore (3.9) avec μ fixé à la fonction u_ρ définie par (3.10), on effectue le changement de variable $z = \rho y_n$ et on fait tendre ρ vers $+\infty$.

Nécessité de E_2: Soit $x \in \Gamma$. On suppose en plus de (3.3) que l'équation $F(x,\rho) = 0$ n'a pas de racine sur la droite $\mathrm{Re}\rho = -\sigma-1/2$; la condition E_1 étant nécessaire pour $\lambda = 0$, d'après Bolley-Camus-Helffer [5] l'opérateur $L^o(x,\omega)$, où $\omega = (\xi',0)$ avec $\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 = 1$, considéré comme linéaire continu de $W_\omega(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ est à indice d'indice $-\sigma+r_o-m$; la condition E_3 étant aussi nécessaire pour $\lambda = 0$, le noyau de $L^o(x,\omega)$ est au plus de dimension $-\sigma-m$. Ceci donne bien $r_o = 0$ c'est à dire E_2.

3.3. Problèmes aux limites dans un ouvert borné pour des opérateurs dégénérés : existence.

On garde les notations de 1). Le théorème 1.1 est un corollaire immédiat de la proposition 3.3 et du résultat suivant :

Proposition 3.7. Sous les hypothèses E_o, E_1, E_2 et E_3, il existe $\lambda_o > 0$ tel que pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geqslant \lambda_o$ l'opérateur :

$$\mathcal{P}_\lambda \ : W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\Omega)$$

$$u \longrightarrow \{(L-\lambda)u,\ \gamma B_j u,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\},$$

admet un inverse à droite.

Démonstration. A l'aide du lemme 3.5 on déduit facilement de la proposition 2.2 le résultat suivant :

Lemme 3.8. On suppose les conditions E_1, E_2 et E_3 vérifiées pour $\lambda \in S$ et pour les opérateurs à coefficients indéfiniment dérivables dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$:

$$\begin{cases} L^o(y,D_y) = \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|+j\leqslant 2m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N}}} a_{\alpha j}(y)\, y_n^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D^\alpha_{y'} D^j_{y_n} \\ B^o_j(y',D_y) = \displaystyle\sum_{\delta|\beta|+q=m_j} b_{jq\beta}(y')\, D^\beta_{y'}\, D^q_{y_n} \ ,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\ . \end{cases}$$

Il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda_o > 0$, $C > 0$ tels que si on a :

$$\begin{cases} |a_{\alpha j}(y) - a_{\alpha j}(o)| < \varepsilon \ ,\ |\alpha|+j\leqslant 2m \ ,\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbb{N} \\ |b_{jq\beta}(y') - b_{jq\beta}(o)| < \varepsilon \ ,\ \delta|\beta|+q = m_j \ ,\ j = o,\dots,-\sigma-m-1 \ , \end{cases}$$

l'opérateur :

$$\mathcal{P}^o_\lambda \ : W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$u \longrightarrow \{L^o(y,D_y)u,\ \gamma B^o_j(y',D_y)u,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\},$$

admet un inverse à droite $\mathcal{R}_\lambda^o$ pour $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \lambda_o$ qui vérifie : pour tous $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, $g_j \in H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 0,\dots,-\sigma-m-1$,

$$(3.11)\quad ||\mathcal{R}_\lambda^o(f,g_j)||_{W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+^n)} + |\lambda|\ ||\mathcal{R}_\lambda^o(f,g_j)||_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq C\ \{||f||_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \sum_{j=o}^{-\sigma-m-1} (||g_j||_{H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + |\lambda|^{\nu_j}||g_j||_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})})\}.$$

Ce lemme 3.8 et un résultat analogue d'Agranovich-Visik dans $\mathbb{R}^n$ montrent qu'il existe un recouvrement $\{U_k\}_{k=1}^q$ de $\bar{\Omega}$ plus fin que $\{O_i\}_{i=1}^p$, une partition de l'unité $\{\psi_k\}_{k=1}^q$ subordonnée à ce recouvrement et une famille $\{\chi_k\}_{k=1}^q$ de fonctions à support dans U_k égales à 1 dans un voisinage du support ψ_k tels que :

Si $U_k \subset \Omega$ il existe un prolongement L_k à $\mathbb{R}^n$ de l'opérateur L qui vérifie $L_k(\chi_k u) = L(\chi_k u)$ dans U_k et, l'opérateur $A_k^o - \lambda \in \mathcal{L}(H^{2m}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$, où A_k^o est la partie homogène de degré 2m en $(D_{x_1},\dots,D_{x_n})$ de L_k, admet pour $|\lambda| \geq \lambda_o$ un inverse à droite $\mathcal{R}_{k,\lambda}^o$ tel que : pour tous $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in S$, $|\lambda| \geq \lambda_o$,

$$||\mathcal{R}_{k,\lambda}^o f||_{H^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\ ||\mathcal{R}_{k,\lambda}^o f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\ ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ,$$

avec C indépendante de λ et f.

Si $U_k \cap \Gamma \neq \emptyset$ il existe un opérateur $\mathcal{P}_k = \{L_k, B_{j,k}, j = 0,\dots,-\sigma-m-1\}$ du même type que $\{L,B_j\}$ en coordonnées locales qui vérifie $\mathcal{P}_k(\chi_k u) = \mathcal{P}_o(\chi_k u)$ en coordonnées locales dans U_k et tel que l'opérateur $\mathcal{P}_{k;\lambda}^o = \{L_k^o-\lambda, B_{j,k}^o, j = 0,\dots,-\sigma-m-1\}$ linéaire continu de $W^{2m}_{\sigma;\delta}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j}(\mathbb{R}^{n-1})$, admet un inverse à droite $\mathcal{R}_{k,\lambda}^o$ pour $|\lambda| \geq \lambda_o$ qui vérifie (3.11).

On note alors, pour $|\lambda|$ assez grand,

$$\mathcal{R}_\lambda^o(f,g) = \sum_{U_k \cap \Gamma \neq \emptyset} \chi_k \mathcal{R}_{k,\lambda}^o(\psi_k f,\psi_k g_j) + \sum_{U_k \subset \Omega} \chi_k \mathcal{R}_{k,\lambda}^o(\psi_k f)$$

Des lemmes 3.4 et 3.5 on déduit que l'opérateur $\mathcal{P}_\lambda \mathcal{R}_\lambda^o$ est inversible pour $|\lambda|$ assez grand. Alors $\mathcal{R}_\lambda^o(\mathcal{P}_\lambda\mathcal{R}_\lambda^o)^{-1}$ est un inverse à droite pour $\mathcal{P}_\lambda$ pour $|\lambda|$ assez grand.

4 - RESOLUTION DU PROBLEME D'EVOLUTION PARABOLIQUE NON HOMOGENE

La terminologie et les notations sont celles de Grisvard [6] ou Lions-Magenes [7]. D'après [7] ou [1], par transformation de Laplace, dans le cas ou le secteur S est le demi-plan $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$, le théorème 1.1 permet de résoudre de façon unique le problème :

$$\begin{cases} Lu + \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u(o) = u_o \\ B_j u = o \text{ sur } \Gamma \times \left]0,T\right[, \ j = 0,\dots,-\sigma-m-1 \\ u \in L^2(0,T \ ; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)) \cap H^1(0,T \ ; L^2(\Omega) \end{cases} ,$$

pour f donné dans $L^2(]0,T[x\Omega)$, $T > 0$, et u_o dans $[D(L), L^2(\Omega)]_{1/2}$.

Pour passer au cas non homogène et déterminer l'espace $[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega), L^2(\Omega)]_{1/2}$, on étudie les traces sur $\Gamma \times]0,T[$ et en $t = 0$ des éléments de l'espace $L^2(0,T \ ; W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)) \cap H^1(0,T \ ; L^2(\Omega))$; ces espaces étant locaux il suffit d'ailleurs d'étudier le cas $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $T = +\infty$:

$t \in]0,\infty[$ désignant la variable d'évolution, pour r, s ≥ 0 on considère l'espace : $H^{r,s}(\Omega x]a,b[) = L^2(a,b \ ; H^r(\Omega)) \cap H^s(a,b \ ; L^2(\Omega))$, muni de la norme canonique. Les scalaires m,σ,δ vérifiant les hypothèses de 1 , on montre facilement le résultat de trace sur $x_n = 0$:

<u>Lemme 4.1.</u> Pour $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $j \in \mathbb{N}$, $\delta|\alpha|+j < -\sigma-1/2$, l'application

$$u \longrightarrow D^\alpha_{x'}, D^j_{x_n} u(x',o,t)$$

est linéaire continue de $L^2(0,\infty;H^{\frac{-\alpha}{\delta},-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}\times(o,\infty)))\cap H^1(o,\infty;L^2(\mathbb{R}^n_+))$ dans l'espace $H^{\frac{-\sigma-\delta|\alpha|-j-1/2}{\delta},\frac{-\sigma-\delta|\alpha|-j-1/2}{-\sigma}}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty))$.

Ce lemme, avec un résultat de Grisvard [6] montrent que l'application :

$$\mathscr{C}_\gamma : u \longrightarrow \{u(x,0)\ ,\ D^j_{x_n} u(x',0,t),\ j = 0,\dots,-\sigma-1\}\ ,$$

est linéaire continue de $L^2(0,\infty\ ;\ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+))\cap H^1(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n_+))$ dans le sous-espace F_γ du produit :

$$[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+),\ L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{1/2} \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\frac{-\sigma-j-1/2}{\delta},\frac{-\sigma-j-1/2}{-\sigma}}(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)),$$

des $\{u_o,g_j\}$ qui vérifient les relations de compatibilité :

$$\mathscr{R}\mathscr{C}_\gamma \begin{cases} D^j_{x_n}\ u_o(x',o) = g_j(x',o) \quad \text{si} \quad j < \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ \displaystyle\int_o^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^j_{x_n}\ u_o(x',\tau) - g_j(x',\tau^{-\sigma})|^2\, dx'\, \frac{d\tau}{\tau} < +\infty \quad \text{si } -\sigma \text{ est im-} \\ \text{pair et } j = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On montre alors le résultat de relèvement :

<u>Proposition 4.2.</u> L'application $\mathscr{C}_\gamma : L^2(0,\infty\ ;\ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+))\cap H^1(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n_+))\longrightarrow F_\gamma$, est surjective.

<u>Démonstration</u>: Soient $\{u_o,g_j\}\in F_\gamma$ et $v\in L^2(0,\infty\ ;\ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+))\cap H^1(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n_+))$ telle que $v(o) = u_o$. Si on note : $D^j_{x_n}\ v(x',o,t) = h_j(x',t)$ pour $j \leqslant -\sigma-1$, on a $\{o,h_j-g_j\}\in F_\gamma$ donc, avec les notations de Lions-Magenes [7] :

$$\begin{cases} h_j-g_j \in H_o^{\frac{-\sigma-j-1/2}{-\sigma}}(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \quad \text{si} \quad j < -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ h_j-g_j \in H^{1/2}_{oo}(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \quad \text{si } -\sigma \text{ est impair et } j = \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Le prolongement Q par imparité de $L^2(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$Qu(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad t > 0 \\ -u(-t) & \text{si} \quad t < 0 , \end{cases}$$

étant continu de $H_0^1(0,\infty \, ; \, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ dans $H^1(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ on a , par interpolation:

$$Q(h_j-g_j) \in H^{\frac{-\sigma-j-1/2}{-\sigma}}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \text{ pour tout } j = 0,\ldots,-\sigma-1.$$

Alors, pour $j \leq -\sigma-1$, la fonction w_j définie par sa transformée de Fourier $\hat{w}_j$ en (x',t) :

$$\hat{w}_j(\xi',x_n,\tau) = i^j \, \widehat{Q(h_j-g_j)} \, (\xi',\tau) \, \frac{d^{\sigma+2m}}{dx_n{}^{\sigma+2m}} \left(\frac{x_n{}^{\sigma+2m+j}}{(\sigma+2m+j)!} \, \psi((1 + (\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2)^{\frac{1}{2\delta}} + |\tau|^{-\frac{1}{\sigma}}) x_n) \right)$$

où $\psi \in \mathcal{D}([0,\infty[)$ vaut 1 dans un voisinage de zéro, vérifie :

$$\begin{cases} w_j \in L^2(\mathbb{R}, W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^n_+)) \\ D^k_{x_n} w_j(x',o,t) = \begin{cases} o \text{ si } k \neq j \quad , \quad k \leq -\sigma-1 \\ Q(h_j-g_j) \; (x',t) \text{ si } k = j \end{cases} \\ w_j \; (x,o) = 0 \; , \end{cases}$$

En considérant $u = v - \sum_{j=o}^{-\sigma-1} w_j$ on démontre ainsi la surjectivité de l'application $\mathcal{C}_\gamma$.

On va démontrer un résultat du même type, les $D^j_{x_n}$ étant remplacés par un système d'opérateurs normal sur $\{x_n = 0\}$:

On considère un système $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=o}^p$ d'opérateurs différentiels de la forme :

$$B_j(x',D_x) = \sum_{\delta|\beta|+q\leq m_j} b_{jq\beta}(x') \, D^\beta_{x'} \, D^q_{x_n} \; ,$$

où $0 \leq m_j \leq -\sigma-1$ et les fonctions $b_{jq\beta}$ sont indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

On suppose que $m_j \neq m_k$ si $j \neq k$ et que $b_{jm_j o} = 1$ pour tout j.

Il résulte de Grisvard [6] que l'application :

$$\mathscr{C}_{\mathscr{B}} : u \longrightarrow \{u(x,o) \ , \ B_j u(x',o,t) \ , \ j = 0,\dots,p\} \ ,$$

est linéaire continue de $L^2(0,\infty \ ; \ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(0,\infty \ ; \ L^2(\mathbb{R}^n_+))$ dans le sous-espace $F_{\mathscr{B}}$ du produit :

$$[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \ , \ L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{1/2} \times \prod_{j=o}^{p} H^{\mu_j,\nu_j}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)) \ ,$$

des $\{u_o, g_j\}$ qui vérifient les relations de compatibilité :

$$\mathscr{R}\,\mathscr{C}_{\mathscr{B}} \begin{cases} B_j \, u_o(x',o) = g_j(x',o) \ , \ \text{si } m_j < -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ \displaystyle\int_o^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |B_j \, u_o(x',\tau) - g_j\,(x',\tau^{-\sigma})|^2 \, dx' \, \frac{d\tau}{\tau} < +\infty \ \ \text{si } -\sigma \text{ est im-} \\ \text{pair et } m_j = \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a encore :

<u>Proposition 4.3.</u> L'application $\mathscr{C}_{\mathscr{B}} : L^2(0,\infty \ ; \ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(0,\infty \ ; \ L^2(\mathbb{R}^n_+)) \longrightarrow F_{\mathscr{B}}$, est surjective.

<u>Démonstration:</u> a) On traite d'abord le cas $m_j \neq \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2}$ pour tout j. On complète le système $\mathscr{B}$ à l'aide de $D^k_{x_n}$ en un système $\mathscr{B}' = \{B'_j\}_{j=o}^{-\sigma-1}$ d'opérateurs de la forme:

$$B'_j(x',D_x) = \sum_{\delta|\beta|+q\leq j} b'_{jq\beta}(x') \, D^\beta_{x'} \, D^q_{x_n} \ , \ \text{avec } b'_{jjo} = 1 \ ,$$

pour lesquels on a les formules :

$$\begin{cases} D^j_{x_n} = B'_j + \displaystyle\sum_{s=o}^{j-1} \Lambda'_{js} \, B'_s \\ B'_j = D^j_{x_n} + \displaystyle\sum_{s=o}^{j-1} \Lambda'_{js} \, D^s_{x_n} \end{cases} , \quad 0 \leq j \leq -\sigma-1 \ ,$$

où Λ_{js}, Λ'_{js} sont des opérateurs différentiels en x' d'ordre inférieur ou égal à $\frac{j-s}{\delta}$.

On convient que $\Lambda_{jj} = \Lambda'_{jj} = 1$.

Soit alors $\{u_o,g_j\} \in F_{\mathcal{B}}$ et $\varphi \in L^2(0,\infty\ ;\ H^{\frac{-\sigma}{\delta},-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}x(0,\infty))) \cap H^1(0,\infty;L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant $\varphi(x,0) = u_o(x)$. Pour $j \leq -\sigma-1$ on note $h_j = \sum_{s=o}^{j} \Lambda_{js}\, g'_s$, avec :

$$\begin{cases} g'_s(x',t) = g_j(x',t) & \text{si} \quad s = m_j \\ g'_s(x',t) = D^s_{x_n}\ (x',o,t) & \text{si} \quad s \neq m_j \quad , \quad s \leq -\sigma-1 \end{cases}$$

Puisque $B'_{\frac{-\sigma}{2}-\frac{1}{2}} = D_{x_n}^{\frac{-\sigma}{2}-\frac{1}{2}}$ si $-\sigma$ est impair, on a $\{u_o,h_j\} \in F_\gamma$, donc d'après la proposition 4.2, il existe $u \in L^2(0,\infty\ ;\ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant $\mathcal{C}_\gamma u = \{u_o,h_j\}$. Alors on voit facilement qu'on a aussi $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} u = \{u_o,g_j\}$.

b) On suppose maintenant que $-\sigma$ est impair et qu'il existe j tel que $m_j = \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2}$.

En complètant le système $\mathcal{B}$ comme en a) on peut supposer que $p = -\sigma-1$ et $m_j = j$ pour tout j. Soient $\{u_o,g_j\} \in F_{\mathcal{B}}$ et φ relevant u_o dans $L^2(0,\infty\ ;\ H^{\frac{-\sigma}{\delta},-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1}x(0,\infty)))$ $\cap H^1(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n_+))$. Si on note :

$$\begin{cases} B''_j = B_j \quad \text{et} \quad g''_j = g_j \quad \text{pour } j \neq \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ B''_j = D^j_{x_n} \quad \text{et} \quad g''_j = D^j_{x_n}\varphi\,(x',o,t) \quad \text{pour } j = \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2}\ , \end{cases}$$

On a $\{u_o,g''_j\} \in F_{\mathcal{B}''}$, donc d'après a) il existe $u_1 \in L^2(0,\infty;W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)) \cap H^1(0,\infty;$ $L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_1(x,o) = u_o(x) \\ B''_j\ u_1(x',o,t) = g''_j(x',t)\ , \quad 0 \leq j \leq -\sigma-1. \end{cases}$$

En écrivant encore $D^j_{x_n} = \sum_{s=o}^{j} \Lambda_{js} B_s$, $B_j = \sum_{s=o}^{j} \Lambda'_{js} D^s_{x_n}$, on voit que pour

$j = \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2}$ et $s < j$, on a :

$$\Lambda_{js} u_1 \in L^2(0,\infty \,;\, H^{\frac{-\sigma/2+s+1/2}{\delta}, -\sigma/2+s+1/2}(\mathbb{R}^{n-1} x (0,\infty)))$$
$$\cap H^{\frac{-\sigma/2+s+1/2}{-\sigma}}(0,\infty \,;\, L^2(\mathbb{R}^n_+))$$

donc, d'après Grisvard [6] :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} | B_s \Lambda_{js} u_o(x',\tau) - \Lambda_{js} g_s(x',\tau^{-\sigma})|^2 \, dx' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty .$$

Une sommation sur $s \leqslant j$, en utilisant aussi la relation intégrale de $\mathcal{R}\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ vérifiée par u_o et g_j, donne :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^j_{x_n} u_o(x',\tau) - (\sum_{s=o}^{j} \Lambda_{js} g_s)(x',\tau^{-\sigma})|^2 \, dx' \frac{d\tau}{\tau} < +\infty, \text{ pour } j = \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2} ,$$

Ce qui montre que $\{u_o, \sum_{s=o}^{j} \Lambda_{js} g_s\}$ appartient à F_γ. Un relèvement u donné par la proposition 4.2 vérifie alors $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} u = \{u_o, g_j\}$.

<u>Proposition 4.4.</u> On a l'égalité $[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+), L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{1/2} = W^m_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Démonstration</u>: D'après Bolley-Camus ([4] dans le cas $\delta = 1$), il existe un opérateur A non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, auto-adjoint positif, de domaine D(A) défini par :

$$\begin{cases} D(A) = W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \quad \text{si } 0 < -\sigma \leqslant m \\ D(A) = \{u \in W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \,,\, B_j u = o,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1\} \text{ si } m+1 \leqslant -\sigma \leqslant 2m, \end{cases}$$

où $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=o}^{-\sigma-m-1}$ est du type étudié ci-dessus, avec $m \leqslant m_j \leqslant -\sigma-1$ pour tout j, et associé à une forme sesquilinéaire coercitive sur l'espace $W^{2m}_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\mathbb{R}^n_+)$. La proposition 4.4 est donc immédiate dans le cas $-\sigma \leqslant m$. Si $-\sigma \geqslant m+1$ on a toujours :

$$W^{m}_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\mathbb{R}^n_+) = [D(A),\ L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{1/2} \subset [W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+),\ L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{1/2} .$$

Pour démontrer l'inclusion inverse on applique la proposition 4.3 : si $f \in [W^{2m}_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+),\ L^2(\mathbb{R}^n_+)]_{1/2}$ puisqu'alors $\{f,o\} \in F_{\mathcal{B}}$, il existe $u \in L^2(0,\infty\ ;\ D(A)) \cap H^1(0,\infty\ ;\ L^2(\mathbb{R}^n_+))$ vérifiant $u\ (x,o) = f\ (x)$. Celà donne bien $f \in W^{m}_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\mathbb{R}^n_+)$.

Des propositions 4.3 et 4.4 on déduit que l'on a :

$$[W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega),\ L^2(\Omega)]_{1/2} = W^{m}_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\Omega) ,$$

et que, si le système $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=o}^{-\sigma-m-1}$ décrit en 1) est normal sur Γ, pour tous $\{u_o, g_j\}$ appartenant au sous-espace du produit $W^{m}_{\frac{\sigma}{2},\delta}(\Omega) \times \prod_{j=o}^{-\sigma-m-1} H^{\mu_j,\nu_j}(\Gamma \times]0,T[)$, $T > 0$, défini par :

$$\mathcal{R}\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \begin{cases} B_j u_o(x) = g_j(x,o) \quad \text{pour } x \in \Gamma,\ m_j < \frac{-\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ \int_o^T \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |B_j(\varphi_i u_o)(y',\tau^{-1/\sigma}) - (\varphi_i g_j)\ (y',\tau)|^2\ dy'\ \frac{d\tau}{\tau} < +\infty , \\ \text{si } -\sigma \text{ est impair et } m_j = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}, \text{ en coordonnées locales dans } O_i, \end{cases}$$

il existe $u \in L^2(0,T\ ;\ W^{2m}_{\sigma,\delta}(\Omega)) \cap H^1(0,T\ ;\ L^2(\Omega))$ vérifiant :

$$\begin{cases} u(o) = u_o \\ \mathcal{B}_j u = g_j \ \text{sur } \Gamma,\ j = 0,\dots,-\sigma-m-1 ; \end{cases}$$

Ceci, avec la résolubilité du problème homogène, démontre le théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] : M.S. AGRANOVICH - M.I. VISIK : Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. Russian Math. Surv. 19 (1964) 53-157

[2] : M.S. BAOUENDI : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Bull. Soc. Math. France, 95, 1967, p. 45-87

[3] : M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Applications. Journal of Functional analysis - 9 (1972) 208-248

[4] : P. BOLLEY - J. CAMUS : Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels. Bull. Un. Mat. Ital (5) 14B (1977), 77-100

[5] : P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER. Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 131-171.

[6] : P. GRISVARD : Caractérisation de quelques espaces d'interpolation. Archive for Rat. Mech. and Analysis vol 25, n° 1, 1967, p. 40-63

[7] : J.L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes - Dunod Paris

[8] : N. SHIMAKURA : Problèmes aux limites généraux de type elliptiques dégénérés. J. Math. Kyoto Univ. Vol 9 n° 2, 275-335 (1969)

[9] : H. TRIEBEL : Erzengung des nuklearen lokalkonvexen raumes $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ durch einen elliptishen differential operatoren zweiter ordnung. Math. Ann. 177, 247-264 (1968).

[10] : M.I. VISIK - V.V. GRUSIN : On a class of higher order degenerate elliptic equations. Math. USSR Sbornik vol 8 N° 1 (1969)