M. AMARA

J. M. THOMAS

Une méthode d'éléments finis équilibre pour le système de l'élasticité linéaire

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule S4
« Journées éléments finis », , p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___S4_A12_0>

UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ÉQUILIBRE POUR LE SYSTÈME DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

M. AMARA & J.M. THOMAS

1. LE SYSTEME DE L'ELASTICITE LINEAIRE BIDIMENSIONNELLE

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ lipschitzienne. Cette frontière Γ est décomposée sous la forme

$$\Gamma = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1$$

où Γ_0 et Γ_1 sont deux ouverts disjoints de Γ et $\Gamma_0 \neq \phi$. On note $\underset{\sim}{n} = (n_i)_{i=1,2}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à Ω en un point $x \in \Gamma$ et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$-variable, $i = 1,2$. La convention de sommation des indices répétés est systématiquement utilisée. Ainsi si $\underset{\sim}{q} = (q_i)_{i=1,2}$ est une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}^2$, $\partial_i q_i$ désigne la divergence de $\underset{\sim}{q}$ et $q_i n_i$ la trace normale de $\underset{\sim}{q}$ sur Γ. Enfin on notera $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ la norme hilbertienne de l'espace produit $\left(H^m(\Omega)\right)^N$, $N = 1,2$ ou 4.

Etant donné $\underset{\sim}{f} = (f_i)_{i=1,2}$ définie de Ω dans $\mathbb{R}^2$ et $\underset{\sim}{g} = (g_i)_{i=1,2}$ définie de Γ_1 dans $\mathbb{R}^2$, le système de l'élasticité linéaire bidimensionnelle consiste à trouver un champ de déplacements $\underset{\sim}{u} = (u_i)_{i=1,2}$, un champ de déformations $\underset{\approx}{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1,2}$ et un champ de contraintes $\underset{\approx}{\sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ solution de

(1.1) $$\underset{\sim}{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2 \; ; \; u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \; i = 1,2 \; ;$$

(1.2) $$\underset{\approx}{\varepsilon} : \Omega \to \mathbb{R}^4 \; ;$$

(1.3) $$\underset{\approx}{\sigma} : \Omega \to \mathbb{R}^4 \; ; \; \partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \; \sigma_{ij} n_j = g_i \text{ sur } \Gamma_1, \; i = 1,2 \; ;$$

ces champs étant liés par les relations

(1.4) $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \; i,j = 1,2 \quad (\text{"loi déplacements-déformations"})$$

(1.5) $$\sigma_{ij} = a_{ijk\ell}\, \varepsilon_{k\ell} \quad , \; i,j = 1,2 \quad (\text{"loi déformations-contraintes"})$$

Les coefficients d'élasticité $a_{ijk\ell}$, $i,j,k,\ell = 1,2$, sont bornés dans $L^\infty(\Omega)$, satisfont l'hypothèse d'ellipticité uniforme : il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour presque tout $x \in \Omega$

(1.6) $$\forall \underset{\approx}{\xi} \in \mathbb{R}^4 \quad a_{ijk\ell}(x)\xi_{ij}\xi_{k\ell} \geq \alpha\; \xi_{ij}\xi_{ij}$$

et ils vérifient les hypothèses de symétrie

(1.7) $$a_{ijk\ell} = a_{ji\ell k} = a_{k\ell ij}.$$

Les relations

(1.8) $$A_{ijk\ell}\, a_{k\ell mn} = \delta_{im}\, \delta_{jn}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon) définissent alors des coefficients $A_{ijk\ell}$ bornés dans $L^\infty(\Omega)$ qui satisfont l'hypothèse d'ellipticité uniforme et qui vérifient les hypothèses de symétrie

(1.9) $$A_{ijk\ell} = A_{ji\ell k} = A_{k\ell ij}.$$

A l'aide de ces coefficients $A_{ijk\ell}$, la loi déformations-contraintes (1.5) s'écrit

(1.10) $$\varepsilon_{ij} = A_{ijk\ell}\, \sigma_{k\ell},\ i,j = 1,2.$$

L'étude des déformations d'une plaque mince conduit à de tels problèmes. La justification mathématique du passage d'un modèle tridimensionnel à un modèle bidimensionnel a été donnée par Ciarlet & Destuynder [1]. Dans le cas d'une plaque mince homogène et isotrope, on a (cf. Landau & Lifchitz [2], Germain [3], par exemple) pour un "modèle déformations planes"

$$A_{ijk\ell} = \frac{1+\nu}{E}\ (\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \nu\ \delta_{ij}\delta_{k\ell})$$

et pour un "modèle contraintes planes"

$$A_{ijk\ell} = \frac{1+\nu}{E}\ (\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \frac{\nu}{1+\nu}\ \delta_{ij}\delta_{k\ell})$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. Pour des raisons physiques, on a

$$E>0 \quad \text{et} \quad 0<\nu<\frac{1}{2}$$

ce qui assure que les hypothèses générales d'ellipticité sont satisfaites dans ces cas particuliers.

Il sera utile de remarquer que si $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{\sigma})$ vérifient (1.4) et (1.5), le tenseur des déformations est symétrique : $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$. Les hypothèses $a_{ijk\ell} = a_{ji\ell k}$ impliquent que le tenseur des contraintes est symétrique : $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Supposons désormais $\underset{\sim}{f} \in (L^2(\Omega))^2$ et $\underset{\sim}{g} \in (L^2(\Gamma_1))^2$. Le champ de déplacements $\underset{\sim}{u}$ est solution du problème variationnel (primal)

$$(1.11)\left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{u} \in \mathbb{V}^\circ = \{\underset{\sim}{v} \in (H^1(\Omega))^2 \; ; \; v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \; i = 1,2\}. \\ \forall v \in \mathbb{V}^\circ, \; \frac{1}{4}\int_\Omega a_{ijk\ell}(\partial_k u_\ell + \partial_\ell u_k)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)\,dx = \int_\Omega f_i v_i\,dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i\,d\gamma \end{array}\right.$$

et le tenseur des contraintes $\underset{\sim}{\sigma}$ est solution du problème variationel (dual)

$$(1.12)\left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{\sigma} \in \mathbb{W}_s^{f,g} \\ \forall \underset{\sim}{\tau} \in \mathbb{W}_s^{\circ,\circ}, \; \int_\Omega A_{ijk\ell}\,\sigma_{k\ell}\tau_{ij}\,dx = 0 \end{array}\right.$$

où $\mathbb{W}_s^{f,g}$ est la variété affine fermée de $(L^2(\Omega))^4$ donnée par

$$(1.13) \qquad \mathbb{W}_s^{f,g} = \{\underset{\sim}{\tau} = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^4 ; \; \tau_{12} = \tau_{21} \; ; \\ \partial_j\tau_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \tau_{ij}n_j = g_i \text{ sur } \Gamma_1, \; i = 1,2\}$$

et où $\mathbb{W}_s^{\circ,\circ}$ est le sous-espace associé à cette variété. Dans (1.13), l'écriture $\tau_{ij}n_j = g_i$ sur Γ_1 est une abréviation agréable de

$$\forall v \in H^1(\Omega) \text{ avec } v|_{\Gamma_0} = 0, \; \langle \tau_{ij}n_j, v \rangle_\Gamma = \int_{\Gamma_1} g_i v\,d\gamma$$

où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ marque la dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ espace des traces normales des fonctions de $H\,(\mathrm{div};\Omega)$.

On démontre (cf. Duvaut & Lions [4]) le

<u>THEOREME 1.1</u>. <u>Pour tout</u> $\underset{\sim}{f} \in (L^2(\Omega))^2$ <u>et tout</u> $g \in (L^2(\Gamma_1))^2$,

1°) <u>le problème</u> (1.11) <u>admet une solution</u> $\underset{\sim}{u}$ <u>et une seule</u> ;

2°) <u>le problème</u> (1.12) <u>admet une solution</u> $\underset{\sim}{\sigma}$ <u>et une seule</u> ;

3°) <u>la solution</u> $\underset{\sim}{u}$ <u>de</u> (1.11) <u>et la solution</u> $\underset{\sim}{\sigma}$ <u>de</u> (1.12) <u>sont liées par la</u>

<u>relation d'extrémalité</u>

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijk\ell} (\partial_k u_\ell + \partial_\ell u_k).$$

Les hypothèses de symétrie $a_{ijk\ell} = a_{k\ell ij}$ permettent de caractériser les solutions de (1.11) et de (1.12) comme étant les solutions de problèmes de minimisation. Le problème de minimisation associé à (1.12) est connu en mécanique des solides sous le nom de "principe de l'énergie complémentaire".

2. DUALISATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE

Nous avons pour but de construire par une méthode d'éléments finis une approximation $\underset{\sim}{\sigma}_h$ de la solution $\underset{\sim}{\sigma}$ de (1.13). Pour faciliter cette construction future nous dualisons les équations d'équilibre : soit $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ une "triangulation" générale $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$, où les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ sont de frontière ∂K lipschitzienne et d'intérieurs disjoints 2 à 2 ; $\underset{\sim}{n}^{(K)}$ désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à K. Si v est une fonction définie sur Ω, nous notons $v^{(K)}$ sa restriction à K. Une fonction $\underset{\sim}{\sigma} = (\sigma_{ij}) \in (L^2(\Omega))^4$ appartient à la variété affine $\mathcal{W}_s^{f,g}$ si et seulement si on a

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{2.1}$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \partial_j \sigma_{ij}^{(K)} + f_i^{(K)} = 0 \qquad i = 1,2 \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, \quad \sigma_{ij}^{(K_1)} n_j^{(K_1)} + \sigma_{ij}^{(K_2)} n_j^{(K_2)} = 0 \text{ sur } \partial K_1 \cap \partial K_2, \quad i = 1,2 \\ \forall K_1 \in \mathcal{T}_h, \qquad \sigma_{ij}^{(K_1)} n_j^{(K_1)} = g_i \text{ sur } \partial K_1 \cap \Gamma_1 \,, \; i = 1,2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Selon la terminologie de F. De Veubeke [5], (2.1) traduit les "rotational equilibrium conditions" et (2.2)-(2.3) traduisent les "translational equilibrium conditions".

Commençons par une formulation où seul (2.1) sera dualisé : on introduit la variété affine fermée de $(L^2(\Omega))^4$ suivante

$$\mathcal{W}^{f,g} = \{\underset{\sim}{\tau} = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^4 ; \; \partial_j \tau_{ij} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \tau_{ij} n_j = g_i \text{ sur } \Gamma_1, \; i = 1,2\} \tag{2.4}$$

et soit $\mathcal{W}^{\circ,\circ}$ le sous-espace associé à cette variété affine. Soit $a(\cdot,\cdot)$ et $b_0(\cdot,\cdot)$ les formes bilinéaires définies respt. sur $(L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^4$ et sur $(L^2(\Omega))^4 \times L^2(\Omega)$ par

$$a(\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{\tau}) = \int_\Omega A_{ijk\ell}\, \sigma_{k\ell}\, \tau_{ij}\, dx \tag{2.5}$$

$$(2.6) \qquad b_0(\underset{\approx}{\tau},\theta) = \int_\Omega \theta(\tau_{21}-\tau_{12})dx.$$

THEOREME 2.1. Pour tout $\underset{\sim}{f} \in (L^2(\Omega))^2$ et tout $\underset{\sim}{g} \in (L^2(\Gamma_1))^2$, le problème

$$(2.7) \qquad \begin{cases} (\underset{\approx}{\sigma},\omega) \in \mathbb{W}^{f,g} \times L^2(\Omega) \;; \\ \forall \underset{\approx}{\tau} \in \mathbb{W}^{\circ,\circ}, \quad a(\underset{\approx}{\sigma},\underset{\approx}{\tau}) + b_0(\underset{\approx}{\tau},\omega) = 0 \\ \forall \theta \in L^2(\Omega), \qquad b_0(\underset{\approx}{\sigma},\theta) = 0 \end{cases}$$

admet une solution $(\underset{\approx}{\sigma},\omega)$ et une seule. En outre $\underset{\approx}{\sigma}$ est la solution de (1.12) et si $\underset{\sim}{u}$ est la solution de (1.11), on a

$$(2.8) \qquad \omega = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Démonstration. A toute fonction $\theta \in L^2(\Omega)$ nous associons la solution $\underset{\sim}{w}$ du problème variationnel auxiliaire

$$\begin{cases} \underset{\sim}{w} \in \mathbb{V}^\circ \;; \\ \forall \underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}^\circ, \; \frac{1}{4}\int_\Omega (\partial_i w_j + \partial_j w_i)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \theta(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2)dx \,. \end{cases}$$

L'inégalité de Korn (cf. Nečas [6], Duvaut-Lions [4]) implique l'existence d'une constante C_1 telle que

$$\|\underset{\sim}{w}\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|\theta\|_{0,\Omega}.$$

Soit alors $\underset{\approx}{\tau} = (\tau_{ij})$ défini par

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i w_j + \partial_j w_i) - \frac{1}{2}\theta e_{ij}$$

où $e = (e_{ij})$ est le tenseur antisymétrique fondamental : $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = 1$, $e_{21} = -1$. On a d'une part

$$\tau_{21}-\tau_{12} = \theta \qquad \text{donc} \qquad b_0(\underset{\approx}{\tau},\theta) = \|\theta\|^2_{0,\Omega}.$$

On vérifie d'autre part $\underset{\approx}{\tau} \in \mathbb{W}^{\circ,\circ}$ et on a la majoration

$$\|\underset{\approx}{\tau}\|^2_{0,\Omega} \leq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\|\partial_i w_j + \partial_j w_i\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\|\theta\|^2_{0,\Omega} \leq (\frac{1}{2} + 2C_1^2)\|\theta\|^2_{0,\Omega}.$$

Ceçi prouve l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que

$$(2.9) \qquad \forall \theta \in L^2(\Omega), \quad \sup_{\underset{\approx}{\tau} \in \mathbb{W}^{\circ,\circ}} \frac{b_0(\underset{\approx}{\tau},\theta)}{\|\underset{\approx}{\tau}\|_{0,\Omega}} \geqslant \beta \, \|\theta\|_{0,\Omega} \; .$$

L'existence et l'unicité de la solution $(\underset{\approx}{\sigma},\omega)$ du problème (3.7) résulte alors des théorèmes de point-selle de Babuska [7] - Brezzi [8]. Il est clair que $\underset{\approx}{\sigma}$ est la solution de (1.12). On vérifie aisément (2.8). ■

Nous passons à présent à la dualisation complète des équations d'équilibre (2.1)-(2.3). A la décomposition $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} K$, nous associons les espaces

$$(2.10) \quad \mathbb{X} = (X)^2 \; ; \; X = \{\underset{\sim}{q} = (q_j) \in (L^2(\Omega))^2 \; ; \; \partial_j q_j^{(K)} \in L^2(K) \text{ et } q_j^{(K)} n_j^{(K)} \in L^2(\partial K), \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}$$

$$(2.11) \quad \mathbb{M} = (M)^2 \; ; \; M = \{\psi \in \prod_{K \in \mathcal{C}_h} L^2(\partial K) \; ; \; \psi^{(K_1)} = \psi^{(K_2)} \text{ sur } \partial K_1 \cap \partial K_2, \; \forall K_1, K_2 \in \mathcal{C}_h \; ; \; \psi^{(K_1)} = 0 \text{ sur } \partial K_1 \cap \Gamma_0, \quad \forall K_1 \in \mathcal{C}_h\}.$$

Soit $b_1(\cdot,\cdot)$ et $b_2(\cdot,\cdot)$ les formes bilinéaires définies respt sur $\mathbb{X} \times (L^2(\Omega))^2$ et sur $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$ par

$$(2.12) \qquad b_1(\underset{\approx}{\tau},\underset{\sim}{v}) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K v_i^{(K)} \, \partial_j \tau_{ij}^{(K)} \, dx$$

$$(2.13) \qquad b_2(\underset{\approx}{\tau},\underset{\sim}{\psi}) = - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \psi_i^{(K)} \, \tau_{ij}^{(K)} \, n_j^{(K)} \, d\gamma.$$

On posera enfin

$$(2.14) \qquad \mathcal{M} = L^2(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \times \mathbb{M} \; ;$$

$$(2.15) \qquad b(\underset{\approx}{\tau};\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) = b_0(\underset{\approx}{\tau},\theta) + b_1(\underset{\approx}{\tau},\underset{\sim}{v}) + b_2(\underset{\approx}{\tau},\underset{\sim}{\psi})$$

$$(2.16) \qquad F(\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) = - \int_\Omega f_i v_i \, dx - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K \cap \Gamma_1} g_i \, \psi_i^{(K)} d\gamma.$$

<u>THEOREME 2.2</u>. <u>On suppose que la solution du problème</u> (1.12) <u>appartient à l'espace</u> $\mathbb{X}$. <u>Alors le problème</u>

$$(2.17) \begin{cases} (\underset{\approx}{\sigma};\omega,\underset{\sim}{u},\phi) \in \mathbb{X} \times \mathcal{M} \\ \forall \underset{\approx}{\tau} \in \mathbb{X}, \qquad a(\underset{\approx}{\sigma},\underset{\approx}{\tau}) + b(\underset{\approx}{\tau};\omega,\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\phi}) = 0 \\ \forall (\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) \in \mathcal{M}, \qquad b(\underset{\approx}{\sigma};\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) = F(\theta,v,\underset{\sim}{\psi}) \end{cases}$$

<u>admet une solution</u> $(\underset{\approx}{\sigma};\omega,\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\psi})$ <u>et une seule</u>. <u>Celle-ci est donnée par</u>

$$(2.18)\quad \begin{cases} \underset{\approx}{\sigma} = \underline{\text{la solution de}}\ (1.12)\ ;\ \underset{\sim}{u} = \underline{\text{la solution de}}\ (1.11)\ ; \\ \omega = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\ ;\ \underset{\sim}{\psi}^{(K)} = \underline{\text{la trace de}}\ \underset{\sim}{u}\ \underline{\text{sur}}\ \partial K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. Supposons $\underset{\sim}{f} = 0$ et $\underset{\approx}{g} = 0$. Le Théorème 2.1 implique alors $\underset{\approx}{\sigma} = 0$ et $\omega = 0$. Par suite le couple $(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\psi})$ vérifie

$$\forall \underset{\approx}{\tau} \in \mathcal{X}, \quad b_1(\underset{\approx}{\tau},\underset{\sim}{u}) + b_2(\underset{\approx}{\tau},\underset{\sim}{\psi}) = 0.$$

Ces relations se découplent en

$$\forall \underset{\sim}{q} \in X, \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left\{ \int_K u_i^{(K)} \partial_j q_j^{(K)} dx - \int_{\partial K} \psi_i^{(K)} q_j^{(K)} n_j^{(K)} d\gamma \right\} = 0 \qquad i = 1,2.$$

On en déduit, cf. Raviart & Thomas [9], $u_i = 0$ et $\psi_i = 0$ pour $i = 1,2$. Ceci démontre l'unicité de la solution de (2.17). En supposant que la solution de (1.12) appartient à $\mathcal{X}$ (hypothèse de régularité), on vérifie que (2.18) fournit une solution de (2.17), donc la solution. ■

3. METHODE D'ELEMENTS FINIS EQUILIBRE

Nous supposons pour simplifier le domaine $\overline{\Omega}$ polygonal. Soit $\mathcal{C}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ constituée de triangles K de diamètre $\leqslant$ h et telle que tout côté ouvert d'un triangle $K \in \mathcal{C}_h$ est contenu soit dans Ω, soit dans Γ_0, soit dans Γ_1.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, $P_k(K)$ (respt. $P_k(K')$, $P_k(\partial K)$) désigne l'espace des restrictions à K (respt. à K' côté de K, à ∂K bord de K) des polynômes de degré $\leqslant k$ et $S_k(\partial K)$ désigne l'espace des fonctions polynômiales de degré $\leqslant k$ sur chaque côté ouvert de K ; ainsi on a $P_k(\partial K) = S_k(\partial K) \cap \mathcal{C}^\circ(\partial K)$. Si χ_1, χ_2 et χ_3 désignent les coordonnées barycentriques relatives aux 3 sommets de K, on note $\overline{w}^{(K)} = \chi_1 \chi_2 \chi_3$, fonction bulle de $P_3(K)$.

Etant donné 2 entiers k et $\ell \geqslant 0$, on introduit l'espace $\sum_{k,\ell}(K)$ des fonctions $\underset{\approx}{\tau} = (\tau_{ij})$ de la forme

$$
(3.1) \quad \left\{
\begin{aligned}
\tau_{11} &= w_{11} + x_1 w_1 + \partial_2\left(\overline{w}^{(K)} \partial_1 w_0\right) \\
\tau_{12} &= w_{12} + x_2 w_1 - \partial_1\left(\overline{w}^{(K)} \partial_1 w_0\right) \\
\tau_{21} &= w_{21} + x_1 w_2 + \partial_2\left(\overline{w}^{(K)} \partial_2 w_0\right) \\
\tau_{22} &= w_{22} + x_2 w_2 - \partial_1\left(\overline{w}^{(K)} \partial_2 w_0\right)
\end{aligned}
\right.
$$

avec w_{ij}, $w_i \in P_k(K)$ pour $i,j = 1,2$ et $w_0 \in P_\ell(K)$.

Soit $Q_k(K)$ l'espace des fonctions $\underset{\sim}{q} = (q_j)$ de la forme

$$
(3.2) \qquad q_1 = v_1 + x_1 v_0 \quad ; \; q_2 = v_2 + x_2 v_0
$$

avec $v_i \in P_k(K)$, pour $i = 0,1,2$. On a $\sum_{k,\ell}(K) \supset (Q_k(K))^2$ et $\sum_{k,\ell}(K) = (Q_k(K))^2$ dès que $\ell \leqslant k-1$. On pourra donc toujours supposer

$$
(3.3) \qquad \ell \geqslant k-1 .
$$

D'après Raviart & Thomas [10], Thomas [11], l'application $\underset{\sim}{q} \rightarrow \partial_j q_j$ est surjective de $Q_k(K)$ sur $P_k(K)$ et l'application $\underset{\sim}{q} \rightarrow q_j\, n_j^{(K)}$ est surjective de $Q_k(K)$ sur $S_k(\partial K)$. On en déduit que pour tout k et $\ell \geqslant 0$, l'application

$\underset{\approx}{\tau} \to (\partial_j\tau_{ij})_{i=1,2}$ est surjective de $\Sigma_{k,\ell}(K)$ sur $(P_k(K))^2$ et l'application $\underset{\approx}{\tau} \to \left(\tau_{ij}n_j^{(K)}\right)_{i=1,2}$ est surjective de $\Sigma_{k,\ell}(K)$ sur $(S_k(\partial K))^2$.

LEMME 3.1. On suppose $k \geq 1$. Alors pour tout triplet $(\theta, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{\psi})$ $\in P_\ell(K)\times(P_k(K))^2\times(S_k(\partial K))^2$ qui vérifie

$$\forall \underset{\approx}{\tau} \in \Sigma_{k,\ell}(K), \quad \int_K \theta(\tau_{21}-\tau_{12})dx + \int_K v_i\partial_j\tau_{ij}dx - \int_{\partial K}\psi_i\tau_{ij}n_j^{(K)}d\gamma = 0 \tag{3.4}$$

il existe trois constantes a_0, a_1 et a_2 telles que

$$\begin{cases} v_1 = -a_0x_2 + a_1, \quad v_2 = a_0x_1 + a_2 & \text{dans } K \\ \psi_i = \text{trace de } v_i \text{ sur } \partial K, \quad i = 1,2 & \\ \theta = \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = a_0 & \text{dans } K\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Démonstration. La fonction $\underset{\approx}{\tau}$ définie par

$$\tau_{i1} = \partial_2\left(\bar{w}^{(K)}\partial_i\theta\right), \quad \tau_{i2} = -\partial_1\left(\bar{w}^{(K)}\partial_i\theta\right), \qquad i = 1,2$$

appartient à l'espace $\Sigma_{k,\ell}(K)$. En reportant ce choix de $\underset{\approx}{\tau}$ dans (3.4), nous obtenons

$$\int_K \theta\left[\partial_2\left(\bar{w}^{(K)}\partial_2\theta\right) + \partial_1\left(\bar{w}^{(K)}\partial_1\theta\right)\right]dx = 0$$

soit par intégration par parties

$$\int_K \bar{w}^{(K)}\left[(\partial_1\theta)^2 + (\partial_2\theta)^2\right]dx = 0.$$

Ceci prouve $\underset{\sim}{\text{grad}}\,\theta = 0$; il existe une constante a_0 telle que $\theta = a_0$ dans K.

A l'aide des identités

$$\int_K \tau_{12}\,dx = -\int_K x_2\partial_j\tau_{1j}\,dx + \int_{\partial K} x_2\tau_{1j}\,n_j^{(K)}\,d\gamma$$

$$\int_K \tau_{21}\,dx = -\int_K x_1\partial_j\tau_{2j}\,dx + \int_{\partial K} x_1\tau_{2j}\,n_j^{(K)}\,d\gamma$$

le système (3.4) s'écrit lorsque $\theta = a_0$

$$\forall \underset{\approx}{\tau} \in \Sigma_{k,\ell}(K), \quad \int_K v_i^\star\,\partial_j\tau_{ij}\,dx - \int_{\partial K}\psi_i^\star\tau_{ij}\,n_j^{(K)}d\gamma = 0$$

avec

(3.6) $\quad \overset{\star}{v}_1 = v_1 + a_0 x_2, \quad \overset{\star}{v}_2 = v_2 - a_0 x_1, \quad \overset{\star}{\psi}_1 = \psi_1 + a_0 x_2$ et $\overset{\star}{\psi}_2 = \psi_2 - a_0 x_2$.

On en déduit pour $i = 1,2$

(3.7) $$\forall \underset{\approx}{q} \in Q_k(K), \quad \int_K \overset{\star}{v}_i \, \partial_j q_j \, dx - \int_{\partial K} \overset{\star}{\psi}_i \, q_j n_j^{(K)} d\gamma = 0.$$

L'hypothèse $k \geqslant 1$ implique

(3.8) $$\overset{\star}{v}_i \in P_k(K), \quad \overset{\star}{\psi}_i \in S_k(\partial K)$$

D'après Raviart & Thomas [9], (3.7) et (3.8) entraînent l'existence de constantes a_i, $i = 1,2$, telles que

$$\overset{\star}{v}_i = a_i \text{ dans } K, \quad \overset{\star}{\psi}_i = a_i \text{ sur } \partial K$$

ce qui démontre le Lemme 4.1. ∎

Pour construire une approximation de la solution de (2.17), on introduit les espaces

(3.9) $$\mathcal{X}_h = \{\underset{\approx}{\tau} \in \mathcal{X} \; ; \; \underset{\approx}{\tau}^{(K)} \in \Sigma_{k,\ell}(K), \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}$$

(3.10) $$\mathcal{M}_h = \{(\theta, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{\psi}) \in \mathcal{M}; \; \theta^{(K)} \in P_\ell(K), \; \underset{\sim}{v}^{(K)} \in (P_k(K))^2 \text{ et } \underset{\sim}{\psi}^{(K)} \in (S_k(\partial K))^2, \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}.$$

<u>THEOREME 3.1</u>. <u>Pour tout entier</u> $k \geqslant 1$, <u>le problème</u>

(3.11) $$\begin{cases} (\underset{\approx}{\sigma}_h ; \omega_h, \underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{\phi}_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{M}_h \; ; \\ \forall \underset{\approx}{\tau} \in \mathcal{X}_h, \quad a(\underset{\approx}{\sigma}_h, \underset{\approx}{\tau}) + b(\underset{\approx}{\tau}; \omega_h, \underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{\phi}_h) = 0 \\ \forall (\theta, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{\psi}) \in \mathcal{M}_h, \quad b(\underset{\approx}{\sigma}_h ; \theta, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{\psi}) = F(\theta, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{\psi}) \end{cases}$$

<u>admet une solution</u> $(\underset{\approx}{\sigma}_h ; \omega_h, \underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{\phi}_h)$ <u>et une seule</u>.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de vérifier que le problème homogène admet pour unique solution la solution triviale. Supposons donc $F = 0$. On a alors $a(\underset{\approx}{\sigma}_h, \underset{\approx}{\sigma}_h) = 0$ d'où $\underset{\approx}{\sigma}_h = 0$ et $b(\underset{\approx}{\tau}; \omega_h, \underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{\phi}_h) = 0$ pour tout $\underset{\approx}{\tau} \in \mathcal{X}_h$.

Nous en déduisons d'après le Lemme 3.1 l'existence de constantes $a_{o,K}$, $a_{1,K}$ et $a_{2,K}$ telles que

$$\omega_h^{(K)} = a_{o,K},\ u_{h1}^{(K)} = -a_{0,K}x_2 + a_{1,K},\ u_{h2}^{(K)} = +a_{o,K}x_1 + a_{2,K} \text{ dans } K$$

$$\phi_{h1}^{(K)} = -a_{o,K}x_2 + a_{1,K},\ \phi_{h2}^{(K)} = +a_{o,K}x_1 + a_{2,K} \text{ sur } \partial K.$$

L'appartenance de $\underset{\sim}{\phi}_h$ au sous-espace $\mathbb{M}_h$ de $\mathbb{M}$ implique

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad a_{o,K} = a_{1,K} = a_{2,K} = 0. \qquad \blacksquare$$

<u>COROLLAIRE 3.1. Soit $\mathbb{W}_{sh}^{f,g}$ la variété affine définie par</u>

(3.12) $\mathbb{W}_{sh}^{f,g} = \{\underset{\approx}{\tau} \in \mathbb{X}_h \ ;\ \forall(\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) \in \mathcal{M}_h,\ b(\underset{\approx}{\tau};\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) = F(\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi})\}.$

<u>et soit $\mathbb{W}_{sh}^{o,o}$ le sous-espace vectoriel associé. Pour tout entier</u> $k \geq 1$, <u>le problème</u>

$$(3.13)\quad \begin{cases} \underset{\approx}{\sigma}_h \in \mathbb{W}_{sh}^{f,g} \ ; \\ \forall \underset{\approx}{\tau} \in \mathbb{W}_{sh}^{o,o} \quad a(\underset{\approx}{\sigma}_h,\underset{\approx}{\tau}) = 0 \end{cases}$$

<u>admet une solution $\underset{\approx}{\sigma}_h$ et une seule.</u>

Soit $\underset{\sim}{f}_h \in (L^2(\Omega))^2$ la fonction dont la restriction $\underset{\sim}{f}_h^{(K)}$ à tout $K \in \mathcal{T}_h$ est la L^2-projection de $\underset{\sim}{f}^{(K)}$ sur $(P_k(K))^2$ et soit $\underset{\sim}{g}_h \in (L^2(\Gamma_1))^2$ la fonction dont la restriction $\underset{\sim}{g}_h^{(K')}$ à tout côté $K' \subset \Gamma_1$ d'un triangle $K \in \mathcal{T}_h$ est la L^2-projection de $g^{(K')}$ sur $(P_k(K'))^2$. La solution $\underset{\approx}{\sigma}_h$ de (3.13) vérifie

$$(3.14)\quad \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \forall \theta \in P_k(K),\ \int_K \theta(\sigma_{h12} - \sigma_{h21})\,dx = 0$$

$$(3.15)\quad \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \partial_j\,\sigma_{hij}^{(K)} + f_{hi}^{(K)} = 0, \quad i = 1,2$$

$$(3.16)\quad \begin{cases} \forall K_1,K_2 \in \mathcal{T}_h,\ \sigma_{hij}^{(K_1)} n_j^{(K_1)} + \sigma_{hij}^{(K_2)} n_j^{(K_2)} = 0, \text{ sur } \partial K_1 \cap \partial K_2,\ i = 1,2 \\ \forall K_1 \in \mathcal{T}_h \ ,\ \sigma_{hij}^{(K_1)} n_j^{(K_1)} = g_{hi} \quad \text{sur } \partial K_1 \cap \Gamma_1,\ i = 1,2. \end{cases}$$

En général, on a $\sigma_{h12} \neq \sigma_{h21}$. $\blacksquare$

Majorations d'erreur

On suppose désormais $k \geq 1$: $\underset{\approx}{\sigma}_h$ est la solution de (3.13) et $(\underset{\approx}{\sigma};\omega,\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{\phi})$ la solution de (2.17). On pose

$$(3.17) \qquad \Theta_h = \{\theta \in L^2(\Omega) \; ; \quad \theta^{(K)} \in P_\ell(K), \quad \forall K \in \mathcal{C}_h\}$$

LEMME 3.2. Il existe une constante C, indépendante de h, telle que

$$(3.18) \qquad \|\underset{\approx}{\sigma}-\underset{\approx}{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq C\{ \inf_{\underset{\approx}{\tau}_h \in \mathbb{W}^{fg}_{sh}} \|\underset{\approx}{\sigma}-\underset{\approx}{\tau}_h\|_{0,\Omega} + \inf_{\theta_h \in \Theta_h} \|\omega-\theta_h\|_{0,\Omega}\} .$$

Démonstration. D'après un théorème général d'approximation de point-selle (cf. [11, Th. I.3.1]) on a

$$\|\underset{\approx}{\sigma}-\underset{\approx}{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq C\{ \inf_{\underset{\approx}{\tau}_h \in \mathbb{W}^{fg}_{sh}} \|\underset{\approx}{\sigma}-\underset{\approx}{\tau}_h\|_{0,\Omega} +$$

$$+ \inf_{(\theta_h,\underset{\sim}{v}_h,\underset{\sim}{\psi}_h) \in \mathcal{M}_h} \; \sup_{\underset{\approx}{\tau}_h \in \overset{\circ\circ}{\mathbb{W}}_{sh}} \frac{|b(\underset{\approx}{\tau}_h;\omega-\theta_h,\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{v}_h,\underset{\sim}{\phi}-\underset{\sim}{\psi}_h)|}{\|\underset{\approx}{\tau}_h\|_{0,\Omega}}$$

Pour tout $\underset{\approx}{\tau}_h \in \overset{\circ\circ}{\mathbb{W}}_{sh}$ et tout $(\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi}) \in \mathcal{M}_0$, on a ici

$$|b(\underset{\approx}{\tau}_h;\theta,\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{\psi})| = |b_0(\underset{\approx}{\tau}_h,\theta)| \leq \sqrt{2}\, \|\theta\|_{0,\Omega} \, \|\underset{\approx}{\tau}\|_{0,\Omega}$$

d'où (3.18). ∎

THEOREME 3.2. On suppose les angles des triangles K de la triangulation $\mathcal{C}_h$ minorés indépendamment de h. Alors il existe une constante C, indépendante de h, telle que si $\underset{\approx}{\sigma} \in (H^r(\Omega))^4$ et si $\underset{\sim}{u} \in (H^{r+1}(\Omega))^2$ pour un entier r vérifiant

$$(3.19) \qquad 1 \leq r \leq 1+\mathrm{Min}(k,\ell)$$

on a

$$(3.20) \qquad \|\underset{\approx}{\sigma}-\underset{\approx}{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^r\{\|\underset{\approx}{\sigma}\|_{r,\Omega} + \|\underset{\sim}{u}\|_{r+1,\Omega}\}$$

Démonstration. Puisque $\Sigma_{k,\ell}(K) \supset (Q_k(K))^2$ pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on a d'après [10] [11], les angles de la triangulation étant minorés indépendamment de h :

$$(3.21) \qquad \inf_{\underset{\approx}{\tau}_h \in \mathbb{W}_{sh}^{fg}} \| \underset{\approx}{g} - \underset{\approx}{\tau}_h \|_{0,\Omega} \leq Ch^r \| \underset{\approx}{g} \|_{r,\Omega}, \quad 1 \leq r \leq k+1.$$

D'autre part, on a de façon standard

$$(3.22) \qquad \inf_{\theta_h \in \Theta_h} \| \omega - \theta_h \|_{0,\Omega} \leq Ch^r \| \omega \|_{r,\Omega}, \quad 0 \leq r \leq \ell+1$$

Le Théorème 3.2 résulte alors de (3.18), (3.21), (3.22) et (2.8) ■

Il sera donc intéressant de choisir $\ell = k$. Pour la mise en oeuvre de telles méthodes et des exemples numériques, cf. Amara [12]. On trouvera également dans [12] des majorations d'erreur sur les multiplicateurs. ■

4. ANALOGIE AVEC LE PROBLEME DE STOKES

Plaçons-nous dans le cas particulier suivant :

i/ $$\underset{\sim}{f} = 0$$

ii/ le tenseur des coefficients $(a_{ijk\ell})$ est diagonal : $(a_{ijk\ell}) = \nu \mathrm{Id}$.

iii/ l'ouvert Ω est simplement connexe et Γ_1 est d'intérieur non vide.

Soit $\underset{\sim}{G} \in (H^{1/2}(\Gamma_1))^2$ une fonction telle que

$$g_i = t_j\, \partial_j G_i \qquad i = 1,2 \tag{4.1}$$

où $\underset{\sim}{t} = (t_j)$ est le vecteur unitaire tangent le long de Γ. On note Z^G la variété affine

$$Z^G = \{\underset{\sim}{z} \in (H^1(\Omega))^2 \;;\; \underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{G} \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{4.2}$$

et Z° le sous-espace vectoriel associé.

Une fonction $\underset{\approx}{\sigma}$ appartient à $\mathbb{W}^{o,g}$ si et seulement si il existe une fonction $\underset{\sim}{y} \in Z^G$, définie de façon unique, telle que

$$\sigma_{i1} = \partial_2 y_i, \quad \sigma_{i2} = -\partial_1 y_i, \qquad i = 1,2. \tag{4.3}$$

Avec ce changement d'inconnues, on vérifie que le problème (2.7) s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} (\underset{\sim}{y},\omega) \in Z^G \times L^2(\Omega) \\ \forall \underset{\sim}{z} \in Z^\circ, \quad \nu \displaystyle\int_\Omega (\partial_j y_i)(\partial_j z_i)\,dx + \int_\Omega \omega\, \partial_j z_j\, dx = 0 \\ \forall \theta \in L^2(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \theta\, \partial_j y_j\, dx = 0 \end{array}\right. \tag{4.4}$$

On reconnait en (4.4) une formulation classique du problème de Stokes (cf. [13] [14] par exemple) où $\underset{\sim}{y}$ représente la vitesse et ω la pression.

Introduisons l'espace $Z_{k+1,\ell}(K)$ des fonctions $\underset{\sim}{z}$ de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = w_1 + \overline{w}^{(K)}\partial_1 w_0 \\ z_2 = w_2 + \overline{w}^{(K)}\partial_2 w_0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

avec w_1, $w_2 \in P_{k+1}(K)$ et $w_0 \in P_\ell(K)$ et soit

$$Z_h^G = \{\underset{\sim}{z} \in Z^{G_h} \ ; \ \underset{\sim}{z}^{(K)} \in Z_{k+1,\ell}(K), \ \forall K \in \mathcal{C}_h\} \tag{4.6}$$

où $\underset{\sim}{G}_h$ est une projection de $\underset{\sim}{G}$. Du point de vue théorique, la méthode d'éléments finis construite au paragraphe précédent consiste à résoudre

$$\begin{cases} & (\underset{\sim}{y}_h, \omega_h) \in Z_h^G \times \Theta_h \ ; \\ \forall \underset{\sim}{z} \in Z_h^\circ, & \nu \int_\Omega (\partial_j y_{hi})(\partial_j z_i) dx + \int_\Omega \omega_h \, \partial_j z_j \, dx = 0 \\ \forall \theta \in \Theta_h, & \int_\Omega \theta \, \partial_j y_{hj} \, dx = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Pour $k = 1$ et $\ell = 0$, on retrouve le schéma d'ordre 1 de Fortin [15], pour $k = 1$ et $\ell = 1$, on retrouve le schéma bulle, qui est d'ordre 2, de Crouzeix-Raviart [16]. ∎

R E F E R E N C E S

[1] P.G. CIARLET & P. DESTUYNDER
"A justification of the two-dimensional linear plate model"
Rapport Laboratoire d'Analyse Numérique, L.A. 189, n°77020
(à paraitre).

[2] L. LANDEAU & LIFCHITZ
"Theorie de l'Elasticité", Mir. Moscou, 1967.

[3] P. GERMAIN
"Mécanique des milieux continus", Masson, Paris, 1962.

[4] G. DUVAUT & J.L. LIONS
"Les inéquations en Mécanique et en Physique", Dunod, Paris, 1972.

[5] B. FRAEIJS DE VEUBEKE
"Stress function approach", World Congress in finite element method in structural mechanic, Bornemouth, 1975.

[6] J. NECAS
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson, Paris, 1967.

[7] I. BABUSKA
"Error Bounds for finite element method", Numer. Math., 16 (1971), 322-333.

[8] F. BREZZI
"On the existence, uniqueness and approximations of saddle-point problems arising from Lagrangian Multipliers", R.A.I.R.O., R2, (1974), 129-151.

[9] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS
"Dual finite element models for 2nd order elliptic problems", Commemoration volume for B. Fraejs De Veubeke, Edit., W.Rodin, R.Glowinski and O.C. Zienkiewicz, 1978.

[10] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS
"Mixed finite element methods for 2nd order elliptic problems"
Proc. of the Symposium on the Math. Aspects of the F.E.M., Rome, Dec 1975, Lectures Notes in Math., Springer.

[11] J.M. THOMAS
Thèse, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1977.

[12] M. AMARA (A paraitre).

[13] R. TEMAM
"Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis", North-Holland, Amsterdam, 1977.

[14] P.A. RAVIART
Cours de D.E.A., 1977-78, Univ. P. & M. Curie, Paris (à paraitre).

[15] M. FORTIN
Thèse, Univ. de Paris VI, Paris, 1972.

[16] M. CROUZEIX & P.A. RAVIART
"Conforming and nonconforming F.E.M. for solving the stationary Stokes equations", R.A.I.R.O., R3, (1973), 33-75.