J. JACOD

J. MEMIN

Un nouveau critère de compacité relative pour une suite de processus

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 4, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979___1_A4_0>

UN NOUVEAU CRITERE DE COMPACITE RELATIVE POUR UNE SUITE DE PROCESSUS

J. JACOD et J. MEMIN

1 - INTRODUCTION

Soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continus à droite et pourvus de limites à gauche. On connait (voir par exemple Billingsley [3]) diverses conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $(\mathcal{L}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ des lois des processus X^n soit relativement compacte, pour la topologie de la convergence étroite des mesures sur l'espace $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de Skorokhod: cf. les rappels ci-après. Cependant, ces conditions se révèlent souvent difficiles à exploiter telles quelles.

Récemment, Aldous [1] a proposé une condition suffisante (voir aussi Billingsley [4] pour des résultats un peu du même type), beaucoup plus maniable, et cette condition a été exploitée par Rebolledo [12],[13] lorsque les X^n sont des martingales ou des semimartingales: l'intérêt essentiel en est qu'elle s'exprime alors de manière simple en fonction des caractérisitiques locales des X^n (retrouvant ainsi des résultats antérieurs, un peu moins généraux, de Grigelionis [5]); voir également Métivier [10] pour un exposé complet et simple sur la condition d'Aldous et ses applications. Malheureusement, cette condition est restrictive dans la mesure où elle entraine que les points d'accumulation de la suite $(\mathcal{L}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ sont des lois de processus quasi-continus à gauche par rapport à leur filtration naturelle.

Nous proposons ici une condition du même type, qui a l'avantage d'englober le cas "non quasi-continu à gauche". Cette condition, qui n'est toutefois pas comparable à celle d'Aldous, est assez compliquée et n'est énoncée et démontrée que dans la partie 4. Auparavant, dans la partie 2 nous appliquons cette condition aux semimartingales, ce qui donne des énoncés relativement simples.

Enfin dans la partie 3, nous étudions les processus croissants du point de vue de la convergence de Skoroknod. Nous redémontrons aussi un résultat simple sur les processus ponctuels, un peu en dehors du sujet, à savoir: la convergence fini-dimensionnelle d'une suite $(N^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus ponctuels vers un processus ponctuel N^∞ entraine la convergence en loi de N^n vers N^∞ ; ce résultat figure déjà dans Straf [14].

C'est J.B. Gravereaux qui a attiré notre attention sur la possibilité d'étendre la méthode d'Aldous au cas non-quasi-continu à gauche: nous l'en remercions.

Enfin, pour terminer cette introduction, rappelons quelques résultats généraux sur la compacité relative. Nous considérons une suite $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,P^n)$ d'espaces probabilisés, munis de processus X^n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche. On note $\mathcal{L}(X^n)$ la loi de X^n, c'est-à-dire l'image de P^n par l'application X^n, sur l'espace $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ des fonctions : $[0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^d$ continues à droite et pourvues de limites à gauche. On munit $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ de la topologie de Skorokhod, ce qui en fait un espace polonais (voir Billingsley [3] qui traite le cas où l'intervalle des temps est $[0,1]$, et Stone [15] ou Lindvall [9] pour l'extension, facile, au cas où l'intervalle des temps est $[0,\infty[$). Enfin l'espace des probabilités sur $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ muni de ses borélien est aussi un espace polonais, pour la convergence étroite des mesures.

Si $\theta>0$, $N>0$, on note $\mathcal{T}(N,\theta)$ l'ensemble des subdivisions $0=t_0<t_1<\dots<t_p=N$ de $[0,N]$ telles que $t_i-t_{i-1}\geq\theta$ pour $1\leq i\leq p-1$ (on peut avoir $t_p-t_{p-1}<\theta$). Si $f\in D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$, on pose

$$(1.1)\qquad w^N(f,\theta) = \inf_{\{t_i\}\in\mathcal{T}(N,\theta)} \max_{(i)} \sup_{t_i\leq s\leq t<t_{i+1}} |f(t)-f(s)| .$$

On rappelle alors le critère suivant de relative compacité (dérivé du critère de Prokhorov):

(1.2) THEOREME: <u>Pour que la suite</u> $(\mathcal{L}(X^n):n\in\mathbb{N})$ <u>soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'on ait</u>:

(i) $\forall N>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists a>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}: n\geq n_0 \Longrightarrow P^n(\sup_{s\leq N}|X^n_s|>a)\leq\varepsilon$.

(ii) $\forall N>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists\theta>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\geq n_0 \longrightarrow P^n(w^N(X^n,\theta)>\eta)\leq\varepsilon$.

Nous allons donner une première application, immédiate, de ce critère. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$ on considère deux processus croissants A^n et B^n sur $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,P^n)$: "processus croissant" signifie à valeurs dans $[0,\infty[$, et à trajectoires croissantes et continues à droite. On dit que A^n

jore fortement B^n, et on écrit $B^n \overset{f}{\ll} A^n$, si le processus $A^n - B^n$ t lui-même croissant.

.3) COROLLAIRE: Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit A^n et B^n des processus oissants sur $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, P^n)$ tels que $B^n \overset{f}{\ll} A^n$. La relative compacité $(\mathcal{L}(A^n) : n \in \mathbb{N})$ entraine celle de $(\mathcal{L}(B^n) : n \in \mathbb{N})$.

monstration: Immédiate, une fois remarqué que $\sup_{s \leq N} B^n_s \leq \sup_{s \leq N} A^n_s$ que $w^N(B^n, \theta) \leq w^N(A^n, \theta)$. ∎

MARQUE: Le même résultat reste vrai si B^n n'est pas croissant, mais écrit $B^n = C^n - D^n$ où C^n et D^n sont deux processus croissants forment majorés par A^n, car $w^N(B^n, \theta) \leq 2\, w^N(A^n, \theta)$. ∎

- CRITERE DE COMPACITE RELATIVE POUR LES SEMIMARTINGALES

- Semimartingales à sauts localement de carré intégrable. Pour chaque $\in \mathbb{N}$ on considère un espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, \underline{F}^n = (\underline{\underline{F}}^n_t)_{t \geq 0}, P^n)$ ni d'une semimartingale d-dimensionnelle $X^n = (X^{n,i})_{i \leq d}$.

Dans ce paragraphe on suppose que X^n est à sauts localement de rré intégrable, ce qui revient à dire que X^n est une semimartingale éciale de décomposition canonique

$$X^n = X^n_0 + M^n + A^n, \tag{.1}$$

M^n est une martingale d-dimensionnelle localement de carré intégrae, et A^n est un processus prévisible d-dimensionnel à variation finie f. [6] ou [11] pour tout ce qui concerne les martingales et semimartinles). On note $V(A^{n,i})$ le "processus variation" de $A^{n,i}$, et on pose

$$F^n = \sum_{i \leq d} [\langle M^{n,i}, M^{n,i} \rangle + V(A^{n,i})]. \tag{.2}$$

est ainsi un processus croissant $\underline{F}^n$-prévisible.

Avant d'énoncer le critère de compacité relative, nous devons introire pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un second processus croissant $\underline{F}^n$-prévisible G^n i majore fortement F^n (et qui peut éventuellement lui être égal). s processus sont supposés vérifier l'une des conditions suivantes.

.3) $\mathcal{L}(G^n)$ converge vers la loi $\mathcal{L}(G^\infty)$ d'un processus croissant G^∞ continu.

(2.4) $\mathcal{L}(G^n)$ converge vers la loi $\mathcal{L}(G^\infty)$ d'un processus croissant G^∞ <u>déterministe</u>.

(2.5) Il existe une fonction (déterministe) G^∞ croissante et une partie dense D de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, telles que pour tout $t \in D$ les variables G^n_t et $\sum_{0<s\leq t}(\Delta G^n_s)^2$ convergent en loi, vers G^∞_t et $\sum_{0<s\leq t}(\Delta G^\infty_s)^2$ respectivement.

(2.6) Les espaces probabilisés $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,P^n)$ sont tous égaux à un même espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ (les filtrations $\underline{\underline{F}}^n$ peuvent être différentes), muni d'un processus croissant G^∞ vérifiant:
(i) G^∞ est prévisible relativement à la filtration $\underline{\underline{F}}^\infty_t = \bigcap_{(n)} \underline{\underline{F}}^n_t$,
(ii) G^n tend vers G^∞ en probabilité, pour la topologie de Skorokhod (ce qui veut dire que si δ est une distance compatible avec cette topologie, on a $\delta(G^n,G^\infty) \longrightarrow 0$ en probabilité).

(2.7) C'est la même condition que (2.6), avec (ii) remplacé par:
(ii') il existe une partie dense D de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, telle que pour tout $t \in D$ les variables G^n_t et $\sum_{0<s\leq t}(\Delta G^n_s)^2$ convergent en probabilité vers G^∞_t et $\sum_{0<s\leq t}(\Delta G^\infty_s)^2$ respectivement.

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant, qui sera démontré dans la partie 4. On y suppose que les X^n sont de la forme (2.1) et que les F^n sont définis par (2.2).

(2.8) THEOREME: <u>Si on a</u>:
(i) <u>la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(X^n_0) : n \in \mathbb{N})$ <u>sur</u> $\mathbb{R}^d$ <u>est relativement compacte</u>,
(ii) <u>il existe des processus croissants</u> $\underline{F}^n$<u>-prévisibles</u> G^n <u>majorant fortement</u> F^n <u>et vérifiant l'une des conditions (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), ou (2.7)</u>,
<u>alors la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(X^n) : n \in \mathbb{N})$ <u>sur</u> $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ <u>est relativement compacte</u>.

Le lecteur remarquera que ces hypothèses impliquent, a-fortiori, que les suites de lois $(\mathcal{L}(M^n) : n \in \mathbb{N})$ et $(\mathcal{L}(A^n) : n \in \mathbb{N})$ sont relativement compacte. Ce résultat, lorsque dans (2.8,ii) on utilise la condition (2.3), est dû à Rebolledo; il n'y a d'ailleurs pas besoin, dans ce cas, de la $\underline{F}^n$-prévisibilité de G^n.

(2.9) REMARQUES: 1) Les conditions (2.4) et (2.5) (resp. (2.6) et (2.7)) semblent à première vue très différentes. Nous verrons cependant dans la partie 3 les équivalences: (2.4)$\Longleftrightarrow$(2.5), et: (2.6)$\Longleftrightarrow$(2.7).

2) Supposons qu'on ait (2.5), et soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$ le produit tensoriel des espaces filtrés $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,\underline{F}^n,P^n)$, défini par $\Omega = \prod \Omega^n$, $\underline{\underline{F}} = \otimes \underline{\underline{F}}^n$, $\underline{\underline{F}}_t = \bigcap_{s>t} (\otimes \underline{\underline{F}}^n_s)$, $P = \otimes P^n$. On peut considérer que X^n, F^n, G^n, sont définis sur Ω. Comme dans (2.5) les diverses limites sont déterministes, la convergence en loi est aussi une convergence en probabilité. On a donc en fait les implications: (2.4)$\Longleftrightarrow$(2.5)$\Longrightarrow$(2.6)$\Longleftrightarrow$(2.7). ∎

(2.10) REMARQUE: Bien-sûr la conclusion du théorème est satisfaite dès qu'on a (2.8,ii) avec $G^n = F^n$. Cependant, contrairement aux apparences, l'introduction des processus G^n nous donne un critère plus maniable. Par exemple, il se peut que tous les processus F^n soient fortement majorés par une même fonction (déterministe) croissante, ce qui est une hypothèse facile à tester: on a alors (2.8,ii), bien que les F^n puissent ne vérifier aucune des conditions (2.3) à (2.7) ! ∎

(2.11) REMARQUE: Le critère (2.8) est bien-sûr loin d'être une condition nécessaire. Nous verrons dans la partie 4 des conditions plus faibles que (2.8,ii), et assurant encore la compacité relative; mais il s'agit de conditions compliquées, sans doute invérifiables dans la pratique. ∎

On obtient aussi une généralisation immédiate de (2.8) en utilisant un principe de sous-suites: en effet, pour que la suite $(\mathcal{L}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que de toute sous-suite infinie $\mathbb{N}_0$ de $\mathbb{N}$ on puisse extraire une sous-sous-suite infinie $\mathbb{N}_1$ telle que la suite $(\mathcal{L}(X^n) : n\in\mathbb{N}_1)$ soit relativement compacte. Il vient alors:

(2.12) COROLLAIRE: <u>Si on a (2.8.i) et si de toute sous-suite infinie</u> $\mathbb{N}_0$ <u>on peut extraire une sous-sous-suite infinie</u> $\mathbb{N}_1$ <u>pour laquelle on ait (2.8,ii), alors la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ <u>est relativement compacte</u>.

En particulier, lorsque dans (2.8,ii) on utilise la condition (2.3), on obtient un résultat très simple (et connu: [10], [13]).

(2.13) COROLLAIRE: <u>Supposons qu'on ait (2.8,i) et que la suite</u> $(\mathcal{L}(F^n) : n\in\mathbb{N})$ <u>soit relativement compacte et n'admette pour points d'accumulation que des lois de processus continus. Alors, la suite</u>

$(\mathcal{A}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ est relativement compacte.

Remarquer que dans cet énoncé on fait intervenir directement les processus F^n ; en effet il est équivalent d'après (1.3) d'imposer la relative compacité de $(\mathcal{A}(F^n) : n\in\mathbb{N})$, ou celle de $(\mathcal{A}(G^n) : n\in\mathbb{N})$ pour des processus G^n majorant fortement les F^n .

(2.14) <u>contre-exemple</u>. Au vu du corollaire (2.13), on pourrait penser que la suite $(\mathcal{A}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ est relativement compacte dès que les suites $(\mathcal{A}(X^n_0) : n\in\mathbb{N})$ et $(\mathcal{A}(F^n) : n\in\mathbb{N})$ le sont. Il n'en est rien, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit T une variable sur un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, de loi exponentielle de paramètre 1 . Soit $N = I_{[\![T,\infty[\![}$ et $\underline{F}$ la plus petite filtration rendant N adapté. Soit $B_t = t\wedge T$ et $A^n = I_{[\![T+1/n,\infty[\![}$. Soit enfin $X^n = N - B + A^n$. Le processus X^n est une semimartingale spéciale sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$, de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$ avec $M^n = N - B$. On a donc $F^n = B + A^n$.

Soit $F^\infty = B + N$ et $X^\infty = 2N - B$. Il est clair que F^n converge p.s. vers F^∞ pour la topologie de Skorokhod, et que pour tout $t\geq 0$ on a $X^n_t \longrightarrow X^\infty_t$ p.s.; cependant, comme X^∞ a un saut d'amplitude 2 , tandis que les X^n ont chacun deux sauts d'amplitude 1 , l'ensemble où X^n converge vers X^∞ pour la topologie de Skorokhod est négligeable: il est facile d'en déduire que la suite $(\mathcal{A}(X^n) : n\in\mathbb{N})$ <u>n'est pas</u> relativement compacte, bien que la suite $(\mathcal{A}(F^n) : n\in\mathbb{N})$ le soit.

Cet exemple ne contredit pas (2.13), car le processus limite F^∞ est discontinu; il ne contredit pas non plus (2.8) utilisé avec les conditions (2.6) ou (2.7), car F^∞ n'est pas $\underline{F}$-prévisible. Remarquons aussi qu'on obtient ainsi une suite de processus F^n qui sont $\underline{F}$-prévisibles, et qui convergent p.s. au sens de Skorokhod vers une limite qui n'est pas $\underline{F}$-prévisible. ∎

<u>§b - Semimartingales quelconques</u>. Soit maintenant, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, une semimartingale d-dimensionnelle $X^n = (X^{n,i})_{i\leq d}$ quelconque sur $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,\underline{F}^n,P^n)$. A X^n on associe la mesure de ses sauts μ^n par

$$\mu^n(dt,dx) = \sum_{s>0} I_{\{\Delta X^n_s \neq 0\}}\, \varepsilon_{(s,\Delta X^n_s)}(dt,dx)$$

et, pour tout $b>0$, le processus

(2.15) $$X^n(b)_t = X^n_t - X^n_0 - \sum_{0<s\leq t} \Delta X^n_s \, I_{\{|\Delta X^n_s| > b\}}.$$

On rappelle (voir [6]) que les caractéristiques locales (B^n, C^n, ν^n) de X^n sont caractérisées ainsi:

- ν^n est la projection $\underline{F}^n$-prévisible duale de la mesure μ^n,
- $X^n(1)$ est une semimartingale spéciale d-dimensionnelle de décomposition canonique $X^n(1) = M^n + B^n$,
- on a $C^n = (C^{n,ij})_{i,j\leq d}$ avec $C^{n,ij} = \langle (M^{n,i})^c, (M^{n,j})^c \rangle$.

On associe enfin à X^n le processus croissant $\underline{F}^n$-prévisible fini suivant:

(2.16) $$H^n_t = \sum_{i\leq d} [C^{n,ii}_t + V(B^{n,i})_t] + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \, \nu^n(ds,dx).$$

(2.17) THEOREME: Si on a:
(i) la suite de lois $(\mathcal{L}(X^n_0) : n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}^d$ est relativement compacte,
(ii) il existe des processus croissants $\underline{F}^n$-prévisibles G^n majorant fortement H^n et vérifiant l'une des conditions (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) ou (2.7),
(iii) pour tous $N > 0$, $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{b\uparrow\infty} \limsup_{(n)} P^n(\nu^n([0,N] \times \{x : |x| > b\}) \geq \varepsilon) = 0,$$

alors la suite de lois $(\mathcal{L}(X^n) : n \in \mathbb{N})$ sur $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ est relativement compacte.

Démonstration. On utilisera les notations suivantes: si W est une fonction sur $\Omega^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, on note $W*\nu^n$ le processus

$$W*\nu^n_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} W(s,x) \, \nu^n(ds,dx),$$

lorsque cette expression a un sens, et on définit de même $W*\mu^n$. Lorsque W est prévisible, on note $W*(\mu^n - \nu^n)$ son intégrale stochastique par rapport à la mesure aléatoire-martingale $\mu^n - \nu^n$, si cette intégrale stochastique est bien définie [6]. Si $X^n(b)$ est défini par (2.15), la semimartingale spéciale $Y^n(b) = X^n_0 + X^n(b)$ admet la décomposition canonique $Y^n(b) = X^n_0 + M^n(b) + A^n(b)$, et il est facile de vérifier que lorsque $b \geq 1$, on a:

$$\begin{cases} M^n(b) = (X^n)^c + (x\, I_{\{|x|\leq b\}})*(\mu^n - \nu^n) \\ A^n(b) = B^n + (x\, I_{\{1<|x|\leq b\}})*\nu^n, \end{cases}$$

d'où les majorations:

$$<M^{n,i}(b),M^{n,i}(b)> \quad \overset{f}{\prec} \quad C^{n,ii} + ((x^i)^2\, I_{\{|x|\leq b\}})*\nu^n$$
$$V(A^{n,i}(b)) \quad \overset{f}{\prec} \quad V(B^{n,i}) + (|x^i|\, I_{\{1<|x|\leq b\}})*\nu^n .$$

Par suite le processus $F^n(b)$ associé à $Y^n(b)$ par (2.2) est fortement majoré par

$$\sum_{i\leq d} [C^{n,ii} + V(B^{n,i})] + b^2(|x|^2\wedge 1)*\nu^n + b\, d\, (|x|^2\wedge 1)*\nu^n ,$$

lui-même fortement majoré par $b(b+d)H^n$, donc par $b(b+d)G^n$. D'après le théorème (2.8), la suite $(\mathcal{L}(Y^n(b)) : n\in\mathbb{N})$ est alors relativement compacte pour tout $b\geq 1$.

Posons

(2.18) $$\tau_b^n \;=\; \inf(s>0 : |\Delta X_s^n|>b) \;=\; \inf(s\geq 0 : I_{\{|x|>b\}}*\mu_s^n \geq 1) .$$

Soit $N>0$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$. Pour tout temps d'arrêt T relatif à $\underline{F}^n$, on a

$$E^n(I_{\{|x|>b\}}*\mu_T^n) \;=\; E^n(I_{\{|x|>b\}}*\nu_T^n) ,$$

de sorte que d'après un théorème de Lenglart [8] on a

$$P^n(\tau_b^n\leq N) \;=\; P^n(I_{\{|x|>b\}}*\mu_N^n\geq 1) \;\leq\; \varepsilon + P^n(I_{\{|x|>b\}}*\nu_N^n \geq \varepsilon) .$$

Il existe donc $b\geq 1$ et $n_1\in\mathbb{N}$ tels que, d'après (iii):

$$n\geq n_1 \;\Longrightarrow\; P^n(\tau_b^n>N) \;\geq\; 1-2\varepsilon .$$

D'après le début de la preuve, il existe $a>0$, $\theta>0$, $n_2\in\mathbb{N}$ tels que

$$n\geq n_2 \;\Longrightarrow\; \begin{cases} P^n(\sup_{s\leq N}|Y^n(b)_s|>a) \;\leq\; \varepsilon \\ P^n(w^N(Y^n(b),\theta)>\eta) \leq \varepsilon . \end{cases}$$

Il reste alors à poser $n_o = n_1\vee n_2$ et à remarquer que $Y^n(b) = X^n$ sur l'intervalle $[\![0,\tau_b^n[\![$, pour obtenir:

$$n\geq n_o \;\Longrightarrow\; \begin{cases} P^n(\sup_{s\leq N}|X_s^n|>a) \;\leq\; 3\varepsilon \\ P^n(w^N(X^n,\theta)>\eta) \;\leq\; 3\varepsilon , \end{cases}$$

d'où le résultat d'après le théorème (1.2). ∎

(2.19) REMARQUE: Il est facile de montrer (voir par exemple [7]) en utilisant le théorème de Lenglart que, si τ_b^n est défini par (2.18), la condition (2.17,iii) est équivalente à:

$$\forall N>0 , \qquad \lim_{b\uparrow\infty}\ \limsup_{(n)} P^n(\tau_b^n\leq N) \;=\; 0 ,$$

ce qui est sans doute plus parlant; mais la condition (2.17,iii) a l'avantage de s'exprimer en fonction de la caractéristique ν^n de X^n. ∎

Nous laissons au lecteur le soin de déduire de ce théorème des corollaires analogues à (2.12) et à (2.13).

3 - CONVERGENCE DE PROCESSUS CROISSANTS

§a - Un résultat sur les processus ponctuels. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère encore un espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, \underline{F}^n, P^n)$ muni d'un processus ponctuel X^n (processus croissant purement discontinu, à sauts d'amplitude 1, avec $X^n_0 = 0$), de compensateur prévisible A^n.

Remarquons d'abord que X^n se met sous la forme (2.1), avec $X^n_0 = 0$ et $M^n = X^n - A^n$, de sorte que le processus F^n défini par (2.2) égale $2A^n$. On déduit alors du théorème (2.8) le corollaire suivant:

(3.1) THEOREME: S'il existe des processus croissants $\underline{F}^n$-prévisibles majorant fortement A^n et vérifiant l'une des conditions (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), ou (2.7), la suite de lois $(\mathcal{L}(X^n) : n \in \mathbb{N})$ sur $D([0,\infty[;\mathbb{R})$ est relativement compacte.

On a également un corollaire analogue à (2.13), et le contre-exemple (2.14) s'applique à cette situation: prendre $X^n = I_{[\![T,\infty[\![} + I_{[\![T+1/n,\infty[\![}$, qui admet le compensateur $A^n = B + I_{[\![T+1/n,\infty[\![}$; la suite $(\mathcal{L}(A^n) : n \in \mathbb{N})$ est relativement compacte, mais la suite $(\mathcal{L}(X^n) : n \in \mathbb{N})$ ne l'est pas.

Le théorème (3.1) n'est qu'une application immédiate des résultats du §2. Nous allons maintenant démontrer un autre résultat sur les processus ponctuels, de nature très différente, et qui ne fait intervenir ni les compensateurs prévisibles, ni les filtrations $\underline{F}^n$.

Soit D une partie dense de $\mathbb{R}_+$, et X^∞ un processus ponctuel défini sur un espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$. On dit que les X^n convergent fini-dimensionnellement sur D vers X^∞ si, pour toute famille finie $t_1, .., t_m$ de points de D, le vecteur aléatoire $(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_m})$ converge en loi vers $(X^\infty_{t_1}, ..., X^\infty_{t_m})$. Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Straf [14]:

(3.2) THEOREME: Pour que les processus ponctuels X^n convergent en loi

<u>vers le processus ponctuel</u> X^{∞}, <u>il faut et il suffit qu'ils convergent fini-dimensionnellement vers</u> X^{∞} <u>sur une partie dense</u> D <u>de</u> $\mathbb{R}_+$.

Attention: X^{∞} <u>doit être</u> un processus ponctuel. En effet, si les processus ponctuels X^n convergent fini-dimensionnellement sur D vers un processus limite X^{∞} qui n'est pas un processus ponctuel, il n'y a pas nécessairement convergence en loi des X^n vers X^{∞} : par exemple, dans la situation de (2.14), les processus ponctuels $X^n = I_{[\![T,\infty[\![} + I_{[\![T+1/n,\infty[\![}$ convergent fini-dimensionnellement sur $\mathbb{R}$, mais pas en loi, vers le processus $X^{\infty} = 2\, I_{[\![T,\infty[\![}$.

<u>Démonstration</u>. La condition nécessaire est bien connue (on peut prendre pour D le complémentaire de l'ensemble des temps fixes de discontinuité de X^{∞}).

Pour montrer la condition suffisante, il suffit de montrer que la convergence fini-dimensionnelle de X^n vers X^{∞} sur la partie dense D de $\mathbb{R}_+$ entraine la compacité relative de $(\mathcal{L}(X^n) : n \in \mathbb{N})$, donc que les conditions (1.2,i,ii) sont satisfaites; dans les conditions de (1.2) on peut même supposer que $N \in D$.

Soit donc $N \in D$, $\varepsilon > 0$. Comme $X^{\infty} < \infty$ p.s., il existe $a > 0$ tel que $P(X_N^{\infty} > a) \leq \varepsilon/2$. Comme les variables entières X_N^n convergent en loi vers X_N^{∞}, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies P^n(\sup_{s \leq N} |X_s^n| > a) = P^n(X_N^n > a) \leq \varepsilon,$$

d'où (1.2,i).

Comme X^{∞} est un processus ponctuel, il existe $\theta > 0$ tel que

$$P[\sup_{t \leq N} (X_{t+4\theta}^{\infty} - X_t^{\infty}) \geq 2] \leq \varepsilon/2 .$$

D étant dense dans $\mathbb{R}_+$, il existe des $t_i \in D$ tels que $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_p = N$ et que $\theta \leq t_i - t_{i-1} \leq 2\theta$. On a

$$P[\sup_{2 \leq i \leq p} (X_{t_i}^{\infty} - X_{t_{i-2}}^{\infty}) \geq 2] \leq \varepsilon/2$$

et comme le vecteur aléatoire $(X_{t_0}^n, \ldots, X_{t_p}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^{p+1}$ converge en loi vers $(X_{t_0}^{\infty}, \ldots, X_{t_p}^{\infty})$, on en déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ avec

(3.3) $$n \geq n_0 \implies P^n[\sup_{2 \leq i \leq p} (X_{t_i}^n - X_{t_{i-2}}^n) \geq 2] \leq \varepsilon .$$

Soit alors $T_1^n, T_2^n, \ldots$, les instants successifs de saut de X^n. Si appartient à $A^n = \bigcap_{2 \leq i \leq p} \{X^n_{t_i} - X^n_{t_{i-2}} \leq 1\}$, pour tout i il existe au plus un point $T^n_j(\omega)$ dans l'intervalle $]t_i, t_{i+1}]$, et dans ce cas il n'existe aucun point $T^n_k(\omega)$ dans les deux intervalles $]t_{i-1}, t_i]$ et $]t_{i+1}, t_{i+2}]$. En d'autres termes, si $\omega \in A^n$ et si $s_0 = 0$, $s_1 = T^n_1(\omega) \wedge N$, ..., $s_p = T^n_p(\omega) \wedge N$, il existe $q \leq p$ tel que $s_q = N$ et la subdivision $s_0, .., s_q$ de $[0, N]$ appartient à $\mathcal{T}(N, \theta)$, avec les notations de (1.1): on a donc $w^N(X^n(\omega), \theta) = 0$ car X^n est constant entre ses sauts. D'après (3.3), il s'ensuit que

$$n \geq n_0 \implies P^n(w^N(X^n, \theta) > 0) \leq \varepsilon ,$$

et on a (1.2,ii). ∎

§b - Fonctions croissantes. Soit $\mathcal{V}^+$ l'ensemble des fonctions: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissantes, continues à droite. On note δ une distance compatible avec la topologie induite sur $\mathcal{V}^+$ par la topologie de Skorokhod de $D([0, \infty[; \mathbb{R})$.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons essentiellement d'introduire une condition nécessaire et suffisante maniable, pour qu'une suite (g^n) d'éléments de $\mathcal{V}^+$ converge vers une limite g^∞ au sens de Skorokhod. Plus précisément, si D désigne une partie dense de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, soit les conditions:

$(3.4)_D$ $\qquad t \in D \implies g^n_t \longrightarrow g^\infty_t$

$(3.5)_D$ $\qquad t \in D \implies \sum_{0 < s \leq t} (\Delta g^n_s)^2 \longrightarrow \sum_{0 < s \leq t} (\Delta g^\infty_s)^2$

(où $\Delta g^n_s = g^n_s - g^n_{s-}$). On a alors le

(3.6) THEOREME: Pour que $\delta(g^n, g^\infty) \longrightarrow 0$ il faut et il suffit qu'on ait $(3.4)_D$ et $(3.5)_D$ pour une partie dense D de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 ; on peut alors prendre $D = \{t : t = 0 \text{ ou } \Delta g^\infty_t = 0\}$. Lorsque g^∞ est continue, il suffit même d'avoir $(3.4)_D$.

Pour la démonstration, il nous faut quelques préliminaires. D'abord, soit la condition

$(3.7)_D$ $\quad s > 0 \implies \exists s_n$ avec $s_n \longrightarrow s$, $\Delta g^n_{s_n} \longrightarrow \Delta g^\infty_s$, et $s_n \leq s$ si $s \in D$.

(3.8) LEMME: Supposons qu'on ait $(3.4)_D$.

(i) $s \in D$, $s' > s \Longrightarrow \limsup_{(n)} (\sup_{s<r\leq s'} \Delta g_r^n) \leq \sup_{s<r\leq s'} \Delta g_r^\infty$.
(ii) <u>si</u> g^∞ <u>est continue, on a</u> $(3.5)_{\mathbb{R}}$.
(iii) <u>on a</u>: $(3.5)_D \Longleftrightarrow (3.7)_D$.

<u>Démonstration</u>. Les parties (i) et (iii) sont montrées dans [7], lemmes 4.7 et 4.12. Supposons g^∞ continue, et soit $t \geq 0$. On a

$$\sum_{0<s\leq t} (\Delta g_s^n)^2 \leq g_t^n (\sup_{0<s\leq t} \Delta g_s^n),$$

et (ii) découle de (i). ∎

Par ailleurs, Aldous [2, 27.3] a donné le critère suivant, qui découle très facilement du théorème 14.4 de [3]:

(3.9) LEMME: <u>Pour qu'une partie</u> $\mathcal{F}$ <u>de</u> $D([0,\infty[;\mathbb{R})$ <u>soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'on ait:</u>
(i) <u>Pour tout</u> $N>0$, <u>l'ensemble</u> $\{f_t : t\leq N, f\in\mathcal{F}\}$ <u>est borné dans</u> $\mathbb{R}$.
(ii) <u>Pour toute suite</u> (f^n) <u>d'éléments de</u> $\mathcal{F}$ <u>et toutes suites</u> (s_1^n), (s_2^n), (s_3^n) <u>de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>convergeant vers la même limite</u> $t>0$ <u>et vérifiant</u> $s_1^n \leq s_2^n \leq s_3^n$, <u>si</u> $f^n_{s_i^n}$ <u>converge vers</u> α_i <u>pour</u> $i=1,2,3$, <u>on a</u> $\alpha_2=\alpha_1$ <u>ou</u> $\alpha_2=\alpha_3$.
(iii) <u>Pour toute suite</u> (f^n) <u>d'éléments de</u> $\mathcal{F}$ <u>et toute suite</u> (s^n) <u>décroissant vers</u> 0, <u>si</u> (f_0^n) <u>et</u> $(f^n_{s^n})$ <u>convergent respectivement vers</u> α_0 <u>et</u> α_1, <u>on a</u> $\alpha_0=\alpha_1$.

<u>Démonstration de (3.6)</u>. Compte tenu de (3.8,iii), la condition nécessaire est classique avec $D=\{t : t=0 \text{ ou } \Delta g_t^\infty = 0\}$.

Supposons inversement qu'on ait $(3.4)_D$ et $(3.5)_D$, donc aussi $(3.7)_D$, pour une partie dense D de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. Etant donné que la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{V}^+$ est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur l'ensemble dense D, comme on a $(3.4)_D$, il suffit de montrer que l'ensemble $\mathcal{F}=\{g^n : n\in\mathbb{N}\}$ est relativement compact pour obtenir que $\delta(g^n,g^\infty)\longrightarrow 0$.

Comme les g^n sont croissantes, $(3.4)_D$ entraine trivialement (3.9,i) et (3.9,iii). Soit (n') une sous-suite infinie de $\mathbb{N}$, et trois suites $(s_1^{n'})$, $(s_2^{n'})$, $(s_3^{n'})$ convergeant vers $t>0$ et vérifiant $s_1^{n'} \leq s_2^{n'} \leq s_3^{n'}$. Supposons que les limites $\alpha_i = \lim_{(n')} g^{n'}_{s_i^{n'}}$ existent. Soit aussi d'après $(3.7)_D$ une suite (t_n) convergeant vers t et telle que $\Delta g^n_{t_n}$ tende vers Δg_t^∞. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $u,u'\in D$ avec $u<t<u'$ et $g_{u'}^\infty - g_u^\infty \leq \Delta g_t^\infty + \varepsilon$; comme les g^n sont croissantes, que (g_u^n) et

$(g^n_{u'})$ convergent vers g^∞_u et $g^\infty_{u'}$ respectivement, et que ε est arbitraire, il est facile d'en déduire que: $\lim_{(n)} g^n_{t_n} = g^\infty_t$, $\lim_{(n)} g^n_{(t_n)-} = g^\infty_{t-}$, et $g^\infty_{t-} \le \alpha_i \le g^\infty_t$, ce qui montre que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ si $\Delta g^\infty_t = 0$. Au contraire, si $\Delta g^\infty_t > 0$, comme $\alpha_i = \lim_{(n')} g^{n'}_{s^{n'}_i}$, ce qui précède entraine qu'à partir d'un certain rang, il faut qu'on ait soit $s^{n'}_i < t_{n'}$ pour tout n', auquel cas il vient $\alpha_i = g^\infty_{t-}$, soit $s^{n'}_i \ge t_{n'}$ pour tout n', auquel cas il vient $\alpha_i = g^\infty_t$. Enfin, comme $s^{n'}_1 \le s^{n'}_2 \le s^{n'}_3$ on a $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$, et on en déduit immédiatement que $\alpha_1 = \alpha_2$, ou que $\alpha_2 = \alpha_3$. On a donc (3.9,ii), d'où le résultat.■

(3.10) REMARQUE: La croissance des g^n joue un rôle essentiel dans la démonstration précédente. Le théorème (3.6) est en effet faux si les (g^n) ne sont pas croissantes, comme le prouve le contre-exemple suivant:

$$g^n_t = \begin{cases} p/n & \text{si } p/n^2 \le t < (p+1)/n^2 \text{ et } 0 \le p \le n \\ (2n-p)/n & \text{si } p/n^2 \le t < (p+1)/n^2 \text{ et } n+1 \le p \le 2n-1 \\ 0 & \text{si } t \ge 2/n . \end{cases}$$

La suite (g^n) ainsi définie vérifie $(3.4)_D$ et $(3.5)_D$ avec $D = \mathbb{R}_+$ et $g^\infty = 0$, mais on n'a pas $\delta(g^n, g^\infty) \longrightarrow 0$ car $g^n_{1/n} = 1$ pour tout n.■

Terminons ce paragraphe par quelques résultats techniques. Si $g \in \mathcal{V}^+$ on pose

$$(3.11)\quad \begin{cases} D(g) = \{s \ge 0 : s = 0 \text{ ou } \Delta g_s = 0\} \\ U(g) = \{u > 0 : \Delta g_s \ne u \text{ pour tout } s > 0\} \\ t_0(g,u) = 0, \quad t_{i+1}(g,u) = \inf(s > t_i(g,u) : \Delta g_s > u) \\ g(u)_t = g_t - \sum_{0 < s \le t} \Delta g_s \, I_{\{|\Delta g_s| > u\}} \qquad (\text{donc } g(u) \in \mathcal{V}^+) \end{cases}$$

(3.12) LEMME: <u>Supposons que</u> $\delta(g^n, g^\infty) \longrightarrow 0$, <u>et soit</u> $u \in U(g^\infty)$.
(i) <u>On a</u>: $t_i(g^n, u) \longrightarrow t_i(g^\infty, u)$.
(ii) <u>On a</u>: $\Delta g^n_{t_i(g^n,u)} \longrightarrow \Delta g^\infty_{t_i(g^\infty,u)}$ <u>si</u> $t_i(g^\infty, u) < \infty$.
(iii) <u>On a</u>: $\delta(g^n(u), g^\infty(u)) \longrightarrow 0$.

<u>Démonstration</u>. Soit $D = D(g^\infty)$. D'après (3.6) et (3.8,iii) il existe des s^n_i tels que: $s^n_i \longrightarrow s^\infty_i := t_i(g^\infty, u)$ et $\Delta g^n_{s^n_i} \longrightarrow \Delta g^\infty_{s^\infty_i}$ si $s^\infty_i < \infty$. Soit

$$\tilde{g}^n(u)_t = g^n_t - \sum_{i \ge 1} \Delta g^n_{s^n_i} I_{\{s^n_i \le t\}} .$$

Comme $s_i^\infty \notin D$, il est clair que: $t \in D \Longrightarrow g^n(u)_t \longrightarrow g^\infty(u)_t$. Comme $u \in U^\infty$ on a $\Delta g^\infty(u) < u$ identiquement, donc (3.8,i) entraine que pour tout $t \geq 0$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\limsup_{(n)} (\sup_{0 < s \leq t} \Delta \tilde{g}^n(u)_s) \leq u - \varepsilon.$$

Comme $\Delta g^n_{s_i^n} > u$ si $s_i^n < \infty$ pour n assez grand, on en déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $s_i^n = t_i(g^n,u)$ pour n assez grand, ce qui entraine (i) et (ii). On en déduit aussi que si $t > 0$, pour n assez grand on a $g^n(u)_s = \tilde{g}^n(u)_s$ pour tout $s \leq t$; donc les $g^n(u)$ vérifient $(3.4)_D$ et $(3.5)_D$, et on a (iii) d'après (3.6). ∎

<u>§c - Application aux processus croissants</u>. Pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on considère un espace probabilisé $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, P^n)$ muni d'un processus croissant G^n. Par analogie avec (3.11), on pose

$$(3.13)\quad \begin{cases} D^n = \{s \geq 0 :\ s = 0 \ \text{ ou }\ P^n(\Delta G^n_s > 0) = 0\} \\ U^n = \{u > 0 : P^n(\exists s > 0 \ \text{ avec }\ \Delta G^n_s = u) = 0\} \\ T^n_0(u) = 0,\quad T^n_{i+1}(u) = \inf(s > T^n_i(u) : \Delta G^n_s > u) \\ G^n(u)_t = G^n_t - \sum_{0 < s \leq t} \Delta G^n_s\, I_{\{\Delta G^n_s > u\}}. \end{cases}$$

(3.14) PROPOSITION: <u>Supposons que</u> $\mathcal{L}(G^n) \longrightarrow \mathcal{L}(G^\infty)$ (i.e., les lois des G^n convergent étroitement vers celle de G^∞, $\mathcal{V}^+$ étant muni de la topologie de Skorokhod).

(i) <u>Si</u> $t_1, \ldots, t_q \in D^\infty$ <u>on a</u>: $\mathcal{L}(G^n_{t_1}, \ldots, G^n_{t_q}) \longrightarrow \mathcal{L}(G^\infty_{t_1}, \ldots, G^\infty_{t_q})$.

(ii) <u>Si</u> $u \in U^\infty$ <u>et</u> $i \in \mathbb{N}$, <u>on a</u> (avec la convention $\Delta G_\infty = 0$):

$$\mathcal{L}(T^n_1(u), \ldots, T^n_i(u); \Delta G^n_{T^n_1(u)}, \ldots, \Delta G^n_{T^n_i(u)}; G^n(u))$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}(T^\infty_1(u), \ldots, T^\infty_i(u); \Delta G^\infty_{T^\infty_1(u)}, \ldots, \Delta G^\infty_{T^\infty_i(u)}; G^\infty(u)).$$

<u>Démonstration</u>. (i) est bien connu. D'après (3.12), les fonctions: $g \rightsquigarrow t_i(g,u)$, $g \rightsquigarrow \Delta g_{t_i(g,u)}$, $g \rightsquigarrow g(u)$ sont continues pour la topologie de Skorokhod sur $\mathcal{V}^+$, en tout point g tel que $u \in U(g)$. Si $u \in U^\infty$, on a $P^\infty\{\omega : u \in U(G^\infty_\cdot(\omega))\} = 0$, d'où (ii). ∎

Passons maintenant à la convergence en probabilité (notée: $\xrightarrow{P}$) lorsque les G^n sont définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$. Soit les conditions suivantes, où D désigne une partie dense de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 :

$(3.15)_D \qquad t\in D \Longrightarrow G^n_t \xrightarrow{P} G^\infty_t$

$(3.16)_D \qquad t\in D \Longrightarrow \sum_{0<s\leq t} (\Delta G^n_s)^2 \xrightarrow{P} \sum_{0<s\leq t} (\Delta G^\infty_s)^2 .$

(3.17) PROPOSITION: <u>Si</u> G^∞ <u>est continu, on a</u>: $(3.15)_D \Longrightarrow (3.16)_{\mathbb{R}}$.

<u>Démonstration</u>. Rappelons d'abord que pour des variables aléatoires (Y_n) à valeurs dans un espace métrique, on a $Y_n \xrightarrow{P} Y_\infty$ si et seulement si de toute sous-suite infinie on peut extraire une sous-sous-suite infinie qui converge en probabilité (ou même p.s.) vers Y_∞.

Quitte à diminuer D, on peut supposer que D est dénombrable. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $G^n_t \longrightarrow G^\infty_t$ pour tout $t\in D$, en dehors d'un ensemble négligeable indépendant de t. Le résultat découle alors de (3.8,ii).∎

Par le même principe d'extraction de sous-suites, on déduit de (3.6) et de (3.12) les propositions suivantes:

(3.18) PROPOSITION: <u>Pour que</u> $\delta(G^n,G^\infty) \xrightarrow{P} 0$ <u>il faut et il suffit qu'on ait</u> $(3.15)_D$ <u>et</u> $(3.16)_D$ <u>(ou seulement</u> $(3.15)_D$ <u>si</u> G^∞ <u>est continu) pour une partie dense</u> D <u>de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>contenant</u> 0 ; <u>on peut alors prendre</u> $D = D^\infty$.

(3.19) PROPOSITION: <u>Supposons que</u> $\delta(G^n,G^\infty) \xrightarrow{P} 0$ <u>et que</u> $u\in U^\infty$.
(i) <u>On a</u>: $T^n_i(u) \xrightarrow{P} T^\infty_i(u)$.
(ii) <u>On a</u>: $\Delta G^n_{T^n_i(u)} \xrightarrow{P} \Delta G^\infty_{T^\infty_i(u)}$ <u>sur l'ensemble</u> $\{T^\infty_i(u)<\infty\}$ (ou partout si on convient que $\Delta G_\infty = 0$).
(iii) <u>On a</u>: $\delta(G^n(u),G^\infty(u)) \xrightarrow{P} 0$.

Remarquons pour terminer que (3.18) implique l'équivalence des conditions (2.6) et (2.7), et aussi, grâce à l'artifice utilisé dans la remarque (2.9,2), l'équivalence des conditions (2.4) et (2.5).

<u>4 - PROCESSUS DOMINES PAR DES PROCESSUS CROISSANTS</u>

<u>§a - La domination par des processus croissants</u>. Dans toute la partie 4 nous supposons donné, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, un espace probabilisé filtré $(\Omega^n,\underline{F}^n,\underline{F}^n,P^n)$ muni d'un processus d-dimensionnel X^n adapté à $\underline{F}^n$, continu à droite et pourvu de limites à gauche. On note $\underline{\underline{T}}^n$ la classe

s $\underline{\underline{F}}^n$-temps d'arrêt. Soit également G^n un processus croissant sur $^n,\underline{\underline{F}}^n,P^n)$, pas nécessairement adapté à $\underline{\underline{F}}^n$. Nous ferons l'hypothèse "domination" suivante:

.1) $\forall N>0,\ \exists a_N>0$ et $\exists f_N :]0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ avec $\lim_{\eta\uparrow\infty} f_N(\eta)=0$, tels que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\eta>0$, $\forall S,T\in\underline{\underline{T}}^n$ avec $S\leq T\leq N$, on ait

$$P^n(\sup_{S<s\leq T}|X^n_s - X^n_S|\geq\eta) \leq a_N\,[\varepsilon f_N(\eta) + P^n(G^n_T - G^n_S\geq\varepsilon)].$$

Cette hypothèse compliquée est heureusement satisfaite par les semi-rtingales de type (2.1):

.2) PROPOSITION: <u>Supposons que les</u> X^n <u>soient des semimartingales de</u> <u>pe (2.1) et que les</u> F^n <u>soient définis par (2.2). La condition (4.1)</u> <u>t satisfaite avec</u> $a_N = 2d$ <u>et</u> $f_N(\eta) = 2d^2/\eta^2 + d/\eta$, <u>dès que les</u> <u>ocessus croissants</u> G^n <u>majorent fortement les</u> F^n .

<u>monstration</u>. Il suffit de montrer le résultat lorsque $G^n = F^n$. Pour ute variable aléatoire $Z\geq 0$ on a $P(Z\geq\eta)\leq \varepsilon/\eta + P(Z\geq\varepsilon)$, donc $S\leq T$:

$$P^n(\sup_{S<s\leq T}|A^{n,i}_s - A^{n,i}_S|\geq\eta) \leq \frac{\varepsilon}{\eta} + P^n(V(A^{n,i})_T - V(A^{n,i})_S\geq\varepsilon). \tag{4.3}$$

it $S\in\underline{\underline{T}}^n$, $N = M^{n,i} - (M^{n,i})^S$ et $B = \langle M^{n,i},M^{n,i}\rangle - \langle M^{n,i},M^{n,i}\rangle^S$ (où ^{S} désignele processus Y arrêté en S). On sait que N^2 est dominé sens de Lenglart [8] par le processus $\underline{\underline{F}}^n$-prévisible B , de sorte e pour tout $T\in\underline{\underline{T}}^n$ on a

$$P^n(\sup_{s\leq T}(N_s)^2\geq\eta) \leq \frac{\varepsilon}{\eta} + P^n(B_T\geq\varepsilon),$$

'où si $S\leq T$:

$$P^n(\sup_{S<s\leq T}|M^{n,i}_s - M^{n,i}_S|\geq\eta) \leq \frac{\varepsilon}{\eta^2} + P^n(\langle M^{n,i},M^{n,i}\rangle_T - \langle M^{n,i},M^{n,i}\rangle_S\geq\varepsilon). \tag{4.4}$$

En combinant (4.3) et (4.4), on arrive à

$$\begin{aligned}
&P^n(\sup_{S<s\leq T}|X^n_s - X^n_S|\geq\eta)\\
&\leq \sum_{i\leq d}\Big[P^n(\sup_{S<s\leq T}|M^{n,i}_s - M^{n,i}_S|\geq\frac{\eta}{2d}) + P^n(\sup_{S<s\leq T}|A^{n,i}_s - A^{n,i}_S|\geq\frac{\eta}{2d})\Big]\\
&\leq \sum_{i\leq d}\Big[\frac{4d^2\varepsilon}{\eta^2} + P^n(F^n_T - F^n_S\geq\varepsilon) + \frac{2d\varepsilon}{\eta} + P^n(F^n_T - F^n_S\geq\varepsilon)\Big]\\
&\leq 2d\,\Big[\varepsilon\Big(\frac{2d^2}{\eta^2} + \frac{d}{\eta}\Big) + P^n(F^n_T - F^n_S\geq\varepsilon)\Big]
\end{aligned}$$

ar F^n domine fortement $V(A^{n,i})$ et $\langle M^{n,i},M^{n,i}\rangle$. ■

Nous verrons que l'hypothèse (4.1) n'est pas toujours suffisante pour nos besoins, et nous allons introduire une hypothèse plus forte. On utilise les notations (3.13) et, si $u > 0$, on pose

$$X^n(u)_t = X^n_t - \sum_{0<s\leq t} \Delta X^n_s \, I_{\{\Delta G^n_s > u\}} .$$

si $u = \infty$, on a $X^n(\infty) = X^n$ et $G^n(\infty) = G^n$; attention, ces notations ne sont pas les mêmes que dans la preuve de (2.17)). Soit alors:

(4.5) $\forall N > 0$, $\exists a_N > 0$ et $\exists f_N :]0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ avec $\lim_{\eta\uparrow\infty} f_N(\eta) = 0$, tels que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\forall u \in]0,\infty]$, $\forall S,T \in \underline{\underline{T}}^n$ avec $S \leq T \leq N$, on ait:

$$P^n(\sup_{S<s\leq T} |X^n(u)_s - X^n(u)_S| \geq \eta) \leq a_N [\varepsilon f_N(\eta) + P^n(G^n(u)_T - G^n(u)_S \geq \varepsilon)] .$$

(on retrouve (4.1) en prenant $u = \infty$).

(4.6) PROPOSITION: <u>Sous les hypotheses de (4.2), la condition (4.5) est satisfaite avec</u> $a_N = 2d$ et $f_N(\eta) = 2d^2/\eta^2 + d/\eta$, <u>dès que les processus croissants</u> G^n <u>sont</u> $\underline{F}^n$<u>-prévisibles et majorent fortement les</u> F^n.

<u>Démonstration</u>. L'ensemble $H^n(u) = \{\Delta G^n \leq u\}$ est $\underline{F}^n$-prévisible, donc la décomposition canonique de $X^n(u) = I_{H^n(u)} \cdot X^n$ est $X^n(u) = X^n_0 + I_{H^n(u)} \cdot M^n + I_{H^n(u)} \cdot A^n = X^n_0 + M^n(u) + A^n(u)$. De plus le processus associé à $X^n(u)$ par (2.2) est $F^n(u) = I_{H^n(u)} \cdot F^n$, donc $F^n(u) \overset{f}{\ll} G^n(u)$: il suffit alors d'appliquer (4.2) à $X^n(u)$. ∎

Voici une première conséquence, facile, de (4.1):

(4.7) LEMME: <u>Si on a (4.1) et si</u>
(i) <u>la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(X^n_0) : n \in \mathbb{N})$ <u>sur</u> $\mathbb{R}^d$ <u>est relativement compacte</u>,
(ii) <u>la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(G^n) : n \in \mathbb{N})$ <u>sur</u> $\mathbb{D}^+$ <u>est relativement compacte</u>,
<u>les processus</u> (X^n) <u>vérifient (1.2,i)</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $N > 0$, $\varepsilon > 0$. D'après (i) il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $b > 0$, avec

$$n \geq n_1 \implies P^n(|X^n_0| > b) \leq \varepsilon/2 .$$

D'après (ii) et (1.2,i) appliqué aux G^n, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $c > 0$, avec

$$n \geq n_2 \implies P^n(G^n_N > c) \leq \varepsilon/4a_N .$$

Il existe $d > 0$ tel que $f_N(d) \leq \varepsilon/4a_N c$. Si $a = b + d$ et si on applique (4.1) à $S = 0$ et $T = N$, on obtient:

$$n \geq n_1 \vee n_2 \Longrightarrow P^n(\sup_{s\leq N}|X_s^n| > a) \leq P^n(|X_0^n| > b) + P^n(\sup_{s\leq N}|X_s^n - X_0^n| > d)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + a_N(cf_N(d) + \frac{\varepsilon}{4a_N}) \leq \varepsilon \quad ,$$

d'où le résultat. ∎

§b - Cas où les processus dominants convergent vers un processus continu.

(4.8) THEOREME: Supposons qu'on ait (4.1). Si
(i) la suite de lois $(\mathcal{L}(X_0^n) : n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}^d$ est relativement compacte,
(ii) la suite de lois $(\mathcal{L}(G^n) : n \in \mathbb{N})$ sur $\mathcal{V}^+$ est relativement compacte et n'admet pouur points d'accumulation que des lois de processus continus,
alors la suite de lois $(\mathcal{L}(X^n) : n \in \mathbb{N})$ sur $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ est relativement compacte.

Ce résultat est un corollaire, dégagé par Rebolledo, du critère d'Aldous. Il est important de remarquer que la continuité des limites des G^n implique que les points d'accumulation de la suite $(\mathcal{L}(X^n))$ sont des lois de processus quasi-continus à gauche pour leur filtration propre.

Etant donné (4.2), ce théorème entraine la validité du théorème (2.8), lorsque dans (2.8,ii) on utilise la condition (2.3): remarquer d'ailleurs que dans ce cas, la prévisibilité des G^n est superflue.

Bien que ce théorème (4.8) soit connu, nous en redonnons ici la démonstration, car elle constitue une bonne introduction pour la démonstration du théorème plus général que nous énoncerons après. Nous suivons essentiellement la démonstration d'Aldous, et plus précisément l'exposé qu'en a fait Métivier dans [10].

Etant donné (4.7), il nous suffit de montrer que la suite (X^n) vérifie la condition (1.2,ii). D'après le "principe des sous-suites" énoncé avant (2.12), on peut supposer que les G^n tendent en loi vers un processus croissant continu G^∞, défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{F},P)$. On fixe $N>0$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$.

1ère étape: la "presque équicontinuité uniforme" des G^n. Le résultat de cette première étape est classique. Nous en donnons une démonstration pour être complet, et parce que le même genre de preuve sera utilisé plus tard. Comme G^∞ est continu, pour tout $\rho>0$ il existe une variable $T(\omega)>0$ telle que

$$t \leq N \Longrightarrow G^{\infty}_{(t+T)\wedge N} - G^{\infty}_t < \rho .$$

Soit alors $\theta(\rho) > 0$ tel que $p = N/\theta(\rho)$ soit un entier et que $P(T < \theta(\rho)) \leq \rho f_N(\eta)/2$. Soit $t_i = i\theta(\rho)$ et $A^n_\delta = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \{G^n_{t_i} - G^n_{t_{i-1}} \geq \delta\}$. Avec les notations de (3.14), on a $D^{\infty} = \mathbb{R}_+$, donc (3.14,i) entraine que $P^n(A^n_\delta) \longrightarrow P(A^{\infty}_\delta)$ pour tout $\delta > 0$ tel que la frontière $\partial A^{\infty}_\delta$ de A^{∞}_δ vérifie $P(\partial A^{\infty}_\delta) = 0$.

Il existe une suite $\rho_q \uparrow \rho$ telle que $P(\partial A^{\infty}_{\rho_q}) = 0$. On a $P^n(A^n_\rho) \leq P^n(A^n_{\rho_q})$, $\lim_{(q)} P(A^{\infty}_{\rho_q}) = P(A^{\infty}_\rho)$, et $\lim_{(n)} P^n(A^n_{\rho_q}) = P(A^{\infty}_{\rho_q})$, ce qui implique: $\limsup_{(n)} P^n(A^n_\rho) \leq P(A^{\infty}_\rho)$. D'après la définition de $\theta(\rho)$ on a $P(A^{\infty}_\rho) \leq \rho f_N(\eta)/2$, donc il existe $n_o(\rho) \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_o(\rho) \Longrightarrow P^n(\sup_{i \leq p} (G^n_{t_i} - G^n_{t_{i-1}}) \geq \rho) \leq \rho f_N(\eta) .$$

Enfin, comme G^n est croissant, on en déduit que

$$(4.9) \quad n \geq n_o(\rho) \Longrightarrow P^n(\sup_{t \leq N} (G^n_{(t+\theta(\rho))\wedge N} - G^n_t) \geq 2\rho) \leq \rho f_N(\eta) .$$

<u>2ème étape</u>: <u>utilisation de (4.1)</u>. Soit $\rho_1 = \varepsilon/3a_N f_N(\eta)$ et $\theta = \theta(\rho_1)$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q\theta > 2N$. Soit $\rho_2 = \rho_1/q$ et $\theta' = \theta(\rho_2) \wedge \theta$, $n_1 = n_o(\rho_2) \vee n_o(\rho_1)$. On déduit de (4.9) que

$$n \geq n_1 \Longrightarrow \begin{cases} P^n(\sup_{t \leq N} (G^n_{(t+\theta)\wedge N} - G^n_t) \geq 2\varepsilon/3a_N f_N(\eta)) \leq \varepsilon/3a_N \\ P^n(\sup_{t \leq N} (G^n_{(t+\theta')\wedge N} - G^n_t) \geq 2\varepsilon/3qa_N f_N(\eta)) \leq \varepsilon/3qa_N . \end{cases}$$

Un calcul élémentaire, basé sur (4.1), montre alors que

$$(4.10) \quad n \geq n_1, T \in \underline{\underline{T}}^n, T \leq N \Longrightarrow \begin{cases} P^n(\sup_{s \leq \theta} |X^n_{(t+s)\wedge N} - X^n_t| \geq \eta) \leq \varepsilon \\ P^n(\sup_{s \leq \theta'} |X^n_{(t+s)\wedge N} - X^n_t| \geq \eta) \leq \varepsilon/q . \end{cases}$$

<u>3ème étape</u>: <u>construction de la subdivision de</u> $[0,N]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence les $\underline{F}^n$-temps d'arrêt:

$$(4.11) \quad S^n_0 = 0 , \quad S^n_{i+1} = N \wedge \inf(s > S^n_i : |X^n_s - X^n_{S^n_i}| \geq \eta) .$$

L'implication (4.10) entraine:

$$(4.12) \quad n \geq n_1 \Longrightarrow \begin{cases} P^n(S^n_i < N, \ S^n_i < S^n_{i-1} + \theta) \leq \varepsilon \\ P^n(S^n_i < N, \ S^n_i < S^n_{i-1} + \theta') \leq \varepsilon/q . \end{cases}$$

Comme $S^n_q = \sum_{1 \leq k \leq q} (S^n_k - S^n_{k-1})$, il suit de la première inégalité (4.12): que si $n \geq n_1$,

$$N\, P^n(S^n_q < N) \geq E^n(S^n_q\, I_{\{S^n_q < N\}}) = \sum_{1 \leq k \leq q} E^n[(S^n_k - S^n_{k-1}) I_{\{S^n_q < N\}}]$$

$$\geq \sum_{1\leq k\leq q} P^n(\{S_q^n < N\} \setminus \{S_k^n < N, S_k^n - S_{k-1}^n < \theta\})$$
$$\geq q\,\theta\, P^n(S_q^n < N) - q\,\theta\,\varepsilon.$$

Comme $q\theta > 2N$, on en déduit que

(4.13) $\qquad n \geq n_1 \implies P^n(S_q^n < N) \leq 2\varepsilon$.

Soit enfin $A^n = \bigcap_{1\leq i\leq q}\{S_i^n = N, \text{ ou } S_i^n - S_{i-1}^n \geq \theta'\}$. La seconde inégalité (4.12) entraine que

(4.14) $\qquad n \geq n_1 \longrightarrow P^n(A^n) \geq 1 - \varepsilon$.

__4ème étape__: __évaluation de__ $w^N(X^n, \theta')$. Si $\omega \in A^n \bigcap \{S_q^n = N\}$, les points $\{S_i^n(\omega) : 0 \leq i \leq q\}$ constituent une subdivision de $[0,N]$ appartenant à $\mathscr{C}(N,\theta')$. D'après la définition (4.11), on a $|X_t^n - X_s^n| < 2\eta$ si $S_i^n \leq s \leq t < S_{i+1}^n$. Donc sur $A^n \bigcap \{S_q^n = N\}$ on a $w^N(X^n, \theta') \leq 2\eta$. D'après (4.13) et (4.14) il vient alors

$$n \geq n_1 \implies P^n(w^N(X^n, \theta') \geq 2\eta) \leq 3\varepsilon,$$

de sorte que la suite (X^n) vérifie (1.2,ii), et le théorème (4.8) est démontré.∎

__§c - Le théorème général__. Nous avons montré dans la partie 2, en exhibant le contre-exemple (2.14), que le théorème (4.8) n'est pas valide si dans (4.8,ii) on supprime l'hypothèse de continuité des processus limite des G^n, et ceci même lorsqu'on remplace (4.1) par (4.5). Pour obtenir le résultat cherché, nous allons devoir remplacer la condition (4.8,ii) par l'une des conditions (2.4), (2.5), (2.6) ou (2.7), ou par l'une des conditions plus faibles suivantes. Dans l'énoncé de ces conditions, nous utilisons les notations (3.13).

(4.15) (i) Les processus G^n convergent en loi vers un processus G^∞.
(ii) $\forall N > 0$, $\forall u \in U^\infty$, $\forall i \geq 1$, $\forall \sigma > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \sigma' \in]0,\sigma[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tels que si $n \geq n_0$ il existe $R^n \in \underline{\underline{T}}^n$ avec
$$P^n[(T_1^n(u) - \sigma) \wedge N > R^n] + P^n(T_1^n(u) \leq N + \sigma,\ R^n \geq T_1^n(u) - \sigma') \leq \varepsilon.$$

Cette condition compliquée signifie que, σ et N étant donnés, on peut trouver un $\underline{F}^n$-temps d'arrêt R^n qui est compris entre $T_i^n(u) - \sigma$ et $T_i^n(u) - \sigma'$ là où $T_i^n(u) \leq N + \sigma$ et qui est supérieur à N là où $T_i^n(u) \geq N + \sigma$, ceci avec une probabilité aussi proche qu'on veut de 1, le point important étant que σ' ne dépende pas de n. Cela entraine en particulier que $T_i^n(u)$ est $\underline{F}^n$-accessible; en général, d'ailleurs, G^n est $\underline{F}^n$-prévisible, donc $T_i^n(u)$ également, et cette condition signifie simplement que les $T_i^n(u)$ peuvent être annoncés par des temps d'arrêt R^n qui sont "uniformément (en n) loin" de $T_i^n(u)$.

(4.16) (i) Les processus G^n convergent en loi vers un processus G^∞.
(ii) $\forall N>0$, $\forall u\in U^\infty$, $\forall i\geq 1$, $\forall \varepsilon>0$, $\forall \eta>0$, $\exists \sigma>0$, $\exists n_o\in\mathbb{N}$, tels que si $n\geq n_o$ et si $S^n\in\underline{\underline{T}}^n$, on ait

$$P^n(T_i^n(u)-\sigma<S^n<T_i^n(u)\leq N\ ,\ |\Delta X^n(u)_{S^n}|>\eta)\ \leq\varepsilon\ .$$

Enfin, on peut évidemment remplacer les conditions (i) ci-dessus par la relative compacité de la suite $(\mathcal{L}(G^n):n\in\mathbb{N})$. On peut alors énoncer la condition suivante (à ne pas lire), encore plus affreuse que les précédentes, mais plus faible.

(4.17) (i) La suite de lois $(\mathcal{L}(G^n):n\in\mathbb{N})$ est relativement compacte.
(ii) de toute sous-suite infinie $\mathbb{N}_o\subset\mathbb{N}$ on peut extraire une sous-sous-suite infinie $\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}_o$ telle qu'il existe une partie U de $]0,\infty[$ à complémentaire dénombrable, avec: $\forall N>0$, $\forall u\in U$, $\forall i\geq 1$, $\forall\varepsilon>0$, $\forall\eta>0$, $\exists\sigma>0$, $\exists n_1\in\mathbb{N}_1$ tels que si $n\geq n_1$, $n\in\mathbb{N}_1$, $S^n\in\underline{\underline{T}}^n$, on ait

$$P^n(T_i^n(u)-\sigma<S^n<T_i^n(u)\leq N,\ |\Delta X^n(u)_{S^n}|>\eta)\ \leq\varepsilon\ .$$

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant:

(4.18) THEOREME: <u>Supposons qu'on ait (4.5). Si</u>
(i) <u>la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(X_0^n):n\in\mathbb{N})$ <u>sur</u> $\mathbb{R}^d$ <u>est relativement compacte</u>,
(ii) <u>on a l'une des conditions (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (4.15), (4.16), ou (4.17)</u>,
<u>alors la suite de lois</u> $(\mathcal{L}(X^n):n\in\mathbb{N})$ <u>sur</u> $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$ <u>est relativement compacte</u>.

Etant donné (4.6), ce théorème entraine la validité du théorème (2.8) lorsque dans (2.8,ii) on utilise l'une des conditions (2.4), (2.5), (2.6) ou (2.7). On a les implications suivantes, entre ces conditions:

(4.19) PROPOSITION: <u>On a</u>: (2.4)$\Longleftrightarrow$(2.5)$\Longrightarrow$(2.6)$\Longleftrightarrow$(2.7)$\Longrightarrow$(4.15),
<u>et</u> (4.15) + (4.5)$\Longrightarrow$(4.16)$\longrightarrow$(4.17).

Il suffira donc de montrer (4.18) sous l'hypothèse (4.17). Mais, en invoquant le "principe des sous-suites" déjà utilisé plusieurs fois on se ramène à supposer qu'on a (4.16), à ceci près que U^{∞} est remplacé par un ensemble U dense dans $]0,\infty[$ et contenu dans U^{∞}.

La démonstration de (4.18) va suivre les mêmes étapes que celle de (4.8). Cependant, la première étape de (4.8) ne peut pas se transposer telle quelle, car G^{∞} n'est pas nécessairement continue, ni a-fortiori uniformément continue. Cependant, dans une étape préliminaire, nous allons montrer que les G^n sont "presque équicontinus" aux points $T_i^n(u)$:

(4.20) LEMME: <u>Supposons qu'on ait (4.16,i). On a alors</u>: $\forall u\in U^{\infty}$, $\forall i\geq 1$, $\forall \rho>0$, $\forall \rho'>0$, $\exists b>0$, $\exists n_1\in \mathbb{N}$ <u>tels que</u>

$$n\geq n_1 \implies P^n[G^n(u)_{T_i^n(u)+b} - G^n(u)_{T_i^n(u)-b} \geq \rho] \leq \rho'$$

(par convention, $G_s^n=0$ si $s<0$).

<u>Démonstration</u>. G^{∞} est défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. Comme $G^{\infty}(u)$ est continu en $T_i^n(u)$, il existe une variable $T(\omega)>0$ telle que

$$G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)+T} - G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)-T} < \rho .$$

Il existe $b>0$ tel que $P(b<T)\geq 1-\rho'/2$ et que $\Delta G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)\pm b}=0$ p.s. On déduit alors de (3.14,ii) que

$$\mathcal{L}(G^n(u)_{T_i^n(u)+b},G^n(u)_{T_i^n(u)-b}) \longrightarrow \mathcal{L}(G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)+b},G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)-b}).$$

On montre alors, exactement comme dans la première étape de (4.8), que

$$\limsup_{(n)} P^n[G^n(u)_{T_i^n(u)+b} - G^n(u)_{T_i^n(u)-b}\geq \rho)$$
$$\leq P(G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)+b} - G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)-b}\geq \rho).$$

Il existe donc $n_1\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geq n_1$ on ait

$$P^n(G^n(u)_{T_i^n(u)+b} - G^n(u)_{T_i^n(u)-b}\geq \rho) \leq P(G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)+b} - G^{\infty}(u)_{T_i^{\infty}(u)-b}\geq \rho) + \frac{\rho'}{2}$$
$$\leq \frac{\rho'}{2}+\frac{\rho'}{2} = \rho' . \blacksquare$$

<u>Démonstration de (4.19)</u>. On a déjà vu les implications: (2.4)$\iff$(2.5) $\implies$(2.6)$\iff$(2.7), et l'implication: (2.16)$\implies$(2.17) est évidente.

Supposons qu'on ait (2.6). On a évidemment (4.15,i). Soit $N>0$, $u\in U^{\infty}$, $i\geq 1$, $\sigma>0$, $\varepsilon>0$. Comme G^{∞} est $\underline{F}^{\infty}$-prévisible, $T_i^{\infty}(u)$ est un temps $\underline{F}^{\infty}$-prévisible, donc il existe un $\underline{F}^{\infty}$-temps d'arrêt R tel que $R<T_i^{\infty}(u)$ et que

(4.21) $P(R<N\leq T_1^\infty(u)-\frac{\sigma}{2})\leq \varepsilon/6,\quad P(R\leq T_1^\infty(u)-\frac{\sigma}{2}<\infty)\leq \varepsilon/6.$

Il existe $\sigma'\in\,]0,\sigma/4[$ tel que

(4.22) $$P(T_1^\infty(u)-2\sigma'\leq R<\infty)\leq \varepsilon/6.$$

Enfin $T_1^n(u)\xrightarrow{P} T_1^\infty(u)$ d'après (3.19), donc il existe $n_o\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geq n_o$,

(4.23) $P[\{T_1^\infty(u)<\infty,|T_1^n(u)-T_1^\infty(u)|>\sigma'\}\bigcup\{T_1^\infty(u)=\infty,\ T_1^n(u)\leq N+\sigma\}]\leq \varepsilon/6.$

En associant (4.21), (4.22) et (4.23), on arrive à

$$P^n[(T_1^n(u)-\sigma)\wedge N\geq R^n]\leq \varepsilon/2$$
$$P^n(T_1^n(u)\leq N+\sigma,\ R^n\geq T_1^n(u)-\sigma')\leq \varepsilon/2,$$

et on a (4.15).

Supposons enfin qu'on ait (4.5) et (4.15). Soit $N>0$, $u\in U^\infty$, $i\geq 1$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$. D'après le lemme (4.20) il existe $b>0$ et $n_1\in\mathbb{N}$ tel que

(4.24) $n\geq n_1 \longrightarrow P^n[G^n(u)_{T_1^n(u)+b}-G^n(u)_{T_1^n(u)-b}\geq \varepsilon/4a_Nf_N(\frac{\eta}{2})]\leq \varepsilon/8a_N.$

D'après (4.15,ii) il existe $n_o\geq n_1$ et $\sigma>0$ tels que si $n\geq n_o$ il existe $R^n\in\underline{\underline{T}}^n$ avec

(4.25) $$\begin{cases} P^n(A^n)\leq \frac{\varepsilon}{2}\wedge\frac{\varepsilon}{8a_N}, \quad \text{où } A^n = \\ \{T_1^n(u)>N+b,R^n<N\}\bigcup\{T_1^n(u)\leq N+b,R^n<T_1^n(u)-b\}\bigcup\{T_1^n(u)\leq N+b,\\ \qquad R^n\geq T_1^n(u)-\sigma\}.\end{cases}$$

Si alors $T^n=T_1^n(u)\wedge N$ et $V^n=R^n\wedge T^n$, on déduit de (4.24) et (4.25) que

$$n\geq n_o \Longrightarrow P^n[G^n(u)_{T^n}-G^n(u)_{V^n}\geq \varepsilon/4a_Nf_N(\tfrac{\eta}{2})]\leq \varepsilon/4a_N,$$

donc d'après (4.5) il vient par un calcul facile

(4.26) $n\geq n_o \Longrightarrow P^n(B^n)\leq \varepsilon/2$, où $B^n=\{\sup_{V^n<s\leq T^n}|X^n(u)_s-X^n(u)_{V^n}|>\frac{\eta}{2}\}.$

Soit alors $S^n\in\underline{\underline{T}}^n$. Sur $(B^n)^c$ on a $|\Delta X^n(u)|\leq\eta$ sur l'intervalle stochastique $]\!]V^n,T^n]\!]$; si $\omega\in(A^n)^c\bigcap(B^n)^c\bigcap\{T_1^n(u)-\sigma<S^n<T_1^n(u)\leq N\}$ on a $T^n=T_1^n(u)$ et $R^n=V^n<S^n\leq T^n$, donc $|\Delta X^n(u)_{S^n}|\leq\eta$. D'après (4.25) et (4.26) on a donc

$$n\geq n_o \Longrightarrow P^n[T_1^n(u)-\sigma<S^n<T_1^n(u)\leq N,\ |\Delta X^n(u)_{S^n}|>\eta]\leq\varepsilon$$

et (4.16) est vérifié. ∎

Passons maintenant à la démonstration du théorème (4.18). On sait qu'on peut supposer qu'on a (4.16), à ceci près que U^∞ est remplacé par un sous-ensemble U de U^{∞}, dense dans $]0,\infty[$. D'après (4.7), il nous suffit de démontrer que la suite (X^n) vérifie (1.2,ii), et à cet effet on fixe une fois pour toutes $N>0, \varepsilon>0, \eta>0$.

<u>1ère étape</u>: <u>la "presque équi-continuité uniforme" des</u> $G^n(u)$. Comme $G^n(u) \overset{f}{\ll} G^n$, le corollaire (1.3) entraine la relative compacité de la suite $(\mathcal{L}(G^n(u)) : n \in \mathbb{N})$. Donc si $\rho>0$, $u>0$, il existe $n_2(u,\rho) \in \mathbb{N}$ et $\theta(u,\rho)>0$ tels que

$$n \geq n_2(u,\rho) \Longrightarrow P^n[w^N(G^n(u),\theta(u,\rho)) \geq \rho] \leq \rho f_N(\eta).$$

Si $u<\rho$ on a $\Delta G^n(u)<\rho$ identiquement; par ailleurs $G^n(u') \overset{f}{\ll} G^n(u)$ si $u' \leq u$, donc si $u' \leq u < \rho$ il vient

$$\{\sup_{t \leq N} [G^n(u')_{(t+\theta(u,\rho))\wedge N} - G^n(u')_t] \geq 3\rho\} \subset \{w^N(G^n(u),\theta(u,\rho)) \geq \rho\},$$

et on en déduit que

$$(4.27) \quad u' \leq u < \rho,\ n \geq n_2(u,\rho) \Longrightarrow P^n[\sup_{t \leq N} [G^n(u')_{(t+\theta(u,\rho))\wedge N} - G^n(u')_t] \geq 3\rho] \leq \rho f_N(\eta).$$

<u>2ème étape</u>: <u>première utilisation de (4.5)</u>. Soit $\rho_1 = \varepsilon/4a_N f_N(\eta)$, $u_1 \in]0,\rho_1[$, $\theta = \theta(u_1,\rho_1)$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q\theta > 2N$. Soit $\rho_2 = \rho_1/q$, $u_2 \in]0, u_1 \wedge \rho_2[$ et $\theta' = \theta \wedge \theta(u_2,\rho_2)$. Soit enfin $u \in U \cap]0,u_2[$ et $n_2 = n_2(u_1,\rho_1) \vee n_2(u_2,\rho_2)$. On déduit de (4.27) que

$$n \geq n_2 \Longrightarrow \begin{cases} P^n[\sup_{t \leq N} [G^n(u)_{(t+\theta)\wedge N} - G^n(u)_t] \geq 3\varepsilon/4a_N f_N(\eta)] \leq \varepsilon/4a_N \\ P^n[\sup_{t \leq N} [G^n(u)_{(t+\theta')\wedge N} - G^n(u)_t] \geq 3\varepsilon/4qa_N f_N(\eta)] \leq \varepsilon/4qa_N. \end{cases}$$

D'après (4.5) il vient alors

$$(4.28) \quad n \geq n_o, T \in \underline{\underline{T}}^n, T \leq N \Longrightarrow \begin{cases} P^n[\sup_{s \leq \theta} |X^n(u)_{(T+s)\wedge N} - X^n(u)_T| \geq \eta] \leq \varepsilon \\ P^n \sup_{s \leq \theta'} |X^n(u)_{(T+s)\wedge N} - X^n(u)_T| \geq \eta] \leq \varepsilon/q \end{cases}$$

<u>3ème étape</u>: <u>première subdivision de</u> $[0,N]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence les $\underline{F}^n$-temps d'arrêt

$$(4.29) \quad S_0^n = 0, \qquad S_{i+1}^n = N \wedge \inf\{t > S_i^n : |X^n(u)_t - X^n(u)_{S_i^n}| \geq \eta\},$$

où u est le nombre fixé dans la seconde étape. En utilisant (4.28) et $q\theta > 2N$, on montre exactement comme dans la 3ème étape de (4.8) que

$$(4.30) \quad n \geq n_2 \Longrightarrow P^n(S_q^n < N) \leq 2\varepsilon$$

$$(4.31) \quad n \geq n_2 \Longrightarrow P^n(A^n) \geq 1-\varepsilon, \text{ où } A^n = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{S_i^n = N, \text{ ou } S_i^n - S_{i-1}^n \geq \theta'\}.$$

Si jusqu'à présent la démonstration a suivi de près celle de (4.8), il nous faut maintenant introduire des étapes supplémentaires, car les relations (4.29), (4.30) et (4.31) ne concernent que les processus $X^n(u)$; autrement dit, il faut examiner les sauts de X^n aux temps $T_i^n(u)$.

<u>4ème étape</u>: <u>étude des temps</u> $T_i^n(u)$. D'abord, il existe $\sigma\in]0,\theta'/2[$ tel que $m=N/\sigma$ soit entier et que $P(\bigcap_{1\le i\le m}\{T_i^\infty(u)-T_{i-1}^\infty(u)>\sigma\})\geq 1-\varepsilon/2$. Comme $u\in U\subset U^\infty$, (3.14,ii) entraine qu'il existe $n_3\in\mathbb{N}$ avec:

(4.32) $n\geq n_3 \longrightarrow P^n(B^n)\geq 1-\varepsilon$, où $B^n=\bigcap_{1\le i\le m}\{T_i^n(u)-T_{i-1}^n(u)>\sigma\}$.

D'après (4.16,ii) il existe $\sigma'\in]0,\theta'/2[$ et $n_4\in\mathbb{N}$ tels que

$$n\geq n_4, 1\le i\le m, S^n\in \underline{\underline{T}}^n \qquad P^n[T_i^n(u)-\sigma'<S^n<T_i^n(u)\le N, |\Delta X^n(u)_{S^n}|>\eta]\le \varepsilon/mq .$$

Par suite,

(4.33) $$n\geq n_4 \longrightarrow P^n[\bigcap_{1\le i\le m}\bigcap_{1\le j\le q}\{T_i^n(u)-\sigma'<S_j^n<T_i^n(u)\le N, |\Delta X^n(u)_{S_j^n}|>\eta\}]\le \varepsilon .$$

D'après (4.20) il existe $\sigma''\in]0,\theta'/2[$ et $n_1\in\mathbb{N}$ tels que

$$n\geq n_1, 1\le i\le m \longrightarrow P^n[G^n(u)_{T_i^n(u)+\sigma''}-G^n(u)_{T_i^n(u)}\geq \varepsilon/2mqa_N f_N(\tfrac{\eta}{2})]\le \varepsilon/2mqa_N ,$$

et (4.5) entraine

$$n\geq n_1, 1\le i\le m \longrightarrow P^n[\sup_{s\le\sigma''}|X^n(u)_{(T_i^n(u)+s)\wedge N}-X^n(u)_{T_i^n(u)\wedge N}|\geq \tfrac{\eta}{2}]\le \frac{\varepsilon}{mq},$$

d'où

(4.34) $$n\geq n_1 \Longrightarrow P^n[\bigcap_{1\le i\le m}\bigcap_{1\le j\le q}\{T_i^n(u)<S_j^n<T_i^n(u)+\sigma'', |\Delta X^n(u)_{S_j^n}|>\eta\}]\le \varepsilon.$$

En combinant (4.33) et (4.34), on arrive à:

(4.35) $$\begin{cases} n\geq n_1\vee n_4 \Longrightarrow P^n(C^n)\geq 1-2\varepsilon, \quad \text{où } C^n = \\ [\bigcap_{1\le i\le m}\bigcap_{1\le j\le q}\{T_i^n(u)-\sigma'<S_j^n<T_i^n(u)+\sigma'', S_j^n\neq T_i^n(u), |\Delta X^n(u)_{S_j^n}|>\eta\}]^c .\end{cases}$$

<u>5ème étape</u>: <u>seconde subdivision de</u> $[0,N]$. Soit $n_0=n_1\vee n_2\vee n_3\vee n_4$, $\rho=\sigma\wedge\sigma'\wedge\sigma''$, et $E^n=A^n\cap B^n\cap C^n\cap\{S_q^n=N\}$. D'après (4.30), (4.31), (4.32) et (4.35), on a

(4.36) $$n\geq n_0 \longrightarrow P^n(E^n)\geq 1-6\varepsilon .$$

Fixons $\omega\in E^n$. On considère la subdivision $0=t_0<t_1<\ldots<t_p=N$ de $[0,N]$ constituée des points suivants:

$$\begin{cases} \text{- les } T_i^n(u) \text{ tels que } T_i^n(u) \leq N \text{ (donc } i \leq m, \text{ car } \omega \in B^n), \\ \text{- les } S_j^n \text{ qui n'appartiennent pas à } \bigcup_{1 \leq i \leq m}]T_i^n(u) - \sigma', T_i^n(u) + \sigma''[, \\ \text{- les points } 0 \text{ et } N. \end{cases}$$

Comme $\sigma' < \theta'/2$ et $\sigma'' < \theta'/2$, et comme $\omega \in A^n \cap B^n$, il est facile de voir que $t_i - t_{i-1} \geq \rho$ si $1 \leq i \leq p-1$, donc la subdivision $\{t_i\}$ appartient à $\mathcal{T}(N,\rho)$.

Comme tous les $T_i^n(u)$ qui sont inférieurs à N sont des points de la subdivision, on a $X_s^n - X_t^n = X^n(u)_s - X^n(u)_t$ pour $t_i \leq s \leq t < t_{i+1}$, pour tout $i \leq p-1$. Par ailleurs un intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ contient $0, 1$, ou 2, temps S_j^n et dans les deux derniers cas ces S_j^n sont dans des intervalles du type $]T_i^n(u) - \sigma', T_i^n(u) + \sigma''[$, donc vérifient $|\Delta X^n(u)_{S_j^n}| \leq \eta$. Enfin d'après (4.29), on a

$$\sup_{S_j^n < s < S_{j+1}^n} |X^n(u)_s - X^n(u)_{S_j^n}| \leq \eta.$$

Il est alors facile d'en conclure que pour tout $i \leq p-1$, on a

$$\sup_{t_i \leq s \leq t < t_{i+1}} |X_t^n - X_s^n| \leq 2\eta \quad (\text{resp. } 5\eta, \text{ resp. } 8\eta)$$

si $]t_i, t_{i+1}[$ contient 0 (resp. 1, resp. 2) temps S_j^n.

Finalement, on a montré que $E^n \subset \{w^N(X^n,\rho) \leq 8\eta\}$, donc

$$n \geq n_0 \implies P^n[w^N(X^n,\rho) > 8\eta] \leq 6\varepsilon$$

d'après (4.36), et le théorème (4.18) est démontré. ∎

(4.37) **REMARQUE:** Nous avons énoncé les théorèmes (4.8) et (4.18) pour des processus d-dimensionnels, car nous avions en vue l'application aux semimartingales.

Mais on a bien-sûr des résultats analogues si les X^n sont à valeurs dans un espace polonais $\mathcal{X}$ muni d'une distance ρ. Les théorèmes (4.8) et (4.18) sont encore valides, avec les modifications suivantes:

(a) dans les conditions (4.1) et (4.5) il faut remplacer $|X^n(u)_s - X^n(u)_S|$ par $\rho(X^n(u)_s, X^n(u)_S)$;

(b) dans les conditions (4.16) et (4.17) il faut remplacer $|\Delta X^n(u)_{S^n}|$ par $\rho(X^n(u)_{S^n-}, X^n(u)_{S^n})$.

(c) il faut remplacer (4.8,i) et (4.18,i) par la condition: $\forall N > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact de $\mathcal{X}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tels que

$$n \geq n_0 \implies P^n(\bigcap_{s \leq N} \{X_s^n \in K\}) \geq 1 - \varepsilon.$$

En effet la condition (c) est celle par laquelle il convient de remplacer (1.2,i) lorsque X^n est à valeurs dans $\mathcal{X}$, tandis que la condition (1.2,ii) reste inchangée (avec bien-sûr $\rho(f(t),f(s))$ au lieu de $|f(t)-f(s)|$ dans (1.1)). Les démonstrations de (4.8) et (4.18) sont alors strictement identiques, à ceci près que le lemme (4.7) est inutile.∎

BIBLIOGRAPHIE

1 D. ALDOUS: Stopping times and Tightness. Ann. Probab. 6, 335-340, 1978.

2 D. ALDOUS: Weak convergence of stochastic processes, for processes viewed in the Strasbourg manner. A paraitre, 1978.

3 P. BILLINGSLEY: Convergence of Probability measures. J. Wiley and Sons: New York, 1968.

4 P. BILLINGSLEY: Conditional distributions and Tightness. Ann. Probab. 2, 480-485, 1974.

5 B. GRIGELIONIS: On relative compactness of sets of probability measures in $D_{[0,\infty[}(\mathcal{X})$. Litov. Mat. Sb. XIII, 4, 83-96, 1973.

6 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes Math. 714, Springer Verlag: Heidelberg, 1979.

7 J. JACOD, J. MEMIN: Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroissements indépendants. A paraitre, Sém. Proba. XIV, 1980.

8 E. LENGLART: Relations de domination entre deux processus. Ann. Inst. H. Poincaré (B), XIII, 171-179, 1977.

9 T. LINDVALL: Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D[0,\infty[$. J. Appl. Probab. 10, 109-121, 1973.

10 M. METIVIER: Sufficient conditions for tightness and weak convergence of a sequence of processes. A paraitre, 1979.

11 P.A. MEYER: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, Lect. Notes Math 511, Springer Verlag: Heidelberg, 1976.

12 R. REBOLLEDO: La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi des processus. A paraitre (Mém. Soc. Math. de France), 1978.

13 R. REBOLLEDO: Temps d'arrêt et conditions nécessaires et suffisantes de compacité étroite pour une suite de processus. A paraitre, 1979.

14 M.L. STRAF: Weak convergence of stochastic processes with several parameters. Proc. 6th Berkeley Symp. Math Statist. Probab. 2, 187-221, 1972.

15 C. STONE: Weak convergence of stochasyic processes defined on a semifinite time interval. Proc. Amer. Math. Soc. 14, 694-696, 1963.