PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

H. CHEBLI

Sur les fonctions presque-périodiques relativement à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1981-1982, fascicule 3
« Séminaire « Équations aux dérivées partielles » », , p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1981-1982___3_A3_0>

SUR LES FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES RELATIVEMENT A UN OPERATEUR DIFFERENTIEL SINGULIER SUR $(0,\infty)$.

INTRODUCTION.

1- La propriété de compacité qui caractérise les fonctions presque-périodiques de Bohr, et qui a été établie par Bochner [8] est à la base de toutes les généralisations de la théorie des fonctions presque-périodiques, généralisations relatives à des fonctions définies sur un groupe abstrait et possédant une propriété de compacité tout à fait analogue à celle de Bochner. La généralisation qu'a proposée J. Delsarte [6], et à laquelle nous nous intéressons dans ce travail, à un point de départ tout différent ; considérons l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

l'expression de la solution générale : $u(x,t) = f(x + t) + g(x - t)$ fait apparaître le rôle du groupe des translations sur la droite réelle, en particulier si f et g sont presque-périodiques de Bohr, il en sera de même de la solution u relativement au temps t, et, cela uniformément par rapport à la variable x. Ceci suggère la généralisation suivante : soit L un opérateur différentiel linéaire du second ordre et soit u la solution générale de :

$$L_x(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$u(x,o) = f(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,o) = 0$$

Quelles conditions doit satisfaire f pour que la solution u soit presque périodique de Bohr relativement au temps t, et cela uniformément par rapport à la variable x? Dans, ce cas nous dirons que f est L-presque périodique. J. Delsarte a étudié cette question dans le cas où L est l'opérateur de Bessel

$$L\ v = v'' + \frac{2\alpha+1}{x} v' \quad , \quad x > o \quad ,$$

où α est strictement compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Il a alors mis en évidence une classe de fonctions L-presque périodiques qui, en beaucoup de points, est analogue à la classe des fonctions presque périodiques de Bohr. L'élément simple qui joue le rôle de l'exponentielle est dans ce cas la fonction :

$$x \mapsto j_\alpha(\lambda x) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(\lambda x)^\alpha} J_\alpha(\lambda x)$$

où J_α est la fonction de Bessel d'indice α. Toute la théorie est alors basée sur les formules intégrales explicites qui lient l'exponentielle à la fonction j_α, [15] , et qui transmutent les opérateurs L et $\frac{d^2}{dx^2}$.

2- L'objet du présent travail est d'étudier la question posée plus haut relativement à une classe d'opérateurs différentiels L de la forme :

$$L\ v = -\frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx}(A(x) \frac{dv}{dx})$$

où A est une fonction positive définie sur $[o,\infty[$ et satisfaisant certaines hypothèses de régularité et de convexité assez larges de manière que la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace symétrique de type non compact et de rang 1 soit de ce type. Ces hypothèses que nous préciserons au second paragraphe, nous permettent, en outre, de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction notée $\varphi_\lambda(.)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, qui vérifie :

$$L\varphi_\lambda - (\lambda^2 + \rho^2)\varphi_\lambda = 0$$

$$\varphi_\lambda(o) = 1 \ , \ \frac{d}{dx}\varphi_\lambda(o) = 0$$

ρ désigne la limite à l'infini de $\frac{1}{2}\frac{A'}{A}(x)$. Cette solution jouera le rôle de l'exponentielle dans la théorie de Bohr.

La suite de l'exposé est divisée essentiellement en trois parties.

* Dans la première, nous dégageons les principales propriétés de φ_λ que voici :

Propriété d'orthogonalité : Pour tout λ et μ strictement positifs

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R}\int_0^R \varphi_\lambda(x)\,\varphi_\mu(x)\,A(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \mu \\ 2|C(\lambda)|^2 & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

où C(.) est une certaine fonction qu'on précisera.

Représentation intégrale : Pour tout $x > o$, il existe une fonction $W(x;.)$ continue paire, positive et à support dans $[-x,x]$ telle que pour tout complexe λ :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x W(x,t)\cos\lambda t\,dt$$

Formule produit : Pour tout x et $y > o$, il existe une mesure de probabilité notée $T(x,y,dz)$ à support dans $[|x-y|\,,\,x+y]$ telle que pour tout complexe λ :

$$\varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} \varphi_\lambda(z)\,T(x,y,dz)$$

ces deux dernières propriétés nous permettent de définir les deux opérateurs suivants sur l'espace des fonctions continues :

$$\mathcal{A}(F)(x) = \begin{cases} \int_0^x F(\tau)\,W(x,\tau)\,d\tau & ; x > o \\ F(o) & ; x = o \end{cases}$$

$$T^x F(y) = \begin{cases} \int_{|x-y|}^{x+y} F(z)\,T(x,y,dz) & ; x,y > o \\ F(y) & ; x = o \end{cases}$$

Le premier est appelé opérateur de Poisson généralisé, il transmute les opérateurs $L - \rho^2$ et $-\frac{d^2}{dx^2}$ ($(L - \rho^2)\,\mathcal{A} = -\mathcal{A}(\frac{d^2}{dx^2})$). Le second opérateur est appelé opérateur de translation généralisé, il joue le rôle de la translation ordinaire dans la théorie de Bohr.

* Dans la seconde partie, nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :

- $\mathcal{B}_0$ est l'espace des fonctions paires, presque-périodiques de Bohr et de moyenne de Bohr nulle.

- $\mathcal{B}'_0$ est le sous-espace de $\mathcal{B}_0$ des fonctions qui sont dérivées d'une fonction presque-périodique impaire.

- $\mathcal{B}_L$ est l'espace image par $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}_0$: <u>c'est l'espace des fonctions L-presque périodiques</u>.

- Enfin $\mathcal{H}_L$ désignera l'espace image par $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}'_0$.

Nous montrerons les principaux résultats que voici :

<u>THEOREME</u> : *Si f est dans $\mathcal{B}_L$, la limite*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(x)\, \varphi_\lambda(x)\, A(x)\, dx \quad , \quad \lambda > 0$$

existe et est finie, elle est nulle sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs positives (λ_n) de λ, valeurs que nous appellerons les exposants de Fourier sphérique de f ; pour ces valeurs la limite s'écrit :

$$2\, a_n\, |C(\lambda_n)|^2$$

où la série $\sum |a_n|^2$ est convergente. La série $\sum a_n \varphi_{\lambda_n}(x)$ est appelé série de Fourier sphérique de f et nous écrivons :

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_{\lambda_n}(x)$$

<u>THEOREME</u> : *Si f est dans $\mathcal{B}_L$, alors*

i) $T^s f$ est dans $\mathcal{B}_L$ pour tout $s \geqslant 0$.

ii) De toute suite $T^{s_1}f, T^{s_2}f, \ldots, T^{s_n}f, \ldots$ on peut extraire une sous suite uniformément convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers une fonction dans $\mathcal{B}_L$.

* Dans la troisième partie nous étudions les propriétés du sous-espace $\mathcal{H}_L$, et nous montrons en outre les résultats suivants :

<u>THEOREME</u> : *Pour toute fonction f dans $\mathcal{H}_L$, la fonction*

$$x \mapsto \sqrt{A(x)}\, f(x)$$

est bornée dans $[0,\infty[$.

Ce théorème permet de prouver le suivant.

<u>THEOREME</u> : *Si f et g sont dans $\mathcal{H}_L$, la limite*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_0^R f(x)\, \overline{g(x)}\, A(x)\, dx$$

existe et est finie, elle est nulle si les deux fonctions n'ont aucun exposant de Fourier sphérique en commun ; sinon elle a pour valeur la somme de la série convergente

$$\sum a_n \bar{b}_n |c(\lambda_n)|^2$$

où les (λ_n) sont les exposants de Fourier sphériques communs à f et g et où (a_n) et (b_n) sont respectivement les coefficients de Fourier sphériques de f et g.

Nous terminons, cette introduction par les deux remarques suivantes.

<u>Remarque 1</u> : L'introduction de fonctions presque-périodiques de Bohr qui sont en plus de moyenne de Bohr nulle est dictée par le fait que la propriété d'orthogonalité de φ_λ tombe, en général, en défaut lorsque $\lambda = \mu = 0$; pour s'en convaincre il suffit de noter que lorsque $A(x) = \mathrm{sh}^2 x$, φ_0 est donnée par :

$$\varphi_0(x) = \frac{x}{\mathrm{sh} x}$$

<u>Remarque 2</u> : La réponse à la question posée au début de l'introduction peut se formuler de la manière suivante : si f est dans l'espace $C_*^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et paires alors :

<u>u est presque-périodique de Bohr par rapport à t et de moyenne de Bohr (uniformément en x) si et seulement si f est dans $\mathcal{B}_L$.</u>

La condition à priori sur f d'être dans $C_*^\infty(\mathbb{R})$ est due à ce que l'opérateur de transmutation $\mathcal{A}$ est bijectif de $C_*^\infty(\mathbb{R})$ sur lui-même et non bijectif de $C_*(\mathbb{R})$ sur lui-même [12]. Cependant on peut remplacer, cette condition à priori en demandant que f soit $\mathcal{A}(C_*(\mathbb{R}))$ et l'énoncé reste le même.

I - L'OPERATEUR L ET LES SOLUTIONS DE L'EQUATION (1).

1- L'OPERATEUR L : Nous désignons par L un opérateur différentiel de la forme :

$$Lu = - \frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx}(A(x) \frac{du}{dx}) \quad , \quad x > o$$

où A est une fonction définie sur $[o,\infty[$, à valeurs positives et vérifiant les hypothèses suivantes.

(H_1) - Hypothèse de Convexité : Nous supposons que la fonction A est croissante, tend vers l'infini avec x et que la fonction $\frac{A'}{A}$ est décroissante ; nous posons :

$$\rho = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \frac{A'(x)}{A(x)}$$

(H_2) - Hypothèse de Régularité :

(H_{2o}) Au voisinage de l'origine : la fonction A s'écrit sous la forme

$$A(x) = x^{2\alpha+1} B(x)$$

où B est de classe $C^{\infty}(R)$, paire, strictement positive, nous pourrons supposer $B(o) = 1$ et où $\alpha > \frac{1}{2}$.

$(H_{2\infty})$ Au voisinage de l'infini : soit q(.) la fonction définie sur $]o,\infty[$ par

$$q(x) = \frac{1}{4}(\frac{A'(x)}{A(x)})^2 - \rho^2 + \frac{1}{2}(\frac{A'}{A})'\ (x)$$

Nous supposerons que la fonction $x \mapsto x^2 q(x)$ est intégrable sur $[o,\infty[$. Remarquons tout de suite que cette condition intervient essentiellement dans l'assertion 2 de la proposition 5 et dans la proposition 8 et les résultats qui la suivent. Nous poserons :

$$\sigma_j(x) = \int_x^\infty t^j |q(t)| dt \ , \ j = 0,1,2 \ ; \quad x > 0.$$

Exemple : Si X est un espace riemannien symétrique de type non compact et de rang 1, la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X est du type L [10] avec :

$$A(x) = sh^n x \ ch^m x$$

où n et m sont des entiers naturels $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 0$.

2- LES SOLUTIONS DE L'EQUATION (1) : Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\lambda \in \mathbb{C} \ , \ Lu - (\lambda^2 + \rho^2)u = 0 \qquad (1)$$

si l'on pose $v = \sqrt{A}u$, et si u est solution de (1), v est solution de :

$$v'' + \lambda^2 v = q(x)v \qquad (2)$$

les hypothèses sur A montre que l'on peut écrire (2) sous la forme suivante ·

$$v'' - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{x^2} v + \lambda^2 v = \chi(x) \qquad (3)$$

où χ est une fonction de classe $C^\infty(R)$ et intégrable.

* Les hypothèses (H_{2°) montre que l'origine est un point singulier régulier ; les racines de l'équation caractéristique étant 0 et -2α, le théorème de Bôcher [2] permet de montrer qu'il existe une unique solution de (1) qui sera notée dans toute la suite φ_λ et qui vérifie :

$$\varphi_\lambda(o) = 1 \ , \ \frac{d\varphi_\lambda}{dx}(o) = 0$$

* Le changement de variable $t = e^{-x}$, dans l'équation (1), ramène le point à l'infini, à l'origine ce dernier étant un point singulier régulier où

les racines de l'équation caractéristique sont $\pm i\lambda - \rho$, il en résulte qu'il existe deux solutions de l'équation (1), que nous noterons dans la suite $\Phi_{\pm\lambda}$, linéairement indépendantes si $\lambda \neq 0$, et telles que :

$$\Phi_{\pm\lambda}(x) = e^{(\pm i\lambda-\rho)x}\, V_{\pm}(x,\lambda)$$

$$\Phi'_{\pm\lambda}(x) = (\pm i\lambda-\rho)\, e^{(\pm i\lambda-\rho)x}\, V^1_{\pm}(x,\lambda)$$

où $\displaystyle\lim_{x\to\infty} V_{\pm}(x,\lambda) = \lim_{x\to\infty} V^1_{\pm}(x,\lambda) = 1$

de plus, si $\lambda = 0$, avec la solution Φ_0, il existe une deuxième ψ_0 telle que :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{A}(x)\,[\Psi_0(x) - x\Phi_0(x)] = 0$$

En exploitant les hypothèses $(H_{2\infty})$ et en résolvant l'équation (2) par la méthode de la variation de la constante, nous pouvons préciser le comportement de $\Phi_{\pm\lambda}$ comme suit :

<u>Proposition 1</u> : Pour tout complexe λ, de partie imaginaire négative ou nulle, la solution $\Phi_{-\lambda}$ admet la représentation intégrale suivante :

$$\sqrt{A(x)}\;\Phi_{-\lambda}(x) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty k(x,t)\, e^{-i\lambda t}dt \quad , \quad x > 0$$

où $k(.,.)$ est un noyau défini pour $0 < x \leqslant t$, admettant des dérivées partielles continues à n'importe quel ordre et tel que :

$$\int_x^\infty |k(x,t)|dt \leqslant \sigma_1(x)\, e^{\sigma_1(x)} \;,\; \int_x^\infty t|k(x,t)|dt \leqslant \frac{1}{4}\,\sigma_2(x)\, e^{\sigma_1(x)}$$

$$\int_x^\infty \left|\frac{\partial k}{\partial t}(x;t)\right|dt \leqslant \frac{1}{2}\,\sigma_0(x) + \sigma_0^2(x)\,\sigma_1(x)\, e^{\sigma_1(x)}$$

la représentation de Φ_λ, valable pour tout complexe λ de partie imaginaire positive ou nulle, s'obtient à partir de celle de $\Phi_{-\lambda}$ en changeant λ en $-\lambda$; on peut voir la démonstration de cette proposition dans [ ], p. 20.

<u>Corollaire 2</u> :

1) Pour tout $x > o$, la fonction $\lambda \to \Phi_{\pm\lambda}(x)$ est holomorphe dans l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(\pm\lambda) > o\}$, elle est continûment dérivable dans $\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(\pm\lambda) \geqslant o\}$.

2) Lorsque $|\lambda x|$ vers l'infini, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt{A}(x)\ \Phi_{\pm\lambda}(x) = e^{\pm i\lambda x}\,[1 + O(\tfrac{1}{\lambda x})]$$

$$(\sqrt{A}(x)\ \Phi_{\pm\lambda}(x))' = \pm\, i\lambda\, e^{\pm i\lambda x}\,[1 + O(\tfrac{1}{\lambda x})]$$

ce corollaire est une conséquence immédiate de la proposition 1.

Il est aussi important de connaître le comportement de la solution φ_λ au voisinage de l'infini ; pour cela on résoud l'équation (3) par la méthode de la variation de la constante ; nous en déduisons la proposition suivante :

<u>Proposition 3</u> : Il existe deux constantes positives N_o et N_1 telles que pour $|\lambda| \geqslant N_o$, $x > N_1$, on ait :

$$\sqrt{A(x)}\ \ \varphi_\lambda(x) = x^{\frac{1}{2}+\alpha}\ j_\alpha(\lambda x) + \lambda^{-(\frac{3}{2}+\alpha)}\ \{e^{i\lambda x}\ O(1) + e^{-i\lambda x}\ O(1)\}$$

$$(\sqrt{A(x)}\,\varphi_\lambda(x))' = (x^{\frac{1}{2}+\alpha}\ \ j_\alpha(\lambda x))' + \lambda^{-\frac{1}{2}+\alpha}\ \{e^{i\lambda x}\ O(1) + e^{-i\lambda x}\ O(1)\}$$

où $O(1)$ sont des fonctions bornées lorsque $|\lambda x|$ tend vers l'infini.

3 - FORMULE PRODUIT ET REPRESENTATION INTEGRALE DE φ_λ.

<u>Proposition 4</u> :

1) Pour tout x et y positifs, il existe une mesure de probabilité à support dans $[\,|x-y|\,,\ x+y]$, notée $T(x,y,.)$, telle que pour tout complexe λ, on ait :

$$\varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} \varphi_\lambda(z)\,T(x,y,dz)$$

2) Pour tout $x > o$, il existe un noyau $W(x,t)$ paire, continue à support dans $[-x,x]$ tel que pour tout complexe λ, on ait :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x \cos \lambda t . W(x,t)\,dt$$

<u>Démonstration</u>. La première assertion est démontrée dans [3] voir aussi [4]. Le comportement asymptotique de φ_λ à l'infini et le fait que T soit une mesure de probabilité, permet de montrer que pour tout complexe λ de partie imaginaire dans $[-\rho,\rho]$.

$$|\varphi_\lambda(x)| \leqslant 1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, il est déjà prouver dans [4] l'existence d'une mesure positive $W(x,dt)$ à support dans $[-x,x]$ et telle que :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x \cos \lambda t\ W(x;dt)$$

La proposition précédente et le théorème de Paley-Wiener, montrent l'existence d'une fonction $t \mapsto \tilde{W}(x,t)$, continue, paire à support dans $[-x,x]$ et telle que :

$$\sqrt{A(x)}\,\varphi_\lambda(x) - x^{\frac{1}{2}+\alpha}\, j_\alpha(\lambda x) = \int_0^x \cos \lambda t\ \tilde{W}(x,t)\,dt$$

la représentation intégrale classique de j_α ([15]) termine la preuve de la deuxième assertion.

4 - LA FONCTION C(.) ET LA PROPRIETE D'ORTHOGONALITE DES φ_λ, $\lambda > 0$.

Les solutions $\Phi_{\pm\lambda}$, $\lambda \neq 0$, étant linéairement indépendantes, la solution φ_λ étant paire en λ, nous en déduisons qu'il existe une constante $C(\lambda)$ telle que :

$$\varphi_\lambda(x) = C(\lambda)\ \Phi_\lambda(x) + C(-\lambda)\ \Phi_{-\lambda}(x)$$

désignons par $[\varphi_\lambda, \Phi_\lambda]$ le wronskien de φ_λ et Φ_λ :

$$[\varphi_\lambda, \Phi_\lambda] = A(x)\ [\varphi_\lambda(x)\ \Phi'_\lambda(x) - \varphi'_\lambda(x)\ \Phi_\lambda(x)]$$

le wronskien de deux solutions de (1) étant indépendant de x, le comportement à l'infini de $\Phi_{\pm\lambda}$ permet de montrer que :

$$[\varphi_\lambda, \Phi_\lambda] = 2i\ \lambda C(-\lambda)$$

La proposition suivante est alors une conséquence des propriétés de φ_λ et Φ_λ et du comportement asymptotique de j_α.

<u>Proposition 5</u> :

1) Pour tout λ réel :

$$\overline{C(\lambda)} = C(-\lambda)$$

2) La fonction $\lambda \mapsto \lambda\ C(-\lambda)$ est holomorphe dans $\{\lambda \in \mathbb{C}\ /\ \mathrm{Im}\ \lambda > 0\}$, et continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, son seul zéro réel possible est $\lambda = 0$.

3) La fonction C(.) admet le comportement asymptotique suivant lorsque λ tend vers l'infini :

$$C(\lambda) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\ e^{\frac{1+2\alpha}{4}\pi i}\ \lambda^{-(\frac{1}{2}+\alpha)}\ [1 + 0(\frac{1}{\lambda})]$$

<u>Remarque 1</u> : L'origine $\lambda = 0$ est un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda\ C(-\lambda)$ seulement lorsque φ_0 et Φ_0 sont linéairement dépendantes, dans ce cas la fonction C(.) est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \to \sqrt{A(x)}\ \varphi_0(x)$ est bornée, et puisque d'après la proposition 4, on a toujours :

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_0(x) \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$$

il en résulte que la fonction $x \mapsto \sqrt{A(x)}\, \varphi_\lambda(x)$ est bornée sur $[o,\infty[$ indépendamment de $\lambda \geqslant 0$. Dans le cas où $\lambda = 0$ n'est pas un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda\, C(-\lambda)$, nous pouvons dire qu'il existe une constante non nulle a et une fonction b(.) continue sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$C(\lambda) = \frac{a}{\lambda} + b(\lambda)$$

de plus

$$\sqrt{A(x)}\, \varphi_o(x) = O(x) \quad , \quad x \to \infty$$

<u>Remarque 2</u> : Dans le cas de l'opérateur de Bessel, la fonction $C(\lambda)$ se comporte comme $\lambda^{-(\frac{1}{2}+\alpha)}$ aussi au voisinage de l'origine qu'à l'infini.

<u>*THEOREME 1*</u> *: Pour $\lambda > 0$ et $\mu > 0$:*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R \varphi_\lambda(x)\, \varphi_\mu(x)\, A(x) = \begin{cases} 2|C(\lambda)|^2 & , \text{ si } \lambda = \mu \\ 0 & , \text{ si } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : On exprime φ_λ à l'aide de $\Phi_{\pm\lambda}$ et on utilise la proposition 1.

Désignons par $L^2(A(x)dx)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur (o,∞) pour la mesure $A(x)dx$, W le sous-espace de $L^2(A(x)dx)$ des fonctions v absolument continues ainsi que leurs dérivées premières et telles que $L(u)$ est dans $L^2(A(x)dx)$, enfin W_o le sous espace de W des fonctions u telles que $\lim\limits_{x\to o} A(x)\, u'(x) = 0$. Soit D_L l'ensemble suivant :

$$D_L = \begin{cases} W & \text{si } \alpha \geqslant 1 \\ W_o & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

L'opérateur (L, D_L) est auto-adjoint de spectre absolument continu égal à $[\rho^2, \infty[$, la transformation

$$f \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\, \varphi_\lambda(x)\, A(x)\, dx$$

réalise un isomorphisme isométrique de $L^2(A(x)dx)$ sur l'espace $L^2((2\pi)^{-1}|C(\lambda)|^{-2}d\lambda)$ des fonctions de carré sommable sur $(0,\infty)$ pour la mesure $\frac{d\lambda}{2\pi|C(\lambda)|^2}$, dont l'inverse est donnée par :

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\, \varphi_\lambda(x)\, \frac{d\lambda}{2\pi|C(\lambda)|^2}$$

Les deux intégrales précédentes étant convergentes respectivement dans $L^2((2\pi)^{-1}|C(\lambda)|^{-2}d\lambda)$ et $L^2(A(x)dx)$, on a donc l'égalité de Plancherel :

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\, A(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\hat{f}(\lambda)|^2\, \frac{d\lambda}{|C(\lambda)|^2} \qquad (4)$$

pour les détails, on peut voir [5].

<u>Notations</u> : Dans la suite L^o désignera l'opérateur associé à la fonction $A^o : x \mapsto \operatorname{sh} x^{2\alpha+1}$; W^o, T^o, K^o, φ^o_λ, $\Phi^o_{\pm\lambda}$, C^o, a^o, b^o,... désigneront les fonctions associées à l'opérateur L^o comme dans tout ce qui a précédé ; nous avons en particulier [9] :

$$\varphi^o_\lambda(x) = \frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\operatorname{sh} x^{-2\alpha}\int_0^x (\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos\lambda t\, dt \qquad (5)$$

Nous remarquons tout de suite que φ^o_0 et Φ^o_0 sont linéairement indépendantes si bien que nous avons :

$$C^o(\lambda) = \frac{a^o}{\lambda} + b^o(\lambda)\ ,\ \sqrt{A^o(x)}\,\varphi^o_0(x) = \gamma^o x + O(1),\ x \to +\infty$$
$$a^o \neq 0\ ,\ \gamma^o \neq 0. \qquad (6)$$

<u>II - LES FONCTIONS L-PRESQUE PERIODIQUES ET LEURS DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE FOURIER SPHERIQUE.</u>

<u>I- L'ESPACE B_L.</u>

Soient $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et paires sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et paires sur $\mathbb{R}$; soit $\mathcal{B}_0$ l'espace des fonctions paires, presque-périodique de Bohr et de moyenne de Bohr nulle :

$$f \in \mathcal{B}_0 \; : \; \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(x)dx = 0$$

les exposants de Fourier de telles fonctions sont strictement positifs.
Soient $\mathcal{A}$ et T^s, $s \geq 0$, les opérateurs définies sur $C_*(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{A}_x[f(\tau)] = \mathcal{A}(f)(x) = \begin{cases} \int_0^x f(\tau)\, W(x,\tau)d\tau & x > 0 \\ f(0) & x = 0 \end{cases}$$

$$T^s f(x) = T^x f(s) = \begin{cases} \int_{|x-s|}^{x+s} f(z)\, T(x,s,dz) & , s > 0,\ x > 0 \\ f(x) & , s = 0 \end{cases}$$

le noyau $W(.,.)$ et la mesure $T(x,s,.)$ étant définis dans la proposition 4.
Les opérateurs $\mathcal{A}$ et T^s se prolongent, par parité , en des opérateurs linéaires de $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$; [7] ou [14] ; la proposition 4 montre de plus que :

$$||\mathcal{A}(f)||_\infty \leq ||f||_\infty \quad ||T^s f||_\infty \leq ||f||_\infty$$

soit $\mathcal{B}_L$ l'image de $\mathcal{B}_0$ par l'opérateur $\mathcal{A}$; si f est dans $\mathcal{B}_L$ nous désignerons par F_f sa pré-image dans $\mathcal{B}_0$:

$$f(x) = \int_0^x F_f(\tau)\, W(x,\tau)d\tau$$

<u>Définition</u> : Une fonction f est dite L-presque périodique si et seulement si elle est dans $\mathcal{B}_L$.
Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ et supposons qu'elle soit image par $\mathcal{A}$ d'une

fonction F_f dans $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$; posons :

$$\Psi_f(x,t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}_x[F_f(t+\tau)+F_f(t-\tau)]$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ agissant par rapport à la variable τ.

<u>Proposition 6</u> : La fonction F_f est dans $\mathcal{B}_0$ si et seulement si la fonction $\Psi_f(x,.)$ est paire presque périodique de Bohr, de moyenne de Bohr nulle, et cela uniformément par rapport à x.

La démonstration repose sur le fait que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné d'une part, et sur le fait que $\Psi_f(s,.) = F_f(.)$ d'autre part.

Cette proposition justifie la remarque 2 de l'introduction.

<u>Exemple</u> : Toute fonction f de la forme :

$$f(x) = \sum_{q=1}^{N} \beta_q \varphi_{\lambda_q}(x) \quad , \lambda_q > 0 \ , \beta_q \in \mathbb{C}$$

est dans $\mathcal{B}_L$ et pré-image est le polynôme trigonométrique

$$F_f(x) = \sum_{q=1}^{N} \beta_q \cos \lambda_q x$$

<u>Définition</u> : Un polynôme sphérique P est toute fonction de la forme :

$$P(x) = \sum_{q=1}^{N} \beta_q \varphi_{\lambda_q}(x) \quad , \lambda_q > 0 \ , \beta_q \in \mathbb{C}.$$

<u>THEOREME 2</u> :

(i) Toute fonction f de $\mathcal{B}_L$ peut être approchée uniformément dans $\overline{\mathbb{R}}$ par une suite de polynômes sphériques et cela d'une infinité de manières.

(ii) Si f est dans $\mathcal{B}_L$, toutes ses translatées $(T^s f)$, $s \geq 0$, sont dans $\mathcal{B}_L$.

Démonstration :

(i) Résulte de ce que toute fonction de $\mathcal{B}_0$ peut être approchée uniformément dans $\bar{R}$ par une suite de polynômes trigonométriques paires et sans terme constant, et du fait que $\mathcal{A}$ est borné sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$.

(ii) En remarquant que pour tout $\lambda > o$

$$\varphi_\lambda(x)\ \varphi_\lambda(s) = \frac{1}{2}\mathcal{A}_x\ \{\mathcal{A}_s[\cos\lambda(\tau+\sigma) + \cos\lambda(\tau-\sigma)]\}$$

où $\mathcal{A}_s$ agit par rapport à σ et $\mathcal{A}_x$ par rapport à τ, nous en déduisons que pour tout polynôme sphérique P :

$$T^s P(x) = \mathcal{A}_x[\Psi_P(s,\tau)]$$

l'étape (i) et le fait que T^s est borné sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ montrent que pour toute fonction f de $\mathcal{B}_L$:

$$T^s f(x) = \mathcal{A}_x[\Psi_f(p,\tau)]$$

la proposition 6 termine la démonstration de (ii).

2 - DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER SPHERIQUE.

Soit f dans $\mathcal{B}_L$ et F_f sa pré-image ; désignons par (λ_q) et $(\mathcal{B}_q)$ respectivement les exposants de Fourier et les coefficients de Fourier de F_f, nous avons les relations classiques suivantes :

$$\mathcal{B}_q = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R}\int_0^R F_f(x)\cos\lambda_q x\cdot dx \quad , \quad q = 1,2,\dots$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} |\mathcal{B}_q|^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R}\int_0^R |F_f(x)|^2 dx$$

suivant les conventions habituelles, nous écrivons :

$$F_f(x) \sim \sum \beta_q \cos \lambda_q x$$

Définition : Nous dirons que (λ_q) et (β_q) sont respectivement les exposants et les coefficients de Fourier sphérique de la fonction f, et nous écrirons :

$$f(x) \sim \sum \beta_q \varphi_{\lambda_q}(x)$$

le second membre étant appelé la série de Fourier sphérique de f.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant.

THEOREME 3 : Soit f une fonction L-presque périodique dont les exposants et les coefficients de Fourier sphérique sont respectivement (λ_q) et (β_q). Alors pour tout λ strictement positif :

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_o^R f(x)\, \varphi_\lambda(x)\, A(x)dx = \begin{cases} 2\beta_q |C(\lambda_q)|^2 & si\ \lambda = \lambda_q \\ o & si\ \lambda \neq \lambda_q\ \forall_q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démonstration : Soient f dans $\mathcal{B}_L$, F_f sa pré-image (dans $\mathcal{B}_0$), pour tout $\varepsilon > o$, il existe un polynôme trigonométrique p de la forme :

$$p(x) = \sum_{q=1}^{N} \gamma_q \cos \lambda_q x$$

où (λ_q) sont les exposants de Fourier de F_f, tel que :

$$||F_f - p||_\infty \leqslant \varepsilon$$

en posant $\gamma_q = o$ pour $q > N$, on a aussi :

$$|\gamma_q - \beta_q| \leqslant \{ \sum_{q=1}^{\infty} |\gamma_q - \lambda_q|^2 \}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \lim_{R\to\infty} \frac{2}{R} \int_0^R |F_f(x) - p(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon \sqrt{2}$$

soit $P = \mathcal{a}(p)$, le théorème 1 montre qu'il existe $R_o > 0$ tel que :

$$R \geq R_o \Longrightarrow \left| \frac{1}{R} \int P(x)\, \varphi_{\lambda_q}(x)\, A(x)\, dx - 2\, \gamma_q |C(\lambda_q)|^2 \right| \leq \varepsilon$$

l'inégalité triangulaire et ce qui précède montre alors que :

$$R \geq R_o \Longrightarrow \left| \frac{1}{R} \int_o^R f(x) \varphi_{\lambda_q}(x) A(x) dx - 2\beta_q |C(\lambda_q)|^2 \right| \leq \left| \frac{1}{R} \int_o^R (f(x) - P(x) \varphi_{\lambda_q}(x) A(x) dx \right| +$$

$$\varepsilon(1 + 2|C(\lambda_q)|^2 \sqrt{2})$$

posons

$$J_q(R,t) = \int_t^R \varphi_{\lambda_q}(x)\, W(x,t)\, A(x) dx$$

le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder permettent d'écrire :

$$\left|\frac{1}{R} \int_o^R (f(x) - P(x) A(x) \varphi_{\lambda_q}(x) dx \right| \leq \left\{\frac{1}{R} \int_o^R |F_f(x) - p(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{1}{R} \int_o^R |J_q(R,t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

De cette inégalité et de celle au-dessus, résulte que le théorème est une conséquence du lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Il existe une constante M telle que :

$$R \geq R_o \Longrightarrow \frac{1}{R} \int_o^R |J_q(R,t)|^2\, dt \leq M.$$

<u>Démonstration du lemme</u> : la démonstration est assez technique et longue, nous en donnerons les principales étapes ; on remarque d'abord que d'après la formule de Fourier-Plancherel classique :

$$\frac{1}{R} \int_o^R |J_q(R,t)|^2\, dt = \frac{2}{\pi R} \int_o^\infty \left| \int_o^R \varphi_{\lambda_q}(r)\, \varphi_\mu(r)\, A(r)\, dr \right|^2 d\mu$$

(a) <u>Pour tout $m > 0$, la fonction</u> $R \mapsto \frac{1}{R} \int_m^\infty \left| \int_o^R \varphi_{\lambda_q}(r) \varphi_\mu(r) A(r) dr \right|^2 d\mu$,

<u>est bornée sur</u> $[R_o,\infty[$.

La démonstration utilise la formule (4), les propriétés de $C(\lambda)$ au voisinage de l'infini et le théorème 1.

(b) <u>Soient m_o et R_o fixés,</u> $\frac{1}{R_o} < m_o < \lambda_q$; alors la fonction

$$R \mapsto \frac{1}{R}\int_{\frac{1}{R}}^{m} \left|\int_1^R \varphi_{\lambda_q}(r)\,\varphi_\mu(r)\,A(r)\,dr\right|^2 d\mu$$ <u>est bornée sur</u> $[R_o,\infty[$.

Pour le voir, on exprime φ_μ à l'aide de $\Phi_{\pm\mu}$ et on utilise la représentation intégrale de $\Phi_{\pm\mu}$ (proposition 1).

(c) <u>La fonction</u> $R \mapsto \frac{1}{R}\int_0^{\frac{1}{R}} \left|\int_1^R \varphi_\mu(r)\,\varphi_{\lambda_q}(r)\,A(r)\,dr\right|^2 d\mu$ <u>est bornée</u> sur $[R_o,\infty[$. Pour la preuve de (c), on distingue les deux cas suivants :

- Si φ_o et Φ_o sont linéairement dépendantes, l'assertion résulte de la remarque 1 suivant la proposition 5.

- Si φ_o et Φ_o sont linéairement indépendantes, on écrit alors $\varphi_o(x)\,\sqrt{A(x)} = \gamma x + O(1)$, $x \to \infty$, on pose :

$$\varphi_\lambda^1(x) = \frac{\gamma^o}{\gamma}\,\varphi_\lambda .$$

où γ^o est défini par (6), on montre alors d'une part :

$$R \mapsto \frac{1}{R}\int_0^{\frac{1}{R}} \left|\int_1^R [\varphi_{\lambda_q}^1(x)\,\varphi_\mu^1(x)\,A(x) - \varphi_{\lambda_q}^o(x)\,\varphi_\mu^o(x)\,A^o(x)]\,dx\right|^2 d\mu$$

est bornée sur $[R_o,\infty[$, et que d'autre part, en utilisant (5)

$$R \mapsto \frac{1}{R}\int_0^{\frac{1}{R}} \left|\int_1^R \varphi_{\lambda_q}^o(x)\,\varphi_\mu^o(x)\,A^o(x)\,dx\right|^2 d\mu$$

est aussi bornée sur $[R_0, \infty[$; dans cette dernière étape il y a lieu de distinguer aussi les cas $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \alpha$.

Proposition 7 : Soit f dans $\mathcal{B}_L$, dont les exposants et les coefficients de Fourier sphérique sont respectivement (λ_q) et $(\mathcal{B}_q)$, alors :

i) $T^s f$, $s \geq 0$, a les mêmes exposantes de Fourier sphérique que f.

ii) Les coefficients de Fourier sphérique de $T^s f$ sont $(\mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(s))$.

Il suffit seulement de se rappeler que la pré-image de $T^s f$ est la fonction :

$$t \mapsto \Psi_f(s,t) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_s \, [F_f(t+\tau) + F_f(t-\tau)]$$

3 - PROPRIETE DE COMPACITE.

Soit f dans $\mathcal{B}_L$ et F_f sa pré-image et supposons que :

$$f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x) \quad ; \quad F_f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \cos \lambda_q x$$

nous avons donc

$$\Psi_f(s,x) \sim \sum \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(s) \cos \lambda_q x$$

THEOREME 4 : De toute suite $(T^{s_m} f)$, $m \in \mathbb{N}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur $\bar{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

(a) On remarque d'abord que grâce en fait que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné par 1, la famille $\Psi_f(s_m,.)$ est également presque-périodique de Bohr et également uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Il résulte de (a) que de la suite $\Psi_f(s_m,.)$, $m \in \mathbb{N}$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur $\bar{R}$.

(c) Le théorème résulte alors de (b).

Remarque 1 : La démonstration de (b) est analogue à celle du théorème page 304 de [6].

Remarque 2 : Le théorème ci-dessus constitue une généralisation partielle du théorème de Bochner qui caractérise les fonctions presque-périodiques.

III - L'ESPACE $\mathcal{H}_L$ ET LE PRODUIT SCALAIRE.

Soit f dans $\mathcal{B}_L$:

$$f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x)$$

la série $\sum |\mathcal{B}_q|^2$ est convergente et a pour somme :

$$\lim_{R \to \infty} \frac{2}{R} \int_0^R |F_f(x)|^2 \, dx$$

Cependant rien n'assure en général la convergence de la série $\sum |\mathcal{B}_q|^2 |C(\lambda_q)|^2$ si bien que l'intégrale :

$$\frac{1}{R} \int_0^R |f(x)|^2 A(x) \, dx$$

n'admet pas de limite lorsque R tend vers l'infini, c'est ce qui nous a conduit à introduire le sous-espace $\mathcal{H}_L$ suivant :

$\mathcal{B}'_0$ étant le sous-espace de $\mathcal{B}_0$ des fonctions F dont la primitive G, qui s'annule à l'origine est presque-périodique de Bohr impaire.

Définition : $\mathcal{H}_L$ est le sous-espace de $\mathcal{B}_L$ des fonctions f dont la pré-image F_f est dans $\mathcal{B}'_0$; pour une telle fonction, on notera G_f la primitive de F_f qui s'annule à l'origine.

Remarque : Si f est dans $\mathcal{H}_L$: $f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \varphi_{\lambda_q}(x)$, on a :

$$F_f(x) \sim \sum \mathcal{B}_q \cos \lambda_q x \; ; \; G_f \sim \sum \mathcal{B}_q \frac{\sin \lambda_q x}{\lambda_q}$$

et les deux séries $\sum |\mathcal{B}_q|^2$ et $\sum |\mathcal{B}_q|^2 \lambda_q^{-2}$ sont convergentes.

Proposition 8 : Soit f dans $\mathcal{H}_L$ dont les exposants et les coefficients de Fourier sphérique sont respectivement (λ_q) et $(\mathcal{B}_q)$ alors la série suivante est convergente :

$$\sum |\mathcal{B}_q|^2 |C(\lambda_q)|^2$$

La démonstration consiste à distinguer les λ_q tels que $\lambda_q \leqslant 1$ et ceux tels que $\lambda_q > 1$ et à utiliser la proposition 5.

Remarque 1 :

- Tout polynôme sphérique est dans $\mathcal{H}_L$.
- Si f est dans $\mathcal{H}_L$, $T^s f$ est aussi dans $\mathcal{H}_L$, $\forall\, s \geqslant 0$.

Remarque 2 : La remarque 2 suivant la proposition 5 montre que la convergence des deux séries :

$$\sum |\mathcal{B}_q|^2 \;,\; \sum |\mathcal{B}_q|^2 \lambda_q^{-2}$$

n'entraîne pas celle de la série

$$\sum |\mathcal{B}_q|^2 \; |C(\lambda_q)|^2$$

dans le cas où $A(x) = x^{2\alpha+1}$, sauf si $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Proposition 9 : Pour toute fonction f dans $\mathcal{H}_L$, il existe une constante $\ell_f > 0$ telle que :

$$\sup_{x\geq 0} \left| \sqrt{A(x)}\ f(x) \right| \leq \ell_f [||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty]$$

Démonstration : On a toujours :

$$|f(x)| \leq F_f(x)\ \varphi_o(x)$$

(a) Si l'origine est un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda C(-\lambda)$ ou qui revient au même si φ_o et Φ_o sont linéairement dépendantes, la proposition résulte de la remarque 1 suivant la proposition 5.

(b) On pose :

$$f^o(x) = \int_o^x F_f(t)\ W^o(x,t)\ dt$$

utilisant l'expression de W^o (5), on montre qu'il existe $\ell_1(f) > 0$ telle que :

$$\sup_{x\geq 0} \left| \sqrt{A^o(x)}\ f^o(x) \right| \leq \ell_1(f)\ [\,||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty]$$

(c) Si $\lambda = 0$ n'est pas un zéro de la fonction $\lambda \mapsto \lambda C(-\lambda)$, on écrit:

$$C(\lambda) = \frac{a}{\lambda} + b(\lambda)$$

on a aussi (6) $\qquad C^o(\lambda) = \dfrac{a^o}{\lambda} + b^o(\lambda)$

le comportement des fonctions C et C^o, montre que :

$$b(\lambda) - b^o(\lambda) = O(\lambda^{-1}) + O(\lambda^{-(\frac{3}{2}+\alpha)}) \quad \lambda \to \infty$$

moyennant l'étude du paragraphe I, on peut montrer qu'il existe une constante $\ell_2(f) > 0$ telle que :

$$\sup_{x\geq 0} \left| \sqrt{A(x)}\ f(x) - \sqrt{A^o(x)}\ f^o(x) \right| \leq \ell_2(f)\ [\,||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty]$$

la proposition en résulte.

<u>*THEOREME 5*</u> *: Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{H}_L$ telles que :*

$$f(x) \sim \sum a_n \varphi_{\lambda_n}(x) \; ; \; g(x) \sim \sum b_m \varphi_{\lambda_m}(x)$$

Alors la limite :

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(x) \, \overline{g(x)} \, A(x) \, dx$$

existe et est finie, elle est nulle si les deux fonctions n'ont aucun exposant de Fourier sphérique commun, dans le cas contraire elle est égale à la somme de la série convergente :

$$\sum a_n \overline{b_n} \, |C(\lambda_n)|^2$$

la sommation ne portant que sur les exposants de Fourier sphérique communs à f et g.

<u>Démonstration</u> :

i) Supposons que f et g ont les mêmes exposants de Fourier sphérique (λ_n). Il existe une suite (p_n) de polynômes trigonométriques impairs qui converge sur $\mathbb{R}$ vers G_f et telle que (p'_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F_f :

$$\forall \varepsilon > 0 \; , \; \exists \; n_0 \mid n \geq n_0 \Longrightarrow ||G_f - p_n||_\infty \leq \varepsilon, \; ||F_f - p'_n||_\infty \leq \varepsilon$$

écrivons p'_n sous la forme :

$$p'_n(x) = \sum_{q=1}^{N_n} \alpha_q^n \cos \lambda_q x$$

les (λ_q) étant parmi les exposants de Fourier sphérique de f ; et posons $\alpha_q^n = 0 \; ; \; \forall q > N_n$.

L'inégalité de Bessel et la proposition montrent que la série $2 \sum a_q \overline{b_q} |C(\lambda_q)|^2$ est convergente, soit S sa somme, il existe un entier n_1 qu'on peut supposer supérieur ou égal à n_0 tel que :

$$|S - 2 \sum_{q=1}^{N_{n_1}} a_q \overline{b_q} \, |C(\lambda_q)|^2 \, | \leqslant \varepsilon$$

l'entier n_1 étant ainsi fixé, l'inégalité triangulaire donne :

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^R f(x)\,\overline{g(x)}\,A(x)\,dx - S\right| \leqslant \left|\frac{1}{R}\int_0^R [f(x) - P_{n_1}(x)]\,\overline{g(x)}\,A(x)\,dx\right| +$$

$$\left|\frac{1}{R}\int_0^R P_{n_1}(x)\,\overline{g(x)}\,A(x)\,dx - 2\sum_{q=1}^{N_{n_1}} \alpha_q^{n_1}\,\overline{b_q}|C(\lambda_q)|^2\right| +$$

$$\left| 2\sum_{q=1}^{N_{n_1}} (\alpha_q^{n_1} - a_q)\,\overline{b_q}|C(\lambda_q)|^2\right| + \left|\sum_{q=1}^{N_{n_1}} 2\,a_q\,\overline{b_q}|C(\lambda_q)|^2 - S\right|$$

où on a posé :

$$P_{n_1}(x) = \sum_{q=1}^{N_{n_1}} \alpha_q^{n_1}\,\varphi_{\lambda_q}(x)$$

- Une application de la proposition 9 montre que le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus est majoré par :

$$\ell_f\,\ell_g\,[\,||F_g||_\infty + ||G_g||_\infty]\,\varepsilon$$

- Une application du théorème 3, permet de montrer qu'il existe $R_0 > 0$ tel que pour $R \geqslant R_0$ le second terme du second membre de l'inégalité ci-dessus soit majoré par ε.

- L'inégalité de Bessel, le comportement de la fonction et une distinction entre les λ_q, $\lambda_q \leqslant 1$ et les λ_q, $\lambda_q > 1$, montrent que le troisième terme du second membre de l'inégalité ci-dessus est majoré par $M\varepsilon$ où $M > 0$.

ii) Il est facile de voir que si f et g n'ont aucun exposant de Fourier sphérique commun, en remplaçant S par 0 dans ce qui précède :

$$\frac{1}{R}\int_0^R f(x)\,\overline{g(x)}\,A(x)\,dx \leqslant \ell_f\,\ell_g\,[\,||F_f||_\infty + ||G_f||_\infty]\,\varepsilon$$

le théorème est ainsi démontré.

<u>Conclusion</u> : Pour deux fonctions f et g dans $\mathcal{H}_L$, posons :

$$||f||_L^2 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_0^R |f(x)|^2 A(x)\, dx$$

$$<f,g> = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_0^R f(x)\, \overline{g(x)}\, A(x)\, dx$$

l'espace $\mathcal{H}_L$ muni de la norme $||.||_L$ et du produit scalaire $<,>$ est un espace préhilbertien ; le sous-espace des polynômes sphériques est dense dans $\mathcal{H}_L$, en particulier la série de Fourier sphérique d'une fonction f de $\mathcal{H}_L$ converge vers f au sens de la norme $||.||_L$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] : Z.J. AGRANOVICH - V.A. MARCHENKO - The inverse problem of scattering theory Gordon and Breach, New-York and London 1963.

[2] : M. BOCHER - On regular singular points of linear differential equations of the second order, whose coefficients are not necessarily analytic. Trans. Ann. Math. Soc. Vol. 1 (1900) p. 40-52

[3] : H. CHEBLI - Positivité des opérateurs de "translation généralisée" associés à un opérateur de Sturm-Lionville et quelques applications à l'analyse harmonique. Thèse Strasbourg 1974.

[4] : H. CHEBLI - Sur un théorème de Peley-Weiner associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm-Lionville sur (o,∞). J. of Functional analysis, vol 17, n° 4 (1974) p. 447-461.

[5] : H. CHEBLI - Théorème de Peley-Weiner associé à un opérateur différentiel singulier sur (o,∞). J. Math. Pures et Appl. 58 (1979) p. 1-19.

[6] : J. DELSARTE - Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr. Acta Math. 69 (1938) p. 259-317.

[7] : J. DELSARTE - J. LIONS - Moyennes généralisées. Comm. Math. Helv. Vol 33, 1953, p. 59-69.

[8] : J. FAVARD - Leçons sur les fonctions presque-périodiques- Gauthier-Villars Paris 1933.

[9] : M. FLENSTEND-JENSEN - Paley-Weiner type theorems for a differential operator conneted with symetric space. Ark. Math. 10 (1972).

[10] : S. HELGASON - Differential geometry and symetric spaces. Academic Press 1962.

[11] : K. JORGENS - Spectral theory of second order ordinary differential operator lecture delivred at Arhus Universitet (1962-1963).

[12] : J.L. LIONS - Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes. Bull. Soc. Math. France, 84, (1956), p. 9-95.

[13] : F.W. OLVER - Asymptotic and special functions. Academic Press, 1974.

[14] : K. TRIMECHE - Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Weiner associé à un opérateur différentiel singulier sur (o,∞). J. Math. Pures et Appl., Vol 60, (1981) p. 51-98.

[15] : G.N. WATSON - A treatise on the theory of Bessel functions. Second edition Cambridge University Press.