PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN-PIERRE OLIVIER

Vers une axiomatisation nécessaire des algèbres de correspondances en dimension finie

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 201-208
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_201_0>

VERS UNE AXIOMATISATION NECESSAIRE DES ALGEBRES DE CORRESPONDANCES EN DIMENSION FINIE

par Jean-Pierre OLIVIER

"Le présent travail est issu d'une recherche sur la théorie du mesurage selon S.S. Stevens". J'avais lancé cette phrase au début de mon exposé. Anecdotiquement. Et pour souligner l'improbable : deux exposés de ce colloque faisaient explicitement-implictement référence à des aspects de la théorie du mesurage. Celui de M. Krasner et le mien. Cette phrase ayant posé question, je vais commencer par résumer une partie du point de vue de Stevens (1,2). Auparavant je fais remarquer que l'exposé de M. Krasner a trait à l'analyse dimensionnelle (3,4), dont nous ne nous occuperons pas ici.

Stevens a essayé d'élaborer une théorie qui explique les interdits, les autorisations, qui donne un sens, surtout, aux manipulations faites sur les nombres en telle ou telle situation de "mesure" : par exemple à tout ce qui se fait pour attribuer un Q. I. à un individu.

Je résume une partie de la position de Stevens et de ses continuateurs en énoncant :

- une "bonne" définition du corps étudié,
- une "bonne" observation du caractère à mesurer,
- une "bonne" définition des appareils de mesure,
- une "bonne" description des manipulations permises sur le corps et les appareils de mesure,

indiquent tout ce qu'il est possible de faire sur les données à travers un modèle mathématique "naturel" (sic) de la situation. Le sens de ce qui est fait en découle. Pour systématiser le travail on va classer les mesures en types. Par exemple le type nominal et le type ordinal qui sont des types fondamentaux. Un instrument de mesure est fondamental lorsqu'il "est" en fait une comparaison par paires sur le corps. Situation qui se modélise par un couple (X,R) où X est un ensemble (les éléments du corps modulo une équivalence : l'indistinguabilité) et R une relation binaire ou correspondance sur cet ensemble. Le type, dans ce cadre, va se traduire par un ensemble fini de propriétés que devra vérifier la relation R :

type nominal <—> R est une congruence,

type ordinal <—> R est un ordre total.

Je passe sur les mesures dérivées, conjointes, et sur les problèmes de représentation numérique (2), qui ne nous intéressent pas ici. Et je résume maintenant quelques remarques qui nous (nous = Dany et moi, le travail présenté s'est développé à travers les échanges plutôt vifs entre Dany Serrato et l'exorateur) ont amené à ce qui suit. Les premières remarques se rangent dans dans la boîte "invariance du type" : le type reste le même lorsque l'observation se réduit à un sous corps, il reste aussi le même lorsque la relation d'indistinguabilité se fait plus fine. Nous pensons que cela veut dire, entre autres choses, que nous devons faire abstraction des éléments d'un ensemble de base dans la définition des types. Ensuite on pose le problème des mesures "équivalentes" : si, par exemple, je suppose que le corps étudié a des réponses booléennes à mes interrogations, et si R est un instrument de mesure fondamental, la négation de R est un autre instrument de mesure fondamental équivalent" à R et qui en général ne vérifiera pas les mêmes axiomes que R. Ces deux instruments de mesure doivent, pour nous, être du même type. D'où l'idée de considérer un type de mesure comme un idéal d'un objet algébrique à définir : l'objet libre à un générateur d'une structure algébrique à trouver. La recherche de cette structure voulait aussi nous soulager de la multiplicité des quantificateurs rencontrés dans les démonstrations sur le sujet. Nous avons commencé par établir des relations équationnelles entre les correspondances, par l'exemple la relation

$$(1) \qquad (PR^{-})^{-}(R^{*}Q^{-})^{-} \subseteq (PQ^{-})^{-}$$

dans laquelle R^- désigne le complémentaire de R, R^* la relation réciproque de R, la composition s'opérant "dans le sens des flèches" (la relation (1) traduit la transitivité de l'inclusion). Puis nous avons essayé d'établir des implications entre ces relations équationnelles. Nous nous sommes convaincu des possibilités de la formule (1) et donc d'une formule équivalente plus simple

$$(2) \qquad P(P^*Q)^- \subseteq Q^- .$$

Nous avons alors expérimenté les catégories que nous appelâmes de Schröder par la suite (lorsque nous découvrimes que Schröder avait établi les formules (1) et (2) dans ses écrits de 1895, (5,6)).

<u>Définitions</u>.

i) Nous appellerons catégorie ordonnée à involution une catégorie C telle que :

a) pour tout couple d'objets X, Y, l'ensemble C(X,Y) est muni d'un ordre pour lequel la composition est croissante,

b) la catégorie C est munie d'un foncteur* contravariant vérifiant $R^{**} = R$ et croissant.

ii) Nous appellerons catégorie de Schröder une catégorie ordonnée à involution dans laquelle les ensembles de morphismes sont des treillis booléens et vérifiant $P(P^*Q^-) \subseteq Q^-$.

Nous avons, très péniblement au début, puis de plus en plus facilement, établi les égalités que nous voulions. Actuellement les démonstrations qui devaient l'être sont complètement trivialisées. Quelques résultats nous ont surpris, au début (maintenant ils sont "naturels"), comme par exemple le théorème de structure de la catégorie de Schröder libre engendrée par un morphisme R soumis en plus aux égalités $R^* = R$ et $R^2 \subseteq R$ (i.e. une équivalence) : c'est un truc qui a 2^{20} éléments et que l'on peut décrire complètement (7,8). Nous pensons maintenant sans pouvoir-vouloir le démontrer que toute relation portant sur quatre correspondances, vraie dans les ensembles, est encore vraie dans une catégorie de

Schröder. Ce qui est erroné lorsque l'on passe à cinq correspondances et plus. Par exemple le théorème de Désargues qui s'écrit

$$(3)\qquad P_1Q_1 \cap P_2Q_2 \cap P_3Q_3 \subseteq (P_1 \cap P_2d_{12}^*)(Q_1 \cap d_{12}Q_2) \ ,$$

où $d_{12} = D_{12} \cap D_{13}D_{32}$ avec $D_{ij} = P_i^* P_j \cap Q_iQ_j^*$, est vrai pour les correspondances entre ensembles mais n'est pas vrai dans n'importe quelle catégorie de Schröder. Pour justifier l'association du nom de Désargues à la formule (3) et notre dernière assertion je vais donner deux exemples d'algèbres de Schröder issues de la géométrie.

Exemple 1. Soit S une sphère de dimension quelconque, à laquelle on adjoint son centre e. Sur l'algèbre des parties de $S_U\{e\}$ on définit

a) la composition de deux points comme le plus petit arc de grand cercle, ouvert, les joignant, si les deux points ne sont pas antipodaux, ni aucun des deux n'est le centre ; dans les autres cas on pose que le composé de deux points antipodaux est l'ensemble formé de ces deux points et du centre, ensuite que le composé d'un point et du centre est égal à ce point ; on étend la composition par réunion ;

b) le foncteur* en énonçant que le centre est invariant et que son action sur tout autre point donne son antipode.

Exemple 2. Soit E un ensemble muni d'une relation ternaire d'alignement, qui le munit d'une géométrie projective ; sur l'ensemble des parties de $E_U\{e\}$ on définit le foncteur transposition comme étant l'identité et la composition de deux éléments de E comme l'ensemble des points alignés avec ces deux là, l'élément e étant neutre.

Dans ces deux exemples on se convaincra que le théorème de Désargues (3) est bien celui qu'on croit. Et il existe des géométries projectives on arguésiennes. La théorie des catégories arguésiennes reste à faire.

Arrivés à ce stade de notre travail, nous avons enfin pu nous procurer et déchiffrer l'article et le livre (déjà cités) de Schröder. Et par hasard (ou plutôt en cherchant les articles de M. Krasner sur la théorie de Galois abstraite) nous sommes tombés sur l'article de M. L'Abbé, "structures algébriques suggérées par la logique mathématique " paru dans le bulletin de la Société Mathématique de France en 1958 (9). Sa lecture nous appris que ce que nous appelions désormais les catégories de Schröder étaient étudiées (ce dont nous ne doutions pas) depuis 40 ans sous le nom de "relations algebras" mais que démontrer dans ces structures les théorèmes valides pour les algèbres de relations concrètes se heurtaient à d'énormes difficultés. D'ailleurs à part L. H. Chin et A. Tarski (10), nous n'avons trouvé aucun auteur essayant de faire ce travail de démonstration. Nous pensons avoir laminé ces difficultés.

Il était temps pour nous de quitter le domaine booléen, ne serait-ce que pour essayer d'éclaircir le débat sur la notion d'équivalence d'instruments de mesure, occulté en partie, dans le cas booléen, par la dualité de la négation. Ce débat n'a guère avancé mais nous avons relevé une notion riche de possibilités.

Définition. Nous appellerons catégorie de Dedekind une catégorie ordonnée, à involution C, telle que les ensembles de morphismes soient des inf-demi-treillis et que l'on ait la propriété

(4) $$PQ \cap R \subseteq P(P^{*}R \cap Q) .$$

La relation (4), entre correspondances, est traditionnellement attribuée à Dedekind. Nous avons suivi la tradition. Il a fallu recommencer dans cette nouvelle structure une partie du travail fait dans les catégories de Schröder ; difficilement, les habitudes booléennes s'accrochent. Nous avons abandonné là ce travail pendant un certain temps. Parce que nous étions désormais convaincu que la théorie de Stevens ne menait qu'à la construction d'un alibi incantatoire. Le débat de la physique quantique sur les question du mesurage étant beaucoup plus riche et plein de promesses (11).

Deux facteurs ont relancé notre intérêt pour cette question abandonnée. D'abord nos discussions avec Y. Cesari sur ses résultats sur la représentation de certains types de codes par des monoïdes non ambigus de relations. Ensuite les demandes de plus en plus nombreuses d'utilisateurs de la (ou plutôt des) théorie(s) des systèmes. Les modélisations dans ce cadre se heurtent aux mêmes difficultés conceptuelles que celles esquissées pour la théorie du mesurage. Par ailleurs une part sensible de ces théories semble pouvoir s'intégrer dans le cadre des catégories de Dedekind. Modestement nous essayons actuellement de travailler sur les systèmes discrets et les systèmes linéaires. Les cas discret s'inscrit dans la notion d'algèbre de Carathéodory.

<u>Définition</u>. Nous appellerons algèbre de Carathéodory de dimension $\leq n$ une algèbre de Dedekind qui est un treillis distributif pour son ordre, la composition commutant aux sup finis et vérifiant

$$(5) \qquad R_1 \ldots R_n \subseteq \bigcup_{1 \leq k < \ell < n+1} R_1 \ldots R_{k-1} ' R_k \ldots R_{\ell-1} \cap \Delta) \; R_\ell \ldots R_n \; .$$

Pourquoi Carathéodory ? : la relation (5) "est" le théorème du même nom sur la sphère de bonne dimension. L'élaboration de ce cadre est en cours (7). Pas de surprise si ce n'est une simplification outrancière des démonstrations et la décomposition quasi-primitive des morphismes qui prend curieuse figure. Quant au cas linéaire, et bien nous ne pensions pas tomber sur un os. Et pourtant nous n'arrivons pas à trouver une axiomatique satisfaisante de l'algèbre des correspondances additives sur un espace vectoriel de dimension finie. Nous avons accompli sans difficulté essentielle les premiers pas, une fois dégagée la notion de foncteur prélogique (8). I.e. nous avons donné une caractérisation agréable des catégories de correspondances des catégories régulières (8) qui implique, entre autres choses, une caractérisation plaisante des catégories de correspondances des catégories abéliennes (7). De telles catégories sont en fait essentiellement des catégories de Mac-Lane.

<u>Définition</u>. Une catégorie de Mac-Lane est une catégorie de Dedekind C telle que les ensembles de morphismes soient des treillis et vérifiant $PQ \cup R \supseteq P(P^{*}R \cup Q)$, c'est-à-dire la relation de Dedekind pour l'ordre inverse.

Pourquoi de Mac Lane ? : parce que ce sont essentiellement les catégories de relations additives introduites par h dit dans (12). Nous cherchons à exprimer formellement d'algébricité, en quelque sorte, des correspondances additives sur un espace vectoriel de dimension finie. Pour l'instant ça n'a pas l'air simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] STEVENS, S. S. : "Mathematics, measurement, and psychophysics", dans Stevens S. S. (éd.), "Handbook of experimental pychology", Wiely, New-York, 1951, p. 1-49.

[2] SUPPES, P., et ZINNES, J.-L. : "Basic measurement theory", dans Luce, R. D., Bush, R. R., et Galanter, E, (éditeurs), "Handbook of mathematical psychology", vol. 1, Wiley, New-York, 1963, p. 1-76.

[3] BRIDGMAN, P. W. : "Dimensional Analysis", Yale University Press, 1931.

[4] SOURIAN, J.-M. : "Structure des sytèmes dynamiques", Dunod, Paris, 1970.

[5] SCHRODER, E. : "Note über die algebra der binären relative", Math. Ann., 46, (1895), 144-158.

[6] SCHRODER, E. : "Algebra und logik der relative", Druck und Verlag Von B. G. Teubner, Leipzig, 1895.

[7] OLIVIER, J.-P., SERRATO, D. : "Catégories de Dedekind et correspondances dans les catégories classiques et ailleurs", multigraphié, U.E.R. M.A.S.H., Université Paul Valéry, Montpellier, 1979.

[8] OLIVIER, J.-P., SERRATO, D. : "Catégories de Dedekind. Morphismes transitifs dans les catégories de Schröder", C. R. Acad. Sc. Paris, t. 290; (2 juin 1980), série A, p. 939-941.

[9] L'ABBE, M. : "Structures algébriques suggérées par la logique mathématique", Bull. Soc. Math. France, 86, (1958), 299-314.

[10] CHIN, L. H., TARSKI, A. : "Distribution and modular laws in the arithmetic of relations algebras", University of California, Publications in Math., New series 1, 9, (1951), 341-384.

[11] Colloque "Un demi-siècle de mécanique quantique", n° 25 à 41 de Fundamenta Scientiae, Universiti Louis-Pasteur, Strasbourg, 1979.

[12] Mac Lane, S. : "An algebra of additive relations", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 47, 7 (1961), 1043-1051.

Note

J'ai modifié le titre de mon exposé parce que celui annoncé était malsonnant et prétentieux ; il s'est révélé, en plus, inadéquat.

U.E.R. M.A.S.H.
Université Paul Valéry
B. P. 5043
34032 - MONTPELLIER