J. NOURRIGAT

Hypoellipticité maximale pour le système de Cauchy-Riemann induit

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1981-1982, fascicule 3
« Séminaire « Équations aux dérivées partielles » », , p. 1-63
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1981-1982___3_A6_0>

HYPOELLIPTICITE MAXIMALE

POUR LE SYSTEME DE CAUCHY-RIEMANN INDUIT

---

par J. NOURRIGAT

Cet exposé résume, dans le cas particulier du système de Cauchy-Riemann sur certaines sous-variétés de C^n, une série d'articles à paraître ([$\mathcal{A}$] et [$\mathcal{B}$]) sur l'hypoellipticité maximale. Dans le cas particulier auquel nous nous limitons ici, les démonstrations seront plus simples que dans cette série d'articles, et seront "self-contained", sauf celles du paragraphe III.

Les sous-variétés M de C^n auxquelles nous nous intéresserons seront :

1) soit des variétés tubulaires,

2) soit des hypersurfaces,

3) soit des variétés d'un type qui sera décrit au §I.

Dans tous les cas, on se place au voisinage d'un point de type r dans M. (La définition de cette notion est rappelée au §I). Dans les cas 1) et 3), on donne des conditions explicites, qui sont nécessaires et suffisantes pour que le système de Cauchy-Riemann induit $\overline{\partial}_M$ (agissant sur les fonctions) vérifie l'implication suivante, pour tout ouvert $\omega \subset M$ et pout tout réel s :

$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{D}'(M) \\ \overline{\partial}_M u \in (H^s_{loc}(\omega))^p \end{array}\right\} \Rightarrow \partial_M u \in H^s_{loc}(\omega)^p$$

Comme on l'expliquera au §I, cette propriété implique l'hypoellipcité du système $\overline{\partial}_M$, avec perte de $1-\frac{1}{r}$ dérivée. Dans la série d'articles à paraître, on donnera une variante microlocale de ce résultat. Dans le cas d'une hypersurface, on donne une condition nécessaire. Nous espérons démontrer dans un article ultérieur qu'elle est aussi suffisante.

Dans le cas d'un point de type 2, la condition nécessaire et suffisante pour que (0,1) soit vérifiée est connue depuis Hörmander [10] (cf. aussi le livre de Folland-Kohn [5]). Ces travaux donnaient aussi des résultats de régularité pour des problèmes voisins ($\bar{\partial}$-Neumann, $\square_b$ agissant sur les formes différentielles). Pour ces problèmes, l'extension au cas d'un point de type r a été faite dans le cas où M est le bord d'un ouvert faiblement pseudo-convexe (travaux de Kohn [15] et Derridj [3]). Pour le problème qui nous intéresse ici, du $\bar{\partial}_M$ agissant sur les fonctions, la pro priété (0,1) n'est jamais vérifiée si M est le bord d'un ouvert pseudo-convexe, au voisinage d'un point de type r.

De plus, la condition nécessaire e. t suffisante pour l'implication (0,1) n'a aucun rapport avec la condition donnée par Kohn [15] pour la régularité du problème $\bar{\partial}$-Neumann. Cette condition est, par contre, assez voisine de celle qui caractérise la régularité analytique pour le système $\bar{\partial}_M$ quand M est une variété tubulaire (travail de Baouendi - Trêves [1]).

La démonstration utilise des arguments inspirés des divers travaux de Hörmander sur les inégalités sous-elliptiques ([10],[12],[13]).

Au §I, nous formulons de manière précise le problème, et rappelons des résultats antérieurs. Au §II, on énonce les résultats principaux (dans les cas 1 et 3) et on démontre la nécessité des conditions géométriques énoncées.

Au §III, on étudie, sans démonstration, une classe d'opérateurs à coefficients polynomiaux sur R^{2p}. Les propositions énoncées dans ce § ne sont que la traduction explicite, dans le cas étudié ici, de résultats plus généraux sur les représentations irréductibles de certains groupes de Lie nilpotents, et notamment, des résultats de Moukadem [17] et de [A].

Au §5, on finit de démontrer que les conditions géométriques énoncées sont suffisantes pour la propriété 0.1.

Au §V, nous énonçons la condition nécessaire pour que (0,1) soit vérifiée si M est une hypersurface (pas forcément tubulaire) et nous donnons quelques indications sur la preuve de la nécessité de cette condition.

Enfin, au §VI, on examine le cas d'un système quelconque de champs de vecteurs complexes L_j, dont les parties réelles et imaginaires vérifient la condition de Hörmander [11]. Dans ce cas, il ne semble guère possible d'énoncer une condition explicite pour que la propriété analogue à (0.1) soit vérifiée, sauf dans le cas des systèmes étudiés par H.M. Maire [16]. On donne seulement une condition nécessaire abstraite, dont la nécessité sera démontrée dans [B]. Cette condition fait intervenir, selon les idées de Grushin [7] et Rockland [18], des systèmes d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur R^k qui doivent être injectifs dans $\mathcal{S}(R^k)$. Si l'écriture explicite de ces opérateurs est en général très compliquée, leur définition est très simple à l'aide de la théorie des représentations de groupe de Lie nilpotents.

Cette condition est suffisante dans bien des cas particuliers (voir au §VI) et l'on peut conjecturer que c'est la condition nécessaire et suffisante pour l'hypoellipticité maximale d'un système de champs de vecteurs complexes.

Nous remercions vivement H.M. Maire pour les discussions que nous avons eu avec lui.

Les démonstrations des résultats utilisés dans le §III, ainsi que les démonstrations analogues à celles du §IV, dans des situations plus générales, paraîtront dans :

[A] HELFFER - NOURRIGAT - Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs - Articles n° I, III et IV.

Le théorème 6-1,(dont les § II et V ne sont que la démonstration dans des cas particuliers), sera démontré dans :

[B] NOURRIGAT - Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs - Article n° II.

§I - DEFINITIONS ET RAPPELS -

Les sous-variétés de C^n étudiées

On va considérer trois sortes de sous variétés de C^n.

1) - Les variétés tubulaires -

On appelle ainsi une variété M de la forme $M = \Gamma + i\, R^n$, où Γ est une sous-variété de R^n. Soient q la codimension de M, et $p = n - q$. On peut toujours trouver localement un système de coordonnées où M soit définie de la manière suivante, en désignant par (z,z') la variable de C^n ($z \in C^p$, $z' \in C^q$) et en posant $z_j = x_j + iy_j$, $z'_j = x'_j + it_j$.

$$(1.1) \qquad M = \{(z,z') \in C^n \mid x'_j = f_j(x) \quad j = 1,\dots,q\}$$

où les f_j sont des fonctions C^∞ dans un ouvert de R^p (on les supposera définies globalement). On pourra identifier M et $R^{2p} \times R^q$ en choisissant comme coordonnées les x_j, y_j et t_j.

2) Un exemple un peu plus général de sous-variété de C^n sera défini par des équations de la forme suivante, avec les mêmes notations :

$$(1.2) \qquad M = \{(z,z') \in C^n \mid x'_j = f_j(x,y),\ j = 1,\dots,q\}$$

où les f_j sont cette fois des fonctions C^∞ sur R^{2p}.

3) On étudiera aussi des hypersurfaces (de codimension $q = 1$). On peut toujours écrire localement une hypersurface M sous la forme suivante :

$$(1.3) \qquad M = \{(z,z') \in C^p \times C \mid x' = f(x,y,t)\} \qquad (z' = x' + it)$$

où f est une fonction C^∞ sur $R^p \times R^p \times R$.

Le système de Cauchy-Riemann induit -

Dans les 3 cas ci-dessus, on identifiera M avec $R^{2p} \times R^q$.
Rappelons que :

(1.4) $$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \qquad j = 1\ldots p$$

On désignera par L_j (j = 1----p) un système de champs de vecteurs complexes sur M, de la forme suivante :

(1.5) $$L_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1}^{q} a_{jk}(z,t)\frac{\partial}{\partial t_k} \qquad j = 1\ldots p$$

où les a_{jk} sont déterminées par le système d'équations :

(1.6) $$L_j h_k = 0 \qquad j \leq p \qquad k \leq q$$

où l'on a posé :

(1.7) $$h_k(x,y,t) = f_k(x,y,t) + it_k \qquad k = 1\ldots q$$

Le système $(L_1 \ldots L_p)$ est le système de Cauchy-Riemann induit. On le notera $\bar{\partial}_M$ On désignera par X_j (resp. Y_j) la partie réelle (resp. imaginaire) de L_j

(1.8) $$L_j = X_j + i\,Y_j$$

On peut expliciter les champs X_j et Y_j dans les 3 cas ci-dessus.
Dans le cas (1.1), on a :

(1.9) $$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_k \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t_k}$$

Dans le cas (1.2), on a :

(1.10) $$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial t_k} \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t_k}$$

Dans le cas (1.3) d'une hypersurface, on a :

$$(1.11) \qquad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \beta_j(z,t)\frac{\partial}{\partial t} \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \alpha_j(z,t)\frac{\partial}{\partial t}$$

avec :

$$(1.12) \qquad \alpha_j = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial y_j}}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2} \qquad \beta_j = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_j} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}$$

ou encore :

$$(1.13) \qquad L_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + i(L_j f)\frac{\partial}{\partial t}$$

Remarquons que, dans tous les cas, les champs L_j $(j \leq p)$ commutent.

La condition de Hörmander -

Dans toute la suite, on se place au voisinage d'un point (z_o, t_o) de M ($z_o \in R^{2p}$, $t_o \in R^q$) où les champs X_j et Y_j sont supposés vérifier la condition de Hörmander [11], où r est un entier ≥ 2.

$(C.H.)_r$ Les champs X_j et Y_j, et tous leurs commutateurs de longueur $\leq r$, engendrent, par leur restriction en (z_o, t_o), le plan tangent à M en ce point.

Suivant la terminologie classique, on dit que (z_o, t_o) est un point de type r. Graham et Bloom [2] ont démontré que la condition $(C.H.)_r$ peut se formuler ainsi de manière équivalente :

$(C.H.)_r$ Il n'existe pas de sous-variété complexe de C^n, de codimension (complexe) 1, admettant au point (z_o, t_o) un contact d'ordre $r + 1$ avec M.

Rappelons le résultat suivant , de Rothschild-Stein [20] : si (z_o, t_o) est un point de type r, il existe un voisinage Ω de (z_o, t_o) est une constante $C > 0$ tels que l'on ait :

(1.14) $$\| u \|^2_{1/r} \leq C \left(\sum_j \|X_j u\|^2 + \|Y_j u\|^2 + \| u \|^2 \right) \quad \forall u \in C_o^\infty(\Omega)$$

Ici $\| \ \|_{1/r}$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev $H^{1/r}(R^{2p+q})$, et $\| \ \|$ désignera dans toute la suite de l'exposé la norme dans $L^2(R^{2p+q})$, comme ici, ou la norme dans $L^2(R^{2p})$. On démontrera dans la suite d'articles à paraître [A], que la condition $(C.H.)_r$ est nécessaire pour qu'on ait (1.14).

L'hypoellipticité maximale :

On dira que le système $\overline{\partial}_M$ est hypoelliptique maximal en (z_o, t_o) s'il existe un voisinage Ω de (z_o, t_o) et une constante $C > 0$ tels que :

(1.15) $$\sum_j \left[\|X_j u\|^2 + \|Y_j u\|^2 \right] \leq C \left(\sum_j \|L_j u\|^2 + \| u \|^2 \right)$$

pour tout $u \in C_o^\infty(\Omega)$. Il est classique (cf Hörmander [10]) que les inégalités (1.14) et (1.15) entraînent l'hypoellipticité du système $\overline{\partial}_M$ avec perte de $1 - \frac{1}{r}$ dérivées, c'est-à-dire que l'on a, pour tout réel s et pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, l'implication :

(1.16) $$\left. \begin{array}{l} u \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ L_j u \in H^s_{loc}(\omega) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H^{s+\frac{1}{r}}_{loc}(\omega)$$

Résultats de Hörmander [10] et Folland-Kohn [5] -

Le but de cet exposé est de donner des conditions nécessaires et suffisantes, explicites, pour que l'inégalité (1.15) soit vérifiée pour des variétés du type (1.1) ou (1.2). Le cas d'une hypersurface sera abordé au §V.

Si le point (z_0, t_0) est de type 2, ce problème est résolu dans les 3 cas (Hörmander [10]). Il existe des fonctions $a_{jk\ell}(z, t)$ $(j,k \leq p,\ 1 \leq q)$ telles que :

$$[L_j, \overline{L_k}] = \sum_{\ell} a_{jk\ell}(z, t)\,\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial t_\ell} \tag{1.17}$$

Dans le cas (1.1) et (1.2) on a $a_{jk\ell}(z, t) = 2\,\dfrac{\partial^2 f_\ell}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$. Dans le cas d'une hypersurface $(q = 1)$, il n'y a pas d'indice ℓ et la matrice hermitienne a_{jk}, appelée matrice de Lévi, est donnée par :

$$a_{jk} = (L_j \overline{L}_k + \overline{L}_k L_j)\, f \tag{1.18}$$

On peut énoncer le :

Théorème 1 - 1

(1.19) Si $(C.H.)_2$ est vérifiée, il y a équivalence entre :

i) Le système $\bar{\partial}_M$ est hypoelliptique maximal en (z_o, t_o).

ii) Pour tout $\tau \in R^q \setminus \{0\}$, la matrice hermitienne

$$\sum_{\ell=1}^{q} a_{jk\ell}(z_0,t_0)\,\tau_\ell \qquad (1 \leq j, k \leq p)$$

admet au moins une valeur propre strictement positive.

La condition $(C.H.)_2$ revient à dire que, pour tout $\tau \in R^q \setminus \{0\}$, la matrice ci-dessus est non nulle.

Le résultat de Baouendi-Trèves (On ne suppose pas $(CH)_r$ vérifiée)

Théorème 1 - 2

Dans le cas tubulaire (M définie en (1.1)), si les fonctions f_j sont analytiques réelles, il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) Pour toute distribution u dans un voisinage ω de (z_o, t_o) telles que les $L_j u$ sont analytiques dans ω $(j \leq p)$, la fonction u est elle-même analytique dans un voisinage ω' de (z_o, t_o), éventuellement plus petit.

ii) Pout tout $\tau \in R^q \setminus \{0\}$, le point x_o n'est pas un maximum local de la fonction

$$x \to \sum_{\ell=1}^{q} \tau_\ell \left[f_\ell(x) - \sum_j \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j} (x_o) (x_j - x_{jo}) \right] \qquad (1.20)$$

Nous avons rappelé ce résultat à cause de la ressemblance entre la condition ii) et celles qui seront énoncées au paragraphe suivant.

§II - ENONCE DES THEOREMES -

CONDITIONS NECESSAIRES -

On cherche des conditions pour que l'inégalité (1.15) soit vérifiée. Puisque cette inégalité implique l'hypoellipticité du $\bar{\partial}_M$, commencons par énoncer des conditions nécessaires d'hypoellipticité, qui expliqueront les conditions qui vont suivre.

§II - 1 - Conditions nécessaires d'hypoellipticité (cf. [1], [16])

Proposition 2-1 : Soient M définie en (1.1), et $(x_o, y_o, t_o) \in M$. S'il existe $\tau \in R^q \setminus \{0\}$ tel que la fonction (1.20) admette un maximum local en x_o, alors le système $\bar{\partial}_M$ n'est hypoelliptique dans aucun voisinage de (x_o, y_o, t_o).

Proposition 2-2 : Soient M définie en (1.2), et $(z_o, t_o) \in M$. S'il existe $\tau \in R^q \setminus \{0\}$ et une fonction holomorphe g sur C^p tels que la fonction :

$$(2.1) \qquad z \to \sum_{\ell=1}^{q} \tau_\ell f_\ell(z) + \mathrm{Re}\, g(z)$$

admette un maximum local au point z_o, alors le système $\bar{\partial}_M$ n'est hypoelliptique dans aucun voisinage de (z_o, t_o).

La proposition 2-1 n'étant qu'un cas particulier de la proposition 2-2, il nous suffit de démontrer celle-ci.

Démonstration de la proposition 2-2 : On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un voisinage V de z_o dans C^p, un point $\tau \in R^q \setminus \{0\}$ et une fonction holomorphe g sur C^p tels que :

$$(2.2) \qquad \sum_{\ell=1}^{q} \tau_\ell (f_\ell(z) - f_\ell(z_o)) + \mathrm{Re}\,(g(z) - g(z_o)) \leqslant 0 \qquad \forall z \in V$$

Supposons qu'il existe un voisinage W de t_o dans R^q tel que le système $\overline{\partial}_M$ soit hypoelliptique dans V x W. Il existerait alors C > 0 tel que l'inégalité

$$(2.3) \qquad \sum_{k=1}^{q} \left| \frac{\partial u}{\partial t_k} (z_o, t_o) \right| \leq c \sup_{(z,t) \in V \times W} |u(z,t)|$$

soit vérifiée pour tout $u \in C^\infty(V \times W)$ tel que $L_j u = o$ $(j = 1, \ldots, p)$.

Les fonctions $(z,t) \to g(z)$ et $(z,t) \to f_k(z) + it_k$ vérifient ce système, et, par conséquent, la fonction

$$(2.4) \qquad \phi(z,t) \to (z,t) = \sum_{k=1}^{q} \tau_k (f_k(z) + it_k) + g(z)$$

en est aussi solution, ainsi que la fonction $(z,t) \to e^{\lambda \phi(z,t)}$, pour tout $\lambda > 0$. En reportant dans (2.3), on obtient :

$$(2.5) \qquad \lambda \sum |\tau_k| \exp \lambda \operatorname{Re} \phi(z_o) < c \sup_{(z,t) \in V \times W} \exp \lambda \operatorname{Re} \phi(z) = c \exp \lambda \operatorname{Re} \phi(z_o)$$

d'après (2.2). En faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient une contradiction.

On conviendra désormais de noter par f le système de fonctions $f = (f_1 \ldots f_q)$ et de poser :

$$(2.6) \qquad \tau . f(z) = \sum_{k=1}^{q} f_k(z) \tau_k \qquad \forall z \in R^{2p} \qquad \forall \tau \in R^q$$

<u>§II - 2 - Enoncés des résultats principaux</u> -

<u>Le cas tubulaire</u> : Si M est définie par (1.1), on pose, pour tout $x \in R^p$, $\xi \in R^p$ et $\tau \in R^q$:

$$(2.7) \qquad \Phi(x,\xi,\tau) = \tau . [f(x + \xi) - f(x) - \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \xi_j]$$

d'après la proposition 2-1, si le système $\overline{\partial}_M$ est hypoelliptique au voisinage de (x_o, y_o, t_o), il existe un voisinage V de x_o tel que, pour tout $x \in V$ et $\tau \in R^q$, on ait, si $d > o$ est assez petit et $\tau \neq 0$

$$(2.8) \qquad \sup_{|\xi| \leqslant d} \Phi(x,\xi,\tau) > o$$

D'après la formule de Taylor, il existe $C_1 > o$ tel qu'on ait ;

$$(2.9) \qquad \sup_{|\xi| \leqslant d} \Phi(x,\xi,\tau) \leqslant C_1 \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant r} |\partial_x^\alpha f(x).\tau| \; d^{|\alpha|}$$

si $x \in V$, $\tau \in R^q$, et si $d > o$ est assez petit. En effet, le reste d'ordre $r + 1$ du développement taylorien de $\xi \to \Phi(x,\xi,\tau)$ à l'origine est majoré dans la boule $|\xi| \leqslant d$ par $C_2|\tau|d^{r+1}$, et d'après la condition de Hörmander, il existe $C_3 > o$ tel que

$$(2.10) \qquad \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant r} |\partial_x^\alpha f(x).\tau| \geqslant C_3|\tau|$$

En effet, on voit que les commutateurs de longueur comprise entre 2 et r des champs X_j et Y_j ont des symboles de la forme $\partial_x^\alpha f(x).\tau$, et, comme ils forment un système elliptique, on a bien (2.10). Le reste d'ordre $r + 1$ du développement taylorien de $\xi \to \Phi(x,\xi,\tau)$ est bien majoré par le membre de droite de (2.9).

Nous pouvons maintenant énoncer la caractérisation géométrique de l'hypoellipticité maximale du $\overline{\partial}_M$ quand M est tubulaire.

Théorème 2-3 :

Si M est définie par (1-1), si (x_o,y_o,t_o) est un point de type $r \geqslant 2$, il y a équivalence entre :

(2.11) i) Le système $\overline{\partial}_M$ est hypoelliptique maximal en (x_o,y_o,t_o)

ii) Il existe un voisinage V de x_o et deux constantes $C_o > o$ et $d_o > o$ telles que l'on ait

$$\sup_{|\xi|\leqslant d} \Phi(x,\xi,\tau) \geqslant C_o \sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant r} |\partial_x^\alpha f(x).\tau|\, d^{|\alpha|}$$

pout tous $x \in V$, $\tau \in R^q$ et $d < d_o$.

Enoncé du théorème pour une variété du type (1.2) -

On désignera par $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des polynômes sur C^p, à coefficients complexes, de degré $\leqslant r$, nuls à l'origine. La variable de C^p sera notée $z = x + iy$, ou bien $\zeta = \xi + i\eta$.

Pour tous $g \in \mathcal{P}_r$, $z \in C^p$, $\zeta \in C^p$ et $\tau \in R^q$, posons, cette fois :

(2.12) $$\Phi_g(z,\zeta,\tau) = \tau.\,[f(z+\zeta) - f(z)] + \mathrm{Re}\,g(\zeta)$$

D'après la proposition 2-2, si le système $\overline{\partial}_M$ est hypoelliptique dans un voisinage de $(z_o,t_o) \in M$, il existe un voisinage V de z_o tel que l'on ait, si $z \in V$, $g \in \mathcal{P}_r$, $\tau \in R^q$,si $d > o$ est assez petit et $\tau \neq 0$

(2.13) $$\sup_{|\zeta|\leqslant d} \Phi_g(z,\zeta,\tau) > o$$

Par un raisonnement analogue à celui du cas tubulaire, on voit qu'il existe $C_1 > o$ tel que :

(2.14) $$\sup_{|\zeta|\leqslant d} \Phi_g(z,\zeta,\tau) \leqslant C_1 \sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\overline{\zeta}}^\beta \Phi_g(z,0,\tau)|\, d^{|\alpha+\beta|}$$

si $z \in V$, $\tau \in R^q$, $g \in \mathcal{S}_r$ et $d > o$ assez petit. On a utilisé cette fois la conséquence suivante de la condition de Hörmander.

$$(2.15) \qquad \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leqslant r \\ |\alpha|\geqslant 1,\, |\beta|\geqslant 1}} |\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta\, f(z).\tau\,| \;\geqslant\; c|\tau|$$

Voici la caractérisation de l'hypoellipticité maximale du $\bar{\partial}_M$ si M est définie en (1.2).

<u>Théorème 2-4</u> -

Si M est définie par (1.2) et si (z_o,t_o) est un point de type r de M, il y a équivalence entre :

i) Le système $\bar{\partial}_M$ est hypoelliptique maximal en (z_o,t_o).

ii) Il existe un voisinage V de z_o, et deux constantes $C_o > o$, $d_o > o$ tels qu'on ait :

$$(2.16) \qquad \sup_{|\zeta|\leqslant d} \Phi_g(z,\zeta,\tau) \;\geqslant\; C_o \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant r} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar{\zeta}}^\beta\; \Phi_g(z,o,\tau)|\; d^{|\alpha+\beta|}$$

pour tous $z \in V$, $\tau \in R^q$ si $d \leqslant d_o$ et pour tout $g \in \mathcal{S}_r$.

<u>Remarque 1</u> : On va montrer au §III que, si M est définie par (1.1), les conditions ii) des théorèmes 2-3 et 2-4 sont équivalentes, bien que leurs énoncés soient en apparence différents. Il nous suffira donc de démontrer le théorème 2-4, dont le précédent n'est qu'un cas particulier.

<u>Remarque 2</u> : Si r = 2, on retrouve le résultat de Hörmander (pour les variétés tubulaires ou les variétés de type (1-2)).

§II - 3 - DEMONSTRATION DE LA NECESSITE DANS LE THEOREME 2 4 -

On raisonne par l'absurde pour démontrer l'implication i) $\Rightarrow$ ii) . On suppose donc que i) est vérifiée et que ii) ne l'est pas.

Puisque i) est vérifiée, il existe un voisinage Ω de (z_o,t_o) et une constante $C > o$ tels que :

(2.17) $$\sum_j\left(\|X_j u\|^2 + \|Y_j u\|^2\right) \leq C\left(\sum_j \|L_j u\|^2 + \|u\|^2\right) \quad \forall u \in C_o^\infty(\Omega)$$

Puisque ii) n'est pas vérifiée, il existe des suites $z_n \in C^p$, $d_n > 0$, $\tau_n \in R^q$, $\varepsilon_n > 0$ et $g_n \in \mathcal{F}_r$ telles que

(2.18) $$z_n \to z_o, \; d_n \to 0 \;, \; \varepsilon_n \to 0$$

et de plus :

(2.19) $$\sup_{|\zeta|\leq d_n} \Phi_{g_n}(z_n,\zeta,\tau_n) \leq \varepsilon_n \sum_{1\leq|\alpha+\beta|\leq r} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_{g_n}(z_n,0,\tau_n)|\, d_n^{|\alpha+\beta|}$$

On définit un réel $\rho_n > o$ en posant :

(2.20) $$\rho_n^{-1} = \sum_{1\leq|\alpha+\beta|\leq r} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_{g_n}(z_n,0,\tau_n)|\, d_n^{|\alpha+\beta|}$$

Puisque les suites $\rho_n d_n^{|\alpha+\beta|} \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_{g_n}(z_n, 0, \tau_n)$ sont bornées $(1\leq|\alpha+\beta|\leq r)$, on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, qu'elles admettent des limites $\ell_{\alpha\beta}$

(2.21) $$\rho_n d_n^{|\alpha+\beta|} \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_{g_n}(z_n,0,\tau_n) \to \ell_{\alpha\beta} \qquad (1\leq|\alpha+\beta|\leq r)$$

On a évidemment

(2.22) $\qquad \ell_{\beta\alpha} = \overline{\ell_{\alpha\beta}} \qquad$ et $\qquad \sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r} |\ell_{\alpha\beta}| = 1$

On définit donc un polynôme réel sur R^{2p} en posant

(2.23) $\qquad P(\xi,\eta) = \sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r} \ell_{\alpha\beta} \dfrac{\zeta^\alpha \, \bar{\zeta}^\beta}{\alpha! \; \beta!}$

(avec les notations évidentes $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$).

On va démontrer que la suite de fonctions

(2.24) $\qquad \zeta \to \rho_n \, \Phi_{g_n}(z_n, d_n\zeta, \tau_n) \overset{\text{def}}{=\!=\!=} P_n(\zeta)$

tend, uniformément sur tout compact de R^{2p}, vers le polynôme P. En effet, le développement taylorien d'ordre r à l'origine de P_n tend vers P d'après (2.21), et la différence entre P_n et son développement taylorien d'ordre r est majorée, uniformément sur tout compact, par $C \, d_n^{r+1} \, |\tau_n| \rho_n$.

La condition de Hörmander équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

(2.25) $\qquad \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leqslant r \\ |\alpha|\geqslant 1, |\beta|\geqslant 1}} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar{\zeta}}^\beta \, \Phi_g(z,0,\tau)| \geqslant C|\tau| \quad \forall z \in \Omega, \ \forall g \in \mathcal{P}_r, \ \forall \tau \in R^q$

Les relations (2.21) et (2.25) impliquent donc que la suite $\rho_n \, |\tau_n| d_n^r$ est bornée. Par conséquent, la différence entre P_n et son développement d'ordre r tend bien vers 0, uniformément sur tout compact. On a bien montré que $P_n \to P$ uniformément sur tout compact. Il en est de même des dérivées.

On en déduit que

(2.26) $$\sup_{|\zeta|\leqslant 1} P(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \sup_{|\zeta|\leqslant 1} P_n(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 = P(o)$$

Autrement dit, P présente un maximum local à l'origine .

Pour tout $\lambda \in R$, on définit des opérateurs différentiels sur R^{2p}, en posant :

(2.27) $$\pi_{(\lambda P)}(X_j) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} - i\lambda \frac{\partial P}{\partial \eta_j}$$

(2.28) $$\pi_{(\lambda P)}(Y_j) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} + i\lambda \frac{\partial P}{\partial \xi_j}$$

(2.29) $$\pi_{(\lambda P)}(L_j) = \pi_{(\lambda P)}(X_j) + i\,\pi_{(\lambda P)}(Y_j) \ .$$

On va utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme 2-5</u> -

Si l'inégalité (2.17) est vérifiée , alors on a, avec la même constante C,

(2.30) $$\sum_j \|\pi_{(\lambda P)}(X_j)\Psi\|^2 + \|\pi_{(\lambda P)}(Y_j)\Psi\|^2 \leqslant C \sum_j \|\pi_{(\lambda P)}(L_j)\Psi\|^2_{L^2(R^{2p})}$$

pour tout $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$ et pour tout $\lambda \in R$.

Admettons un instant ce lemme et faisons une transformation de Fourier partielle inverse par rapport à la variable λ, en posant :

(2.31) $$\hat{\pi}_P(X_j) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{\partial P}{\partial \eta_j}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \hat{\pi}_P(Y_j) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\partial P}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial t}$$

et $\hat{\pi}_P(L_j) = \hat{\pi}_P(X_j) + i\,\hat{\pi}_P(Y_j)$. Il s'agit d'opérateurs différentiels dans R^{2p+1}.

On déduit de (2.30) que :

$$(2.32) \qquad \sum_j \|\hat{\pi}_p(X_j)\Psi\|^2 + \|\hat{\pi}_p(Y_j)\Psi\|^2 < C \sum_j \|\hat{\pi}_p(L_j)\Psi\|^2$$

$$\forall \Psi \in C_o^\infty (R^{2p+1})$$

Dire que les champs de vecteurs $\hat{\pi}_p(X_j)$ et $\hat{\pi}_p(Y_j)$ vérifient la condition de Hörmander à l'origine de R^{2p+1} revient à dire que

$$(2.33) \qquad \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq r \\ |\alpha|\geq 1,\ |\beta|\geq 1}} |\ell_{\alpha\beta}| \neq 0$$

On va distinguer 2 cas :

1er cas : si (2.33) est vérifiée, l'inégalité (2.32) entraîne que le sytème d'opérateurs $\hat{\pi}_p(L_j)$ $(j = 1 \ldots p)$ est hypoelliptique. Ce système peut être considéré comme le système de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_{\tilde{M}}$ de la sous-variété $\tilde{M}$ de C^{p+1} définie par :

$$(2.34) \qquad \tilde{M} = \{(z',z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \ , \quad \operatorname{Re} z' = P(z)\}$$

La proposition 2-2 montre que le polynôme P ne peut admettre de maximum local à l'origine, ce qui est en contradiction avec (2.26).

2ème cas : Si (2.33) n'est pas vérifiée , le polynôme P est la partie réelle d'une fonction holomorphe non constante d'après (2.22). D'après le principe du maximum, la fonction P ne peut admettre de maximum local.

Démonstration du lemme 2-5 :

On peut supposer que l'ouvert Ω est de la forme U x V, où U est un voisinage de z_o dans R^{2p} et V un voisinage de t_o dans R^q.

Choisissons une fonction $\chi \in C_o^\infty(V)$ telle que $\|\chi\|_{L^2(R^q)} = 1$. On désigne par $\hat{X}_j(\tau)$, $\hat{Y}_j(\tau)$ et $\hat{L}_j(\tau)$ les images des opérateurs X_j, Y_j et L_j par la transformation de Fourier partielle par rapport à la variable $t \in R^q$.

$$(2.35) \qquad \hat{X}_j(\tau) = \frac{\partial}{\partial x_j} - i\tau . \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad \hat{Y}_j(\tau) = \frac{\partial}{\partial y_j} + i\tau . \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Si on applique l'inégalité (2.17) à des fonctions de la forme $u(z,t) = \phi(z)e^{it\tau}\chi(t)$, avec $\tau \in R^q$ et $\phi \in C_o^\infty(U)$, on en déduit que l'on a, avec la même constante C_o que dans (2.17)

$$(2.36) \qquad \sum_j \|\hat{X}_j(\tau)\phi\|^2_{L^2(R^{2p})} + \|\hat{Y}_j(\tau)\phi\|^2_{L^2(R^{2p})} \leq$$

$$\leq C_o \sum_j \|\hat{L}_j(\tau)\phi\|^2 + C_1\|\phi\|^2$$

pour tous $\tau \in R^q$ et $\phi \in C_o^\infty(U)$. La constante C_1 dépend de χ mais non de ϕ et τ.

Pour tous $z_1 \in R^{2p}$, $d > o$ et $h \in \mathcal{S}_r$, on définit une transformation unitaire $U_{(x_1,d,h)}$ de $L^2(R^{2p})$ en posant :

$$(2.37) \qquad U_{(z_1,d,h)}\Psi(z) = d^{-p}\,\Psi\left(\frac{z - z_1}{d}\right)e^{\,i\mathrm{Im}h(z - z_1)}$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme 2-6</u> :

Soit P un polynôme réel sur R^{2p}, de degré $\leq r$. On suppose qu'il existe des suites $z_n \in R^{2p}$, $d_n > 0$ et $\tau_n \in R^q$ telles que :

$$(2.38) \qquad d_n^{|\alpha|+|\beta|}\,\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta f(z_n) . \tau_n \to \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta P(o) \quad \text{si } |\alpha+\beta| \leq r\ ,\ |\alpha| \geq 1\ ,\ |\beta| \geq 1 .$$

(2.39) $\quad z_n \to z_o\ ,\quad d_n \to o\ ,\quad |\tau_n| \to +\infty$

Alors, il existe une suite h_n dans $\mathcal{S}_r$ telle que les opérateurs $X_j^{(n)}$ et $Y_j^{(n)}$ définis par

(2.40) $$X_j^{(n)} = d_n\, U^{-1}_{(z_n,d_n,h_n)}\ \hat{X}_j(\tau_n)\ U_{(z_n,d_n,h_n)}$$

$$Y_j^{(n)} = d_n\, U^{-1}_{(z_n,d_n,h_n)}\ \hat{X}_j(\tau_n)\ U_{(z_n,d_n,h_n)}$$

soient de la forme suivante :

(2.41) $$X_j^{(n)} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} - i b_j^{(n)}(\xi,\eta) \qquad Y_j^{(n)} = \frac{\partial}{\partial \eta_j} + i a_j^{(n)}\ (\xi,\eta)$$

où les suites de fonctions $a_j^{(n)}$ (resp $b_j^{(n)}$ tendent, uniformément sur tout compact de R^{2p}, vers la fonction $\frac{\partial p}{\partial \eta_j}$ (resp $\frac{\partial p}{\partial \eta_j}$).

Démonstration du lemme 2-6 :

Les relations (2.38) et (2.39) impliquent qu'il existe une suite h_n dans $\mathcal{S}_r$ telle que les suites de fonctions

$$(\xi,\eta) \quad \to \quad \tau_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(z_n + d_n\zeta) + \frac{\partial(\mathrm{Re}\,h_n)}{\partial \xi_j}(d_n\zeta)$$

tendent, uniformément sur tout compact, vers la fonction $\frac{\partial p}{\partial \xi_j}$, et de même pour les dérivées par rapport aux variables y. La vérification du lemme est alors triviale en utilisant les équations de Cauchy-Riemann pour h_n.

Fin de la démonstration du lemme 2-5 :

Soient $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité (2.36) avec $\tau = \tau_n' = \lambda \rho_n \tau_n$ et $\phi = \phi_n = U_{(z_n,d_n,h_n)}\ \Psi$.

Quand n est assez grand, le support de φ_n est inclus dans U et l'on peut appliquer (2.36). En multipliant par d_n^2 et en utilisant le caractère unitaire de la transformation $U_{(z_n,d_n,h_n)}$, on obtient :

(2.42) $$\sum_j \|X_j^{(n)}\Psi\|^2 + \|Y_j^{(n)}\Psi\|^2 \leq C_o \sum_j \|L_j^{(n)}\Psi\|^2 + C_1 d_n^2 \|\Psi\|^2$$

Si l'on fait tendre n vers $+\infty$, l'inégalité (2.30) résulte immédiatement du lemme 2-6, que l'on applique avec P remplacé par $\lambda \mathcal{P}$ et τ_n par τ'_n.

§III - UNE CLASSE D'OPERATEURS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX SUR R^{2p} -

§III - 1 - Définitions -

Soit E_r l'ensemble des polynômes sur R^{2p}, à coefficients réels, de degré $\leqslant r$, nuls à l'origine. La variable de R^{2p} sera noté, soit (x,y) avec $x \in R^p$ et $y \in R^p$, soit $z = x + iy$, en identifiant R^{2p} et C^p. On rappelle que $\mathcal{P}_r$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes sur C^p, de degré $\leqslant r$, nuls à l'origine.

A tout polynôme $P \in E_r$, on fait correspondre un système de 2p opérateurs différentiels $\pi_p(X_j)$ et $\pi_p(Y_j)$ $(j = 1,\dots,p)$ dans R^{2p} en posant :

$$(3.1) \qquad \pi_p(X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial P}{\partial y_j} \qquad\qquad \pi_p(Y_j) = \frac{\partial}{\partial y_j} + i\frac{\partial P}{\partial x_j}$$

On posera aussi $\pi_p(L_j) = \pi_p(X_j) + i\,\pi_p(Y_j)$.

On a vu au §II que l'inégalité (1.15) pour le $\bar\partial_M$ impliquait des inégalités de la forme suivante :

$$(3.2) \qquad \sum_j \|\pi_p(X_j)\Psi\|^2 + \|\pi_p(Y_j)\Psi\|^2 \leqslant C \sum_j \|\pi_p(L_j)\Psi\|^2$$
$$\forall \Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$$

pour certains polynômes P decrivant un sous-ensemble de E que nous allons maintenant décrire, quand M est définie par (1.2).

Définition 3-1 :

Pour tout $z_o \in C^p$, on désigne par $\mathcal{L}_{z_o}$ l'ensemble des polynômes $P \in E_r$ tels qu'il existe des suites z_n dans C^p, $d_n > o$,

$\tau_n \in R^q$ et $g_n \in \mathcal{P}_r$ telles que :

(3.3) $\qquad z_n \to z_o \,,\quad d_n \to o \qquad |\tau_n| \to \infty$

et, pour tout multi-indice (α,β) tel que $1 \leqslant |\alpha+\beta| \leqslant r$

(3.4) $\qquad d_n^{|\alpha+\beta|} \partial_\xi^\alpha \partial_{\bar\xi}^\beta \Phi_{g_n}(z_n,0,\tau_n) \to \partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta P(0)$

On a utilisé la notation (2.12). D'après le lemme 2-6, il est suffisant qu'il existe des suites z_n, d_n et τ_n vérifiant (3.3) et

(3.5) $\qquad d_n^{|\alpha+\beta|} \partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta f(z_n) \,.\, \tau_n \to \partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta P(o)$ si $|\alpha| \geqslant 1$, $|\beta| \geqslant 1$ et $|\alpha+\beta| \leqslant r$

On reconnait dans les membres de gauche de (3.5), les symboles des commutateurs des champs X_j et Y_j. Cette remarque conduira aux généralisations des §V et VI.

L'étape essentielle dans la démonstration de la nécessité de la condition (2.16), c'est-à-dire le lemme 2-5, peut s'énoncer ainsi :

<u>Proposition 3-2</u> :

Si l'inégalité (1.15) est vérifiée dans un voisinage de (z_o,t_o) $(z_o \in R^{2p},\ t_o \in R^q)$, alors l'inégalité (3.2) est vérifiée pour tout $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$ et pour tout polynôme $P \in \mathcal{L}_{z_o}$. La constante C est indépendante du polynôme P.

Ensuite, nous avons montré que cela impliquait qu'aucun polynôme $P \in \mathcal{L}_{z_o}$, sauf 0, ne pouvait avoir de maximum local à l'origine, ce qui entraînait la condition ii) du théorème 2-4. En vue de démontrer le caractère suffisant de cette condition, énonçons la proposition suivante, dont la vérification est facile.

Proposition 3-3 :

Si M est définie par (1.2), la condition ii) du théorème 2-4 est vérifiée si, et seulement si, aucun polynôme $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ non nul, n'admet de maximum local à l'origine.

Examinons maintenant le cas d'une variété tubulaire (définie par (1.1)). Par analogie avec le raisonnement précédent, on est conduit à définir ici un sous ensemble $\tilde{\mathcal{L}}_{x_o}$ pour tout $x_o \in R^p$.

Définition 3-4 :

Si M est définie par (1.1), pour tout $x_o \in R^p$, on désigne par $\tilde{\mathcal{L}}_{x_o}$ l'ensemble des polynômes $P \in E_r$, de dépendant que de la variable $x \in R^p$, tels qu'il existe des suites $x_n \in R^p$, $d_n > 0$ et $\tau_n \in R^q$ telles que :

(3.3)' $\quad x_n \to x_o\ , \quad d_n \to 0\ , \quad |\tau_n| \to \infty$

et, pour tout multi-indice α tel que $1 \leq |\alpha| \leq r$, on ait :

(3.5)' $\quad d_n^{|\alpha|} \partial_x^\alpha f(x_n) . \tau_n \to \partial_x^\alpha P(0) \qquad$ si $\quad |\alpha| \geq 2$

$\qquad \partial_x^\alpha P(0) = 0 \qquad$ si $\quad |\alpha| = 1$

La condition ii) du théorème 2-3 est vérifiée si, et seulement si aucun polynôme non nul dans l'ensemble $\tilde{\mathcal{L}}_{x_o}$ n'admet de maximum local à l'origine. Pour démontrer que le théorème 2-3 n'est qu'un cas particulier du théorème 2-4, il suffit de vérifier la

Proposition 3-5 :

Si M est définie par (1.1) et si $(x_o,y_o,t_o) = (z_o,t_o) \in M$, il y a équivalence entre :

i) Aucun polynôme non nul dans l'ensemble $\mathcal{L}_{z_o}$ n'admet de maximum local à l'origine.

ii) Aucun polynôme non nul dans l'ensemble $\tilde{\mathcal{L}}_{x_o}$ n'admet de maximum local à l'origine.

Démonstration:

Les relations (3.5) et (3.5)' montrent que $\tilde{\mathcal{L}}_{x_o}$ est inclus dans $\mathcal{L}_{z_o}$, puisque f ne dépend que de x. Par conséquent, si ii) n'est pas vérifiée, i) ne l'est pas non plus. Supposons maintenant que i) ne soit pas vérifiée, donc qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ non nul, admettant un maximum local à l'origine. Soient k l'ordre d'annulation à l'origine du polynôme P, et P_k la hessienne d'ordre k de P, qui admet aussi un maximum à l'origine.

On démontrera plus tard (après la proposition 3-6), que P_k est aussi dans l'ensemble $\mathcal{L}_{z_o}$. Posons alors :

$$Q(\zeta) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=k \\ |\alpha|\geq 1, |\beta|\geq 1}} \partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta P(o) \frac{\zeta^\alpha \bar\zeta^\beta}{\alpha!\beta!}$$

$$g(\zeta) = \sum_{|\alpha|=k} \partial_z^\alpha P(o) \frac{\zeta^\alpha}{\alpha!}$$

d'après (3.5) (appliquée à la hessienne $P_k \in \mathcal{L}_{z_o}$), le polynôme Q est dans l'ensemble $\tilde{\mathcal{L}}_{x_o}$, ne dépend que de la variable ξ et l'on a, pour tout $\zeta = (\xi,\eta) \in R^{2p}$:

(3.6) $$P_k(\xi,\eta) = Q(\xi) + 2 \operatorname{Re} g(\zeta) \leq 0.$$

Par définition d'une hessienne, le polynôme $Q + 2\mathrm{Re}\, g$ est non nul. Si Q était nul, l'inégalité (3.6) serait en contradiction avec le principe du maximum. On voit facilement que, si les polynômes Q et g sont homogènes, l'inégalité (3.6) implique que Q admet un maximum à l'origine. On a montré l'existence d'un polynôme non nul Q dans $\tilde{\mathcal{L}}_{x_0}$ admettant un maximum à l'origine, donc ii) n'est pas vérifiée. L'équivalence de i) et ii) est donc démontrée.

Le théorème 2-3 n'est donc qu'un cas particulier du théorème 2-4, et il nous suffit de démontrer ce dernier.

§III - 2 - Estimations à priori pour les opérateurs $\pi_p(\mathcal{L}_j)$.

Nous allons maintenant montrer que, si la condition ii) du théorème 3-4 est vérifiée, il existe $C > 0$ tel que l'inégalité (3.2) soit vérifiée pour tout $P \in \mathcal{L}_{z_0}$. Pour cela, examinons quelques propriétés de cet ensemble $\mathcal{L}_{z_0}$.

Proposition 3-6 :

L'ensemble $\mathcal{L}_{z_0}$ a les propriétés suivantes :

i) Si $P \in \mathcal{L}_{z_0}$ et $\lambda > 0$, le polynôme Q défini par

(3.7) $$Q(x,y) = P(\lambda x, \lambda y) \qquad \forall (x,y) \in R^{2p}$$

est dans $\mathcal{L}_{z_0}$.

ii) Si $P \in \mathcal{L}_{z_0}$ et $(a,b) \in R^{2p}$, le polynôme Q défini par

$$Q(x,y) = P(x + a,\ y + b) - P(a,b)$$

est dans $\mathcal{L}_{z_0}$.

iii) Si $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ et $g \in \mathcal{S}_r$, le polynôme $Q = P + \mathrm{Re}\, g$ est dans $\mathcal{L}_{z_o}$.

iv) L'ensemble $\mathcal{L}_{z_o}$ est fermé dans E_r, muni de sa topologie naturelle.

v) Si $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme λP est dans $\mathcal{L}_{z_o}$.

Toutes ces vérifications sont immédiates. On en déduit facilement la propriété utilisée dans la démonstration de la proposition 3.5 : si $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ s'annule à l'ordre k à l'origine, alors sa hessienne d'ordre k, P_k, est aussi dans $\mathcal{L}_{z_o}$. En effet, choisissons une suite $\varepsilon_n > 0$ tendant vers 0, et définissons une suite $P^{(n)}$ de polynômes par $P^{(n)}(x,y) = \varepsilon_n^{-k} P(\varepsilon_n x, \varepsilon_n y)$ pour tout $(x,y) \in R^{2p}$. D'après les propriétés i) et v), les polynômes $P^{(n)}$ sont dans $\mathcal{L}_{z_o}$ et, d'après iv), la hessienne P_k, qui est évidemment leur limite, est aussi dans $\mathcal{L}_{z_o}$.

Pour démontrer l'inégalité (3.2), nous utiliserons deux sortes de propositions :

- Les propositions 3.7, 3.9 et 3.10 ne sont que la traduction explicite, dans le cas étudié ici, de théorèmes plus généraux sur les représentations unitaires irréductibles de certains groupes de Lie nilpotents. Leur démonstration sera publiée dans un article à paraître [A] (proposition 3.7 et 3.9) ou dans [17] (proposition 3.11).

- La proposition 3.8, qui sera démontrée ici, a pour but d'expliciter la condition d'injectivité qui apparaît dans la proposition 3.7. Elle est particulière à la situation étudiée ici, et, en particulier, ne pourrait s'appliquer à des opérateurs d'ordre > 1.

Etant donnés deux polynômes P et Q dans E_r, on écrira $P \sim Q$ si, seulement s'il existe un point (a,b) de R^{2p} et un polynôme $g \in \mathcal{S}_r$ tels que :

$$Q(x,y) = P(x + a, y + b) - P(a,b) + \mathrm{Re}\, g(x + iy) \qquad \forall\ (x,y) \in R^{2p} \tag{3.9}$$

(Cette relation d'équivalence traduit la notion d'orbite de la représentation coadjointe d'un groupe). L'intérêt de cette notion vient du fait que, si l'inégalité (3.2) est vérifiée, la même inégalité est vérifiée si l'on remplace P par Q (où $Q \sim P$).

Pour tout polynôme $P \in E_r$, désignons par $\mathcal{L}(P)$ (resp. $\tilde{\mathcal{L}}(P)$) le plus petit sous-ensemble de E_r contenant P et vérifiant les propriétés i) à iv) (resp. i) à v)) de la proposition 3.6. On vérifie facilement.

$$R \in \mathcal{L}(Q) \text{ et } Q \in \mathcal{L}(P) \quad \Rightarrow \quad R \in \mathcal{L}(P) \tag{3.10}$$

$$P \in \mathcal{L}_{z_o} \text{ et } Q \in \mathcal{L}(P) \quad \Rightarrow \quad Q \in \mathcal{L}_{z_o} \tag{3.11}$$

Etant donné $P \in E_r$, on voit que, si l'inégalité (3.2) est vérifiée, cette inégalité est aussi vérifiée, avec la même constante, si l'on remplace P par n'importe quel polynôme $Q \in \mathcal{L}(P)$, ce qui implique que, pour tout $Q \in \mathcal{L}(P)$, le système d'opérateurs $\pi_Q(L_j)$ ($j = 1,\ldots,p$) est injectif dans $\mathcal{S}(R^{2p})$.

La réciproque n'est pas vraie. On trouvera dans [A] un énoncé faisant intervenir des ensembles de représentations unitaires irréductibles vérifiant des conditions qui correspondent aux i)....iv) ci-dessus. Nous nous contenterons ici de l'énoncé suivant :

Proposition 3-7 :

Soit $P \in E_r$. On suppose que, pour tout $Q \in \mathbb{L}(P)$ ne vérifiant pas $Q \sim 0$, le système d'équations $\pi_Q(\mathbb{L}_j)\ \Psi = 0 (j = 1,\dots p)$ n'a aucune solution $\Psi \in C^\infty(R^{2p})$ dont le module $|\Psi|$ admette un maximum non nul atteint en un point. Alors, il existe $C(P) > 0$ tel qu'on ait

$$(3.12) \qquad \sum_j \|\pi_p(X_j)\Psi\|^2 + \|\pi_p(Y_j)\Psi\|^2 \leqslant C(P) \sum_j \|\pi_p(\mathbb{L}_j)\Psi\|^2$$

pour tout $\Psi \in C_o^\infty (R^{2p})$.

On va maintenant chercher à quelle conditon explicite l'hypothèse d'injectivité de la proposition 3.7 est vérifiée.

Proposition 3.8 :

Soit $P \in E_r$, ne vérifiant pas $P \sim 0$. On suppose qu'aucun élément $Q \in \overline{\mathbb{L}} (P)$, non nul, n'admet de maximum local à l'origine. Alors le système d'équations

$$(3.13) \qquad \pi_p(\mathbb{L}_j)\ \Psi = 0 \qquad j = 1,\dots p$$

n'admet aucune solution $\Psi \in C^\infty(R^{2p})$ dont le module admette un maximum non nul atteint en un point.

Démonstration :

Supposons qu'il existe une fonction $\Psi \in C^\infty(R^{2p})$, non identiquement nulle, qui vérifie (3.13), et dont le module atteint un maximum en un point $z_o \in R^{2p}$

$$(3.14) \qquad |\Psi(z)| \leqslant |\Psi(z_o)| \qquad \forall\ z \in R^{2p}$$

On voit qu'on peut écrire toute solution des équations (3.13) sous la forme $\Psi(z) = e^{P(x,y)}\,\phi(z)$, où $\dfrac{\partial \phi}{\partial \overline{z_j}} = o$ $(j = 1, \text{----} p)$. Autrement dit, la fonction ϕ est holomorphe si l'on identifie R^{2p} et C^p.

Puisque $\phi(z_o) \neq 0$, il existe un voisinage V de z_o et une fonction g holomorphe dans V telle que

$$\phi(z) = e^{g(z)} \qquad \forall\, z \in V$$

L'inégalité (3.14) entraîne donc

$$(3.15) \qquad P(x,y) + \operatorname{Re} g(z) \leqslant P(x_o, y_o) + \operatorname{Re} g(z_o) \qquad \forall z = (x,y) \in V$$

On définit un polynôme Q et une fonction h, holomorphe au voisinage de l'origine, en posant :

$$Q(x,y) = P(x_o + x, y_o + y) - P(x_o, y_o)$$

$$h(z) = g(z_o + z) - g(z_o)$$

D'après la propriété ii) de l'ensemble $\mathcal{L}(P)$, le polynôme Q est dans $\mathcal{L}(P)$ et l'on a, dans un voisinage V_1 de l'origine :

$$(3.16) \qquad Q(x,y) + \operatorname{Re} h(z) \leqslant 0 \qquad \forall\, z = (x,y) \in V_1$$

Désignons par k $(k \geqslant 1)$ l'ordre d'annulation à l'origine de la fonction Q + Re h. Si l'entier k était $\geqslant r+1$ (ou s'il était infini), le polynôme Q vérifierait $Q \sim 0$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $1 \leqslant k \leqslant r$. Désignons par Φ la hessienne d'ordre k de la fonction Q + Re h. Par définition, ce polynôme est non nul. Montrons qu'il est dans $\overline{\mathcal{L}}(Q)$.

Si l'on désigne par h_r le développement taylorien d'ordre r à l'origine de la fonction h, le polynôme $Q + \operatorname{Re} h_r$ est dans $\mathcal{L}(Q)$ d'après la propriété iii), donc sa hessienne d'ordre k, Φ, est aussi dans $\tilde{\mathcal{L}}(Q)$ comme on l'a vu, donc dans $\tilde{\mathcal{L}}(P)$. On déduit de l'inégalité (3.16) que

$$(3.17) \qquad \Phi(x,y) \leq \Phi(o,o) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in R^{2p}$$

Il existerait donc, contrairement à l'hypothèse, un polynôme $\Phi \in \tilde{\mathcal{L}}(P)$ non nul, admettant un maximum à l'origine.

D'après les propositions 3.3, 3.7 et 3.8, on voit que, si l'hypothèse ii) du théorème 2-4 est vérifiée, alors, pour tout $P \in \mathcal{L}_{z_o}$, il existe une constante $C(P) > 0$ telle que l'inégalité (3-2) soit vérifiée. Le théorème suivant nous affirme que cette constante $C(P)$ peut en fait être choisie indépendante de P.

Proposition 3-9 :

Soit $\mathcal{L}$ un sous-ensemble de E_r vérifiant les propriétés i) à iv) de la proposition 3-4. On suppose que, pour tout $P \in \mathcal{L}$, il existe une constante $C(P) > 0$ telle que l'inégalité (3.12) soit vérifiée. Alors la constante $C(P)$ peut être choisie indépendante de $P \in \mathcal{L}$.

D'après les propositions 3-3, 3-7, 3-8 et 3-9, si l'hypothèse ii) du théorème 2-4 est vérifiée, il existe $C > 0$ tel que l'inégalité (3-2) soit vérifiée pour tout $P \in \mathcal{L}_{z_o}$.

En combinant les propositions 3-7, 3-8 et 3-9 et les raisonnements du §II, on obtient la

Proposition 3-10 :

Pour tout $P \in E_r$, il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) Il existe $C(P) > 0$ tel que l'on ait, pout tout $\lambda \in R$ et pour tout $\Psi \in C_0^\infty(R^{2P})$

(3.18) $$\sum_j \| \pi_{(\lambda P)}(X_j)\,\Psi\|^2 + \|\pi_{(\lambda P)}(Y_j)\,\Psi\|^2 \leqslant C(P) \sum_j \|\pi_{\lambda P}(Z_j)\,\Psi\|^2$$

iii) Aucun polynôme Q dans $\tilde{L}(P)$, non nul, n'admet de maximum local à l'origine.

De plus, si L vérifie les propriétés i) à v) de la proposition 3-6, et si aucun polynôme non nul $Q \in L$ n'admet de maximum local à l'origine, alors l'inégalité (3.18) est vérifiée avec une constante indépendante de $P \in L$.

La condition iii) exclut que le polynôme P soit plurisousharmonique.

Le théorème de plongement de Moukadem [17] -

A tout polynôme $P \in E_r$, on va associer la fonction R_P suivante, définie sur R^{2P}, à valeurs dans R^+ (en posant $\zeta = \xi + i\eta$) :

(3.20) $$R_P(\xi,\eta) = \left[\sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leqslant r \\ |\alpha| \geqslant 1,\, |\beta| \geqslant 1}} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta P(\xi,\eta)|^{\frac{2r!}{|\alpha+\beta|}} \right]^{\frac{1}{2r!}}$$

La proposition suivante est une conséquence du théorème d'interpolation de Moukadem [17] :

<u>Proposition 3-11</u> :

Il existe $k > 0$ tel que l'on ait, pour tout polynôme $P \in E_r - \{o\}$, et pour tout $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$:

$$(3.21) \qquad \sum_j \|\pi_{\mathbf{P}}(X_j)\,\Psi\|^2 + \|\pi_{\mathbf{P}}(Y_j)\,\Psi\|^2 \geqslant k \int_{R^{2p}} R_{\mathbf{P}}(\zeta)^2\,|\Psi(\zeta)|^2 d\xi d\eta$$

§IV - DEMONSTRATION POUR LA CONDITION SUFFISANTE -

Soit (z_o,t_o), un point de type r dans $M = R^{2p} \times R^q$. On suppose vérifiée la condition ii) du théorème 2-4. D'après les propositions 3-3 et 3-7 à 3-11, on en déduit qu'il existe $C_o > 0$ tel que l'on ait, pour tout $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ et pour tout $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$

$$(4\text{-}1) \qquad \sum_j \|\pi_P(X_j)\ \Psi\|^2 + \|\pi_P(Y_j)\ \Psi\|^2 + \|R_P\ \Psi\|^2 \leq C_o \sum_j \|\pi_P(L_j)\Psi\|^2$$

Pour finir de démontrer le théorème 2-4, il nous suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 4-1 :

Avec les notations ci-dessus, si l'inégalité (4-1) est vérifiée pour tout $P \in \mathcal{L}_{z_o}$ et pour tout $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p})$, alors il existe un voisinage V de z_o et deux constantes $C_1 > 0$ et $\tau_o > 0$ tels qu'on ait :

$$(4\text{-}2) \qquad \sum_j \|\hat{X}_j(\tau)u\|^2 + \|\hat{Y}_j(\tau)u\|^2 \leq C_1 \sum_j \|\hat{L}_j(\tau)u\|^2$$

pour tout $u \in C_o^\infty(V)$ et $\tau \in R^q$ tel que $|\tau| \geq \tau_o$.

Les opérateurs $\hat{X}_j(\tau)$, $\hat{Y}_j(\tau)$ et $\hat{L}_j(\tau)$ sont définis en (2.35). L'inégalité (1.15), donc le théorème 2-4, se déduisent immédiatement de (4.2) par transformation de Fourier partielle.

Pour simplifier les notations, on conviendra d'écrire $\|Xu\|^2$ au lieu de $\sum_j(\|X_ju\|^2 + \|Y_ju\|^2)$, et $\|Lu\|^2$ au lieu de $\sum \|L_ju\|^2$, et de même pour tous les opérateurs transformés des précédents, notamment les $\hat{X}_j(\tau)$ et $\pi_P(X_j)$.

La fonction M de Egorov -

Désignons par $\{X_I\}_{2\leqslant|I|\leqslant r}$ le système des commutateurs de longueur comprise entre 2 et r des champs de vecteurs X_j et Y_j, et par $|I|$ la longueur du crochet correspondant. Si $2 \leqslant |I| \leqslant r$, le symbole de l'opérateur X_I est une fonction de $z \in R^{2p}$ et $\tau \in R^q$, notée évidemment $X_I(z,\tau)$. Selon Egorov [4], on pose, pour tous $z \in R^{2p}$ et $\tau \in R^q$:

$$(4.3) \qquad M(z,\tau) = \left[\sum_{2\leqslant|I|\leqslant r} |X_I(z,\tau)|^{\frac{2r!}{|I|}} + 1 \right]^{\frac{1}{2r!}}$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, on a aussi :

$$(4.4) \qquad M(z,\tau) = \left[\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leqslant r \\ |\alpha|\geqslant 1,\, |\beta|\geqslant 1}} |\partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta f(z).\tau|^{\frac{2r!}{|\alpha+\beta|}} + 1 \right]^{\frac{1}{2r!}}$$

La fonction M est dans $C^\infty(R^{2p} \times R^q)$. D'après la condition de Hörmander, il existe un voisinage K de z_o dans R^{2p}, et une constante $C > 0$, tels que :

$$(4.5) \qquad C^{-1}(1 + |\tau|)^{\frac{1}{r}} \leqslant M(z,\tau) \leqslant C(1 + |\tau|)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall (z,\tau) \in K \times R^q$$

On utilisera la remarque suivante, dont la vérification est immédiate :

Remarque 4-2 :

Il existe un voisinage K de z_o dans R^{2p}, et une constante $C_K > 0$, tels que :

$$(4.6) \qquad |\mathrm{grad}_z\, M(z,\tau)| \leqslant C_K\, M(z,\tau)^2 \qquad \forall\, (z,\tau) \in K \times R^q$$

On va maintenant démontrer la proposition 4-1 en 2 étapes :

1) On démontre (4.2) pour des fonctions u dans certains sous-ensembles $E_{(z,\tau,a)}$ de $C_o^\infty(R^{2p})$, que l'on va définir pour tous $z \in R^{2p}$ et $\tau \in R^q$.

2) On recolle les inégalités obtenues, grâce à une partition de l'unité convenable.

Définition d'un sous-ensemble $E_{(z,\tau,a)}$ de $C_o^\infty(R^{2p})$ -

Définition 4-3 :

Pour tous $z \in R^{2p}$, $\tau \in R^q$ et $a > 1$, on désignera par $E_{(z,\tau,a)}$ l'ensemble des $\Psi \in C_o^\infty$ (R^{2p}) tels que :

1) Le support de Ψ est inclus dans la boule de centre z et de rayon $\frac{a}{M(z,\tau)}$.

2) On a, pour tout z' dans le support de Ψ :

(4.7) $$\frac{1}{a} M(z,\tau) \leqslant M(z',\tau) \leqslant a\, M(z,\tau).$$

Voici la première étape dans la démonstration de la proposition 4-1.

Lemme 4-3 :

Sous l'hypothèse de la proposition 4-1, pour tout $a > 1$, il existe un voisinage V_a de z_o et une constante $\tau_o(a) > 0$ tels que l'on ait :

(4.8) $$\|\hat{X}(\tau)u\|^2 + \int M(z,\tau)^2 \, |u(z)|^2 \, dxdy \leqslant 2\, C_o \, \|\hat{L}(\tau)u\|^2$$

si $u \in C_o^\infty(V_a)$, $\tau \in R^q$, $|\tau| \geqslant \tau_o(a)$, et s'il existe $z_1 \in R^{2p}$ tel que $u \in E_{(z_1,\tau,a)}$.

Démonstration :

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $a > 1$, et des suites $\varepsilon_n > 0$, $\tau_n \in R^q$, $u_n \in C_o^\infty (R^{2p})$ et $z_n \in R^{2p}$ telles que :

(4.9) $$\varepsilon_n \longrightarrow 0 \ , \quad |\tau_n| \longrightarrow +\infty \ , \qquad \text{supp } u_n \subset B\,(z_o, \varepsilon_n)$$

(4.10) $$u_n \in E_{(z_n, \tau_n, a)} \qquad\qquad u_n \not\equiv 0$$

(4.11) $$\|\hat{X}(\tau_n)\, u_n\|^2 + \int M(z,\tau_n)^2\, |u_n(z)|^2\, dxdy \ \geqslant 2c_o\, \|\hat{L}(\tau_n) u_n\|^2$$

Soit $d_n = M(z_n, \tau_n)^{-1}$. On a $d_n \longrightarrow 0$ d'après (4.5) et (4.9), et, d'après (4.9) et (4.10), la suite z_n tend vers z_o. D'après la définition de la fonction M, les suites $d_n^{|\alpha+\beta|}\, \partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta f(z_n).\tau_n$ sont bornées

si $|\alpha+\beta| \leqslant 1$, $|\alpha| \geqslant 1$ et $|\beta| \geqslant 1$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elles admettent des limites $\ell_{\alpha\beta}$.

(4.12) $$d_n^{|\alpha+\beta|}\, \partial_z^\alpha \partial_{\bar z}^\beta f(z_n).\, \tau_n \longrightarrow \ell_{\alpha\beta} \ , \quad |\alpha+\beta| \leqslant r \ , \ |\alpha| \geqslant 1, |\beta| \geqslant 1.$$

On a évidemment $\Sigma\, |\ell_{\alpha\beta}| \neq 0$. Posons :

(4.13) $$P(\zeta) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leqslant r \\ |\alpha|\geqslant 1,\, |\beta|\geqslant 1}} \ell_{\alpha\beta}\, \frac{\zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta}{\alpha!\beta!}$$

D'après (4.12) et (3.5), ce polynôme est dans l'ensemble $\mathcal{L}_{z_o}$. D'après

le lemme 2-6, dont on reprend les notations, il existe une suite g_n dans $\mathcal{P}_r$ telle que les opérateurs $X_j^{(n)}$ et $Y_j^{(n)}$ définis en (2.40) aient les propriétés énoncées dans ce lemme. Soit

$$v_n = U^{-1}_{(z_n, d_n, g_n)}\, u_n$$

On déduit de (4.11), après multiplication par d_n^2, en utilisant le caractère unitaire de $U_{(z_n,d_n,g_n)}$ et la définition des $X_j^{(n)}$, que :

$$(4.14) \qquad \|X^{(n)}\mathcal{V}_n\|^2 + \int d_n^2 \; M(z_n+d_n\zeta,\tau_n)^2 \; |\mathcal{V}_n(\zeta)|^2 \; d\xi d\eta \; \geq 2C_0 \|L^{(n)}\mathcal{V}_n\|^2$$

Puisque P est dans L_{z_0}, on a, d'après l'hypothèse de la proposition 4-1

$$(4.15) \qquad \|\pi_P(X)\mathcal{V}_n\|^2 + \int R_P(\zeta)^2 |\mathcal{V}_n(\zeta)|^2 d\xi d\eta \leq C_0 \|\pi_P(L)\mathcal{V}_n\|^2$$

On peut évidemment supposer que $\|\mathcal{V}_n\| = 1$. On va démontrer alors que la différence entre chaque membre de (4.14) et le membre correspondant de (4.15) tend vers 0.

Par définition de l'ensemble $E_{(z_n,\tau_n,a)}$, le support de u_n est inclus dans la boule $B\big(z_n, a/M(z_n,\tau_n)\big) = B(z_n, a\, d_n)$. D'après la forme (2.37) de la transformation $U_{(z_n,d_n,g_n)}$, le support de $\mathcal{V}_n$ est inclus dans B(o,a), donc dans un compact fixe.

D'après la forme (2.41) des opérateurs $X_j^{(n)}$ et d'après le lemme 2-6, on a :

$$(4.16) \qquad \|\pi_P(X_j)\mathcal{V}_n - X_j^{(n)}\mathcal{V}_n\| \leq \sup_{|\xi|+|\eta|\leq a} |b_j^{(n)}(\xi,\eta) - \frac{\partial P}{\partial \eta_j}| \; \|\mathcal{V}_n\| \to 0$$

On va vérifier aussi que :

$$(4.17) \qquad d_n \, M(z_n+d_n\,\zeta,\;\tau_n) \;\longrightarrow\; R_p(\zeta)$$

uniformément sur tout compact. D'après les définitions de ces fonctions, il suffit de vérifier que :

$$(4.18) \qquad d_n^{|\alpha+\beta|} \; \partial_z^{\alpha}\partial_{\bar z}^{\beta} \; f(z_n+d_n\,\zeta)\,.\;\tau_n \;\longrightarrow\; \partial_\zeta^{\alpha}\partial_{\bar\zeta}^{\beta}\, P(\zeta)$$

uniformément sur tout compact, si $|\alpha+\beta|\leqslant r$, $|\alpha|\geqslant 1$ et $|\beta|\geqslant 1$. Cela résulte immédiatement de (4.12), de la formule de Taylor, et du fait que la suite $d_n^r|\tau_n|$ est bornée d'après (4.5).

On a bien montré que la différence entre chaque membre de (4.14) et le membre correspondant de (4.15) tend vers 0. Pour établir la contradiction entre (4.14) et (4.15), il suffit de s'assurer que l'un des quatre membres de ces inégalités ne tend pas vers 0. En effet, d'après la définition de $E_{(z_n,\tau_n,a)}$, on a, pour tout ζ dans le support de $\mathcal{V}_n$:

(4.19) $$d_n\, M(z_n+d_n\,\zeta,\ \tau_n) \geqslant \frac{1}{a}$$

de sorte que le membre de gauche de (4.14) est $\geqslant \frac{1}{a^2}$. La contradiction entre (4.14) et (4.15) étant établie, le lemme 4-4 est démontré.

<u>Fin de la démonstration de la proposition 4-1</u> :

On va utiliser le lemme suivant pour "recoller" les inégalités obtenues d'après le lemme 4-4.

<u>Lemme 4-5</u> :

Pour tout $\delta \in]0,1]$ et pour tout $\tau \in R^q$, il existe une suite $\phi_{j\delta}(.,\tau)(j \in \mathbb{N})$ de fonctions dans $C_0^\infty(R^{2p})$, réelles, et une suite $z_{j\delta}$ $(j \in N)$ de points de R^{2p}, telles que :

(4.20) 1) $$\sum_{j \in N} \phi_{j\delta}(z,\tau)^2 = 1 \qquad \forall\, z \in R^{2p} \qquad \forall\, \tau \in R^q$$

2) Pour tous $u \in C^\infty(R^{2p})$, $\tau \in R^q$, $j \in N$ et $\delta \in]0,1]$, la fonction $z \longrightarrow \phi_{j\delta}(z,\tau)\, u(z)$ est dans l'ensemble $E_{(z_{j\delta},\tau,a(\delta))}$,

où $a(\delta)$ est une fonction de δ telle que $a(\delta) > 1$.

3) Il existe un voisinage compact K de z_o, et une constante $C > 0$ (indépendante de δ), tels que

(4.21) $$\sum_{j \in N} |\text{grad}_z \, \phi_{j\delta}(z,\tau)|^2 \leq C\delta^2 \, M(z,\tau)^2$$

pour tous $z \in K$, $\tau \in R^q$ et $\delta \in]0,1]$.

Admettons un instant ce lemme, et montrons que la proposition 4-1 s'en déduit. D'après le lemme 4-4, pour tout $\delta \in]0,1]$, pour tout $u \in C_o^\infty(V_{(a(\delta))})$, pour tout $\tau \in R^q$ tel que $|\tau| \geq \tau_o(a(\delta))$, et pour tout $j \in N$, on a :

(4.22) $$\|\hat{X}(\tau)\phi_{j\delta}u\|^2 + \int M(z,\tau)^2 \phi_{j\delta}(z,\tau)^2 |u(z)|^2 \, dxdy \leq 2\, C_o \, \|\hat{\mathbb{L}}(\tau)\phi_{j\delta}\, u\|^2$$

Ajoutant toutes ces inégalités (quand j décrit N), on obtient :

(4.23) $$\|\hat{X}(\tau)u\|^2 + \int M(z,\tau)^2 |u(z)|^2 \, dxdy \leq 2C_o \, \|\hat{\mathbb{L}}(\tau)u\|^2 + C_1 \sum_{j \in N} \|\text{grad}\, \phi_{j\delta}\, u\|^2$$

où $C_1 > 0$ est indépendant de δ. D'après (4.21), on en déduit, si $u \in C_o^\infty\big(K \cap V(a(\delta))\big)$ et $|\tau| \geq \tau_o\,(a(\delta))$:

(4.24) $$\|\hat{X}(\tau)u\|^2 + \int M(z,\tau)^2 |u(z)|^2 \, dxdy \leq 2\, C_o \, \|\hat{\mathbb{L}}(\tau)u\|^2 + C_1 \, \delta^2 \int M(z,\tau)^2 |u(z)|^2 \, dxdy$$

En choisissant δ assez petit, on en déduit bien l'inégalité (4.2).

Démonstration du lemme 4-5 :

La suite de fonctions à construire sera en fait, indexée par deux indices j et k, et notée $\phi_{jk\delta}$. On sait qu'il existe une suite Ψ_j ($j \in N$) dans C_o^∞ ($\overline{R}^+$) et une constante $C > 0$ telles que :

(4.25) $\sum \Psi_j(t)^2 = 1 \qquad \forall\, t \in \overline{R}^+$

(4.26) supp. $\Psi_j \subset [j, j+2] \qquad \forall\, j \in N$

(4.27) $\sum |\phi_j'(t)|^2 \leqslant C \qquad \forall\, t \geqslant 0$

De même, il existe une suite θ_k $(k \in N)$ dans $C_o^\infty(R^{2p})$ telle que :

(4.28) $\sum\limits_k \theta_k(z)^2 = 1 \qquad \forall\, z \in R^{2p}$

(4.29) Le support de θ_k est de diamètre inférieur ou égal à 1.

(4.30) $\sum |\text{grad}\, \theta_k(z)|^2 \leqslant C \qquad \forall\, z \in R^{2p}$

On pose alors, pour tous $j \in N$, $k \in N$ et $\delta \in]0,1]$, $z \in R^{2p}$ et $\tau \in R^q$.

(4.31) $\phi_{jk\delta}(z,\tau) = \phi_j\,(\delta \text{Log}\, M(z,\tau))\; \theta_k\,(\delta e^{j/\delta} z)$

On désigne par $z_{jk\delta}$ un point quelconque du support de cette fonction. (Ce point peut aussi dépendre de τ).

La vérification du point 1) est triviale. On voit facilement que, pour tout z dans le support de $\phi_{jk\delta}$ et pour tout $\tau \in R^q$, on a

(4.32) $e^{j/\delta} \leqslant M(z,\tau) \leqslant e^{\frac{j+1}{\delta}}$

et

(4.33) $|z - z_{jk\delta}| \leqslant \dfrac{1}{\delta e^{j/\delta}} \leqslant \dfrac{e^{1/\delta}}{\delta\, M(z_{jk\delta},\tau)}$

Par conséquent, pour tout $\tau \in R^q$, la fonction $z \to \phi_{jk\delta}(z,\tau)$ **est** bien dans l'ensemble $E_{(z_{jk\delta},\ \tau,\ a(\delta)\ )}$ si l'on pose $a(\delta) = \dfrac{e^{1/\delta}}{\delta}$. La vérification de l'inégalité (4.21) est immédiate en utilisant (4.27), (4.30), (4.32) et la remarque 4-2. Le lemme 4-5 est donc démontré.

§V - LE CAS D'UNE HYPERSURFACE -

On considère maintenant une sous-variété M de C^{p+1} définie par

(1.3) $M = \{z,z') \in \mathbf{C}^p x \mathbf{C}\ ,\ x' = f(z,t)\}$

où $f \in C^\infty(R^{2p} x R)$. on a posé $z' = x' + it$. La variété M sera identifiée à $R^{2p} \times R$. On se place au voisinage d'un point (z_o,t_o) de type r.

La condition d'hypoellipticité maximale va encore faire intervenir une fonction qui ne devra pas admettre de maximum local. Nous allons définir maintenant cette fonction.

On désignera par $g : M = R^{2p} \times R \longrightarrow R$ la projection, définie par

(5.1) $g(z,t) = t \qquad \forall\ (z,t) \in M$

Rappelons que :

(5.2) $\mathbb{L}_j\ (f + ig) = 0 \qquad j = 1,\dots p$

Pour tout $(\zeta = \xi + i\eta)$ dans R^{2p}, on considère le champ de vecteur

(5.3) $A(\zeta) = \sum_{j=1}^{p} (\xi_j X_j + \eta_j Y_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} (\zeta_j \overline{\mathbb{L}}_j + \overline{\zeta}_j \mathbb{L}_j)$

Il existe un voisinage Ωde (z_o,t_o) et un réel $d_1 > 0$ tels que l'exponentielle du champ $A(\zeta)$, notée $\exp A(\zeta)$, soit bien définie dans Ω, à valeurs dans M, si $|\zeta| \leqslant d_1$. On lui associe l'opérateur

(5.4) $\exp A(\zeta)\ :\ C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$

Pour toute fonction $h \in \mathcal{S}_r$, on définit une fonction Φ_h dans $\Omega \times B$, (où B est la boule de centre 0 et de rayon d_1 dans C^p), en posant :

(5.5) $\qquad \Phi_h(z,t,\zeta) = (\exp A(\zeta)f)(z,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(z,t)\ (\exp A(\zeta)g)(z,t)$

$\qquad\qquad + \operatorname{Re} h\ (\zeta)$

pour tous $(z,t) \in \Omega$ et $\zeta \in B$.

On va démontrer dans ce § que, si le système $\bar\partial_M$ est hypoelliptique maximal au voisinage d'un point (z,t) de type r, et si $h \in \mathcal{P}_r$, alors la fonction $\zeta \longrightarrow \Phi_h(z,t,\zeta)$ n'admet pas de maximum local à l'origine.

Cette condition n'est pas suffisante. On va aussi démontrer le :

<u>Théorème 5-1</u> :

Si le système $\bar\partial_M$ est hypoelliptique maximal au voisinage d'un point (z_o,t_o) de type r, il existe un voisinage V de (z_o,t_o) et deux constantes $C_o > 0$ et $d_o > 0$ telles que l'on ait :

(5.6) $$\sup_{|\zeta|\leq d} \Phi_h(z,t,\zeta) - \Phi_h(z,t,o) \geqslant C_o \sum_{1\leq|\alpha\ \beta|\leq r} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta\ \Phi_h(z,t,o)|\,d^{|\alpha+\beta|}$$

pour tous $(z,t) \in V$ et $h \in \mathcal{P}_r$, si $0 < d \leqslant d_o$.

Bien entendu, le même raisonnement prouve qu'on doit avoir aussi l'inégalité analogue, où f est remplacée par -f, c'est-à-dire :

(5.6)' $$\sup_{|\zeta|\leq d} \Phi_h(z,t,0) - \Phi_h(z,t,\zeta) \geqslant C_o \sum_{1\leq|\alpha+\beta|\leq r} |\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta\ \Phi_h(z,t,0)|\,d^{|\alpha+\beta|}$$

Nous espérons démontrer dans un article ultérieur que les inégalités (5.6) et (5.6)' sont suffisantes pour l'hypoellipticité maximale du $\bar\partial_M$.

<u>1ère étape : traduction de la condition de Hörmander</u> :

Rappelons que la matrice de Lévi a_{jk} est définie par :

(1.18) $a_{jk} = (L_j\bar{L}_k + \bar{L}_k L_j)f$

et que l'on a :

(1.17) $[L_j, \bar{L}_k] = - i a_{jk} \frac{\partial}{\partial t}$

Suivant Kohn [15], on considère, pour tout $q \geq 2$, un idéal I_q dans $C^\infty(M)$.

<u>Définition 5-2</u> :

Pour tout $q \geq 2$, on désigne par I_q l'idéal dans l'algèbre des fonctions C^∞ sur M, à valeurs complexes, engendré par les fonctions de la forme $V_1 \ldots\ldots V_m a_{jk}$ $(0 \leq m \leq q-2,\ 1 \leq j,\ k \leq p)$, où les $V_1 \ldots\ldots V_m$ sont des champs de vecteurs sur M, chacun d'eux étant égal, soit à l'un des L_s, soit à l'un des $\bar{L}_s$ $(1 \leq s \leq p)$. On conviendra que $I_1 = \{0\}$.

On voit que si Y est un commutateur, de longueur q comprise entre 2 et r, des champs X_j et Y_j, on peut écrire

(5.7) $Y = \phi \frac{\partial}{\partial t}$

où ϕ est **dans l'idéal** I_q. Par conséquent, si (z_o, t_o) est de type r, on :

(5.8) $\exists \phi \in I_r \qquad \phi(z_o, t_o) \neq 0$

<u>2ème étape : développement taylorien de la fonction $\zeta \longrightarrow \Phi(z,t,\zeta)$</u>

Posons, pour tous multi-indices α et β dans N^p tels que $|\alpha| \geq 1$ et $|\beta| \geq 1$

(5.9) $$a_{\alpha\beta}(z,t) = \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_h(z,t,0) \qquad (|\alpha| \geq 1,\ |\beta| \geq 1)$$

pour tous h dans $\mathcal{P}_r$ et (z,t) dans M. (La fonction $a_{\alpha\beta}$ est évidemment indépendante de h).

Proposition 5-3 :

Avec las notations ci-dessus :

i) La fonction $a_{\alpha\beta}$ est dans l'idéal $I_{|\alpha+\beta|}$ $(|\alpha| \geq 1$ et $|\beta| \geq 1)$

ii) On a, si $|\alpha| \geq 1$ et $|\beta| \geq 1$:

(5.10) $$a_{\alpha\beta} = 2^{-|\alpha+\beta|}[(\bar{L}^\alpha L^\beta f) - (\frac{\partial f}{\partial t})(\bar{L}^\alpha L^\beta g)] \qquad \text{mod. } I_{|\alpha+\beta|-1}$$

iii) En désignant par (j) le multi-indice $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, où le 1 est à la j^{me} place, on a, pour tous α et β dans N^p, j et k dans $\{1,\ldots,p\}$:

(5.11) $$a_{\alpha+(j),\beta+(k)} = 2^{-|\alpha+\beta|-3}\left[1 + (\frac{\partial f}{\partial t})^2\right] \bar{L}^\alpha L^\beta a_{jk} \qquad \text{mod. } I_{|\alpha+\beta|+1}$$

La proposition 5-3 est une conséquence du lemme technique suivant, qui figure partiellement dans Kohn [15].

Lemme 5-4 -

On a, pour tout entier $q \geq 2$, les propriétés suivantes :

i) Soient $V_1 \ldots V_q$ des champs de vecteurs sur M, chacun d'eux étant, soit l'un des L_j, soit l'un des $\bar{L}_j$, et la suite $V_1 \ldots V_q$ contenant au moins l'un des L_j et l'un des $\bar{L}_j$. Alors les fonctions $V_1 \ldots V_q f$ et $V_1 \ldots V_q g$ sont dans l'idéal I_q.

ii) Si $W_1 \ldots W_q$ est une autre suite, formée des mêmes champs $V_1 \ldots V_q$ placés dans un autre ordre, la fonction

(5.12) $\qquad (V_1 \ldots V_q\, f) - (\frac{\partial f}{\partial t})(V_1 \ldots V_q\, g) - (W_1 \ldots W_q F) + (\frac{\partial f}{\partial t})(W_1 \ldots W_q\, g)$

est dans l'idéal I_{q-1} .

iii) Avec la notations ci-dessus, la fonction

(5.13) $\qquad (V_1 \ldots V_q\, a_{jk}) - (W_1 \ldots W_q\, a_{jk}) \qquad 1 \leqslant j,k \leqslant p$

est dans l'idéal I_{q+1}.

iv) Pour tous α et β dans N^p, j et k dans $\{1,----p\}$, on a

(5.14) $$(\bar{L}^\alpha L^\beta \bar{L}_j L_k\, f) - (\frac{\partial f}{\partial t})\ (\bar{L}^\alpha L^\beta \bar{L}_j L_k\, g) = $$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + (\frac{\partial f}{\partial t})^2\right] \bar{L}^\alpha L^\beta a_{kj} \qquad \text{mod. } I_{|\alpha+\beta|+1}$$

<u>Démonstration du lemme 5-4</u> :

On commence par démontrer les points i) et ii) par récurrence sur l'entier $q \geqslant 2$. Si $q = 2$, les points i) et ii) résultent de

(5.15) $\qquad \bar{L}_j L_k\, f = \frac{1}{2} a_{kj}\ (1 + i\,\frac{\partial f}{\partial t}) \qquad \bar{L}_j L_k\, g = i\,\bar{L}_j L_k\, f$

(5.16) $\qquad L_k \bar{L}_j\, f = \frac{1}{2} a_{kj}\ (1 - i\,\frac{\partial f}{\partial t}) \qquad L_k \bar{L}_j\, g = -\, i\, L_k \bar{L}_j\, f$

et de

(5.57) $\qquad [\bar{L}_j, L_k]\ f = i\, a_{kj}\, \frac{\partial f}{\partial t} = i\,\frac{\partial f}{\partial t}\ [\bar{L}_j, L_k] g.$

Soit maintenant $q \geqslant 3$. On suppose la propriété i) vérifiée pour tout suite de champs de longueur $\leqslant q - 1$. Soit $V_1 \ldots V_q$ une suite ayant les propriétés énoncées. Deux cas peuvent se présenter :

1) Si la suite $V_2 \ldots V_q$ contient au moins l'un des L_j et l'un des $\bar{L}_j$, l'hypothèse de récurrence nous dit que $V_2 \ldots V_q g$ sont dans I_{q-1} . Comme $V_1 : I_{q-1} \longrightarrow I_q$, la propriété i) est bien vérifiée.

Supposons maintenant la propriété ii) vérifiée pour toute suite de champs de longueur $\leqslant q - 1$. Soient $V_1 \ldots . V_q$ et $W_1 \ldots . W_q$ deux suites ayant les propriétés énoncées. Quitte à effectuer un produit de permutations, on peut supposer qu'on est dans un cas 2 cas suivants :

1) Ou bien $V_1 = W_1$ et les suites $V_2 \ldots . V_q$ et $W_2 \ldots . W_q$ se déduisent l'une de l'autre par permutation.

2) ou bien $V_1 = W_2$, $V_2 = W_1$ et $V_j = W_j$ si $j \geqslant 3$.

Dans le cas 1) on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence aux suites $V_2 \ldots . V_q$ et $W_2 \ldots . W_q$, et en utilisant le fait que $V_1 : I_{q-2} \longrightarrow I_{q-1}$ et la propriété i). Dans le deuxième cas, on voit que la fonction définie en (5.12) est dans I_2.

Propriété iii) - Si $q \leqslant 2$, cette propriété est évidente. Ensuite, la récurrence est identique à celle du point ii).

Propriété iv) - On déduit immédiatement de (5.15) que :

$$(\overline{L}_j L_k f) - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) (\overline{L}_j L_k g) = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \right] a_{kj} \tag{5.18}$$

La propriété iv) s'en déduit en appliquant l'opérateur $\overline{L}^{\alpha} L^{\beta}$ aux deux membres de (5.18), et en utilisant la propriété i). Le lemme 5-4 est donc démontré.

Démonstration de la proposition 5-3 :

D'après (5.3) et (5.5), la fonction $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha!\beta!)$ est le coefficient de $\zeta^{\alpha}\overline{\zeta}^{\beta}$ dans le développement de la fonction suivante, où l'on pose $q = |\alpha+\beta|$:

$$\zeta \longrightarrow \frac{1}{2^q q!} \left[\left(\sum_j \zeta_j \overline{L}_j + \overline{\zeta}_j L_j\right)^q f - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\sum_j \zeta_j \overline{L}_j + \overline{\zeta}_j L_j\right)^q g \right] \tag{5.19}$$

Le point i) du lemme 5-5 nous dit que $a_{\alpha\beta}$ est bien dans l'idéal $I_{|\alpha+\beta|}$ si $|\alpha| \geqslant 1$ et $|\beta| \geqslant 1$. Le point ii) nous dit que, en calculant comme si les champs L_j et $\overline{L}_j$ commutaient, on fait dans le calcul de $a_{\alpha\beta}$ une erreur qui est dans l'idéal $I_{|\alpha+\beta|-1}$ (toujours si $|\alpha| \geqslant 1$ et $|\beta| \geqslant 1$). On en déduit (5.10). On en déduit aussi que l'on a, modulo $I_{|\alpha+\beta|+1}$

$$(5.18) \qquad a_{\alpha+(j),\beta+(k)} = 2^{-|\alpha+\beta|+2}\left(\overline{L}^{\alpha} L^{\beta} \overline{L}_j L_k f - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \overline{L}^{\alpha} L^{\beta} \overline{L}_j L_k g\right)$$

d'où l'on déduit (5.11), en utilisant (5.14). La proposition 5-3 est donc démontrée.

On déduit facilement de (5.11) et du lemme 5-4 la remarque suivante :

<u>Remarque 5-5</u> :

Pour tout $q \geqslant 2$, l'idéal I_q est engendré par les fonctions $a_{\alpha\beta}$ telles que $|\alpha+\beta| \leqslant q$, $|\alpha| \geqslant 1$ et $|\beta| \geqslant 1$.

<u>3ème étape : étude des opérateurs L_j dans une carte locale adaptée</u> :

Il existe un voisinage U de z_o dans R^{2p} et un voisinage V de $(0,t_o)$ dans $R^{2p} \times R$ tels que, pour tout $z \in U$, l'application :

$$(5.19) \qquad (\zeta,v) \longrightarrow \theta_z(\zeta,v) = \exp A(\zeta).(z,v)$$

soit C^∞ dans V à valeurs dans M, et soit un difféomorphisme de V sur son image(qui est un voisinage de (z_o,t_o)). En effet, l'application θ_z est de la forme suivante :

$$(5.20) \qquad \theta_z(\zeta,v) = \left(z+\zeta\ ,\ \Psi(z,v,\zeta)\right)$$

où Ψ est une fonction C^∞ sur $\Omega \times B$ (avec les notations du début de ce §), telle que $\Psi(z,v,o) = v$.

Désignons par $\tilde{X}_{j,z}$, $\tilde{Y}_{j,z}$ et $\tilde{L}_{j,z}$ les champs de vecteurs sur V, images de X_j, Y_j et L_j par le difféomorphisme θ_z.

D'après (5.20), on peut écrire ces champs sous la forme suivante :

(5.21) $$\tilde{X}_{j;z} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} - V_j(z,v,\zeta)\frac{\partial}{\partial v}$$

(5.22) $$\tilde{Y}_{j,z} = \frac{\partial}{\partial \eta_j} + U_j(z,v,\zeta)\frac{\partial}{\partial v}$$

(5.23) $$\tilde{L}_{j,z} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} + i\, W_j(z,v,\zeta)\frac{\partial}{\partial v}$$

où les fonctions U_j et V_j sont C^∞ sur $U_z \times V_{(\zeta,v)}$, à valeurs réelles, et où $W_j = U_j + iV_j$.

On va maintenant calculer le développement limité de la fonction $\zeta \longrightarrow W_j\,(z,t,\zeta)$.

Pour tout $q \geqslant 1$, désignons par $W_j^q\,(z,t,\zeta)$ la partie homogène de degré q de ce développement taylorien, et par U_j^q (resp V_j^q) la partie réelle (resp. imaginaire) de W_j^q.

<u>Proposition 5-6</u> : On a $W_j(z,t,0)=0$, et, pour tout $q \geqslant 1$,

$$W_j(z,t,\zeta) - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=q-1 \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \frac{\zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta}{\alpha!\beta!}\,\frac{\zeta_k}{(q+1)2^q}\,\bar{L}^\alpha L^\beta\, a_{jk}(z,t)$$

est un polynôme homogène en ζ et en $\bar{\zeta}$, à coefficients dans l'idéal I_q.

<u>Démonstration</u> :

On vérifie facilement que

(5.25) $$U_j(z,t,\zeta) = \frac{d}{ds}\Big(\exp A(\zeta).\ \exp\,(sY_j).\exp\big(-A(\zeta)-sY_j\big).g\Big)(z,t)\Big|_{s=0}$$

et que :

(5.26) $$V_j(z,t,\zeta) = \frac{d}{ds}\Big(\exp A(\zeta).\ \exp\,(sX_j).\ \exp\big(-A(\zeta)-sX_j\big).g\Big)(z,t)\Big|_{s=0}$$

Rappelons que, si X et Y sont des champs de vecteurs sur une variété M, si $g \in C^\infty(M)$ et $a \in M$, le développement limité par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}$ de la fonction :

$$(5.27) \qquad t \longrightarrow h(t) = \frac{d}{ds}\Big(\exp(tX).\exp(sY).\exp(-tX-sY).g\Big)(a)\Big|_{s=0}$$

est donné par

$$(5.28) \qquad h(t) \sim \sum_{q\geq 0} \frac{qt^q}{(q+1)!}\Big((\mathrm{ad}\ X)^q Y\Big) g\ (a)$$

L'égalité (5.28) s'obtient en combinant les formules démontrées dans le livre de Goodman [6], page 40. Si on applique cette égalité en remplaçant X par $A(\zeta)$ et Y par X_j, on voit que $U_j(z,t,o)=0$ et, pour tout $q \geq 1$, on obtient :

$$(5.29) \qquad U_j^q(z,t,\zeta) = \frac{q}{(q+1)!}\left[\Big(\mathrm{ad}\ A(\zeta)\Big)^q . Y_j\right] g\ (z,t)$$

et, de même

$$(5.30) \qquad V_j^q(z,t,\zeta) = -\frac{q}{(q+1)!}\left[\Big(\mathrm{ad}\ A(\zeta)\Big)^q . X_j\right] g\ (z,t)$$

On peut réécrire ces égalités

$$(5.31) \qquad W_j^q(z,t,\zeta) = \frac{1}{i}\frac{q}{(q+1)!}\left[\Big(\mathrm{ad}\ A(\zeta)\Big)^q . L_j\right] g\ (z,t)$$

On sait que

$$(5.32) \qquad \mathrm{ad}\ A(\zeta).L_j = \frac{1}{2}\sum_k \zeta_k[\bar{L}_k\ ,\ L_j] = \frac{i}{2}\sum_k \zeta_k\ a_{jk}\frac{\partial}{\partial t}$$

On voit facilement, par récurrence sur $q \geq 1$, qu'on peut écrire :

$$(5.33) \qquad \Big(\mathrm{ad}\ A(\zeta)\Big)^{q-1} . \left(a_{jk}\frac{\partial}{\partial t}\right) = \phi\ \frac{\partial}{\partial t}$$

où ϕ est une fonction C^∞ sur M, telle que $\phi - A(\zeta)^{q-1}\ a_{jk}$ soit un polynôme en ζ et $\bar{\zeta}$, à coefficients dans l'idéal I_q. On a donc, modulo un tel polynôme :

$$(5.34) \qquad W_j^q(z,t,\zeta) \equiv \frac{1}{2}\frac{q}{(q+1)!}\sum_k \zeta_k\ \Big(A(\zeta)^{q-1}a_{jk}\Big)$$

Le lemme 5-4 nous dit que, en développant $A(\zeta)^{q-1}a_{jk}$ comme si les champs L_j et $\overline{L}_j$ commutaient, on fait une erreur qui est un polynôme en ζ et $\overline{\zeta}$, à coefficients dans l'idéal I_q. La proposition 5-6 s'en déduit facilement.

En combinant les propositions 5-4 et 5-6, on obtient le

Corollaire 5-7 :

Pour tout entier $q \geqslant 1$, on a, pour tout $h \in \mathcal{P}_r$

(5.35) $$W_j^q(z,t,\zeta) = \frac{4}{1+(\frac{\partial f}{\partial t})^2} \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=q-1 \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \partial_\zeta^{\alpha}\partial_{\overline{\zeta}}^{\beta}\partial_{\overline{\zeta}_j}\zeta_k\, \Phi_h(z,t,o)\frac{\zeta^{\alpha}\overline{\zeta}^{\beta}\,\zeta_k}{(q+1)\ \alpha!\beta!} + R_j^{(q)}(z,t,\zeta)$$

où $R_j^{(q)}(z,t,\zeta)$ est un polynôme en ζ et $\overline{\zeta}$, à coefficients dans l'idéal I_q.

4ème étape de la démonstration du théorème 5-1 :

On suppose que l'inégalité (1.15) est vérifiée, et que l'inégalité (5.6) ne l'est pas, et on va en déduire des conséquences contradictoires.

A) - Si l'inégalité (5.6) n'est pas vérifiée, il existe des suites (z_n,t_n) dans M, $d_n > 0$, $h_n \in \mathcal{P}_r$ et $\varepsilon_n > 0$ telles que

(5.36) $$(z_n,t_n) \longrightarrow (z_o,t_o) \qquad d_n \longrightarrow 0 \qquad \varepsilon_n \longrightarrow 0$$

(5.37) $$\sup_{|\zeta|\leqslant d_n} \Phi_{h_n}(z_n,t_n,\zeta) - \Phi_{h_n}(z_n,t_n,0) \leqslant \varepsilon_n\rho_n^{-1}$$

où l'on a posé :

(5.38) $$\rho_n^{-1} = \sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r} |\partial_\zeta^{\alpha}\partial_{\overline{\zeta}}^{\beta}\, \Phi_{h_n}(z_n,t_n,0)|\, d_n^{|\alpha+\beta|}$$

Puisque les suites $\rho_n d_n^{|\alpha+\beta|} \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_{h_n}(z_n,t_n 0)$ sont bornées, on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, qu'elles admettent des limites $\ell_{\alpha\beta}$

(5.39) $$\rho_n d_n^{|\alpha+\beta|} \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar\zeta}^\beta \Phi_{h_n}(z_n,t_n,0) \longrightarrow \ell_{\alpha\beta} \qquad (1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r)$$

On a évidemmant :

(5.40) $$\ell_{\beta\alpha} = \overline{\ell_{\alpha\beta}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r} |\ell_{\alpha\beta}| = 1$$

On définit donc un polynôme P, réel, non nul, en posant :

(5.41) $$P(\zeta) = \sum_{1\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant r} \ell_{\alpha\beta} \frac{\zeta^\alpha\ \bar\zeta^\beta}{\alpha!\ \beta!}$$

D'après (5.8), et d'après la remarque (5.5), il existe C > 0 tel que

(5.42) $$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leqslant r \\ |\alpha|\geqslant 1,\ |\beta|\geqslant 1}} |a_{\alpha\beta}(z_n,t_n)| \geqslant C$$

On peut donc déduire de (5.38) que la suite $\rho_n\ d_n^r$ est bornée :

(5.43) $$\rho_n\ d_n^r \leqslant C$$

Les relations (5.39), (5.43), et la formule de Taylor montrent que le polynôme P est la limite, uniforme sur tout compact de R^{2p}, de la suite de fonctions $\zeta \longrightarrow \rho_n\ \Phi_{h_n}(z_n,z_n,d_n\zeta)$. L'inégalité (5.37) entraîne alors que

(5.43) $$\sup_{|\zeta|\leqslant 1} P(\zeta) \leqslant 0 = P(o)\ \cdot$$

Autrement dit, P présente un maximum local à l'origine. Puisque P n'est pas constant d'après (5.40), il ne peut être la partie réelle d'une fonction holomorphe. On a donc

(5.44) $$\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leqslant r \\ |\alpha|\geqslant 1,\ |\beta|\geqslant 1}} |\ell_{\alpha\beta}| \neq 0$$

B) - On suppose l'inégalité (1.15) vérifiée. En utilisant les difféomorphismes θ_z de la 3ème étape, on voit qu'il existe un voisinage U de z_o, un voisinage V de $(0,t_o)$ dans $R^{2p} \times R$, et une constante $C_1 > 0$, tels que l'on ait :

(5.45) $$\sum_j \|\tilde{X}_{jz} u\|^2 + \|\tilde{Y}_{jz} u\|^2 \leq C_1 \left(\sum_j \|\tilde{L}_{j,z} u\|^2 + \|u\|^2\right)$$

pour tout $z \in U$ et $u \in C_o^\infty(V)$.

Soit $\Psi \in C_o^\infty(R^{2p+1})$. Si n est assez grand, on peut appliquer (5.45) en remplaçant z par z_n et u par la fonction u_n définie par

(5.46) $$u_n(\zeta,\vartheta) = \Psi\left(\frac{\zeta}{d_n}, \rho_n(\vartheta - t_n)\right) d_n^{-p} \rho_n^{1/2}$$

Si n est assez grand, le support de u_n est inclus dans V. On a évidemment

(5.47) $$d_n^2 \|\tilde{X}_{j,z_n} u_n\|^2 = \int \left|\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} - V_{j,n}(\zeta,\vartheta) \frac{\partial \Psi}{\partial v}\right|^2 d\xi d\eta d\vartheta$$

où l'on a posé :

(5.48) $$V_{j,n}(\zeta,n) = \rho_n d_n \dot{V}_j(z_n, t_n + \frac{\vartheta}{\rho_n}, d_n \zeta)$$

On a un calcul analogue pour les normes de $\tilde{Y}_{j,z_n}$ et $\tilde{L}_{j,z_n}$ en définissant des fonctions $U_{j,n}$ et $W_{j,n} = U_{j,n} + iV_{j,n}$. On va démontrer le :

Lemme 5-8 :

Avec les notations ci-dessus, la suite de fonctions $W_{j,n}$ tend, uniformément sur tout compact de R^{2p+1}, vers la fonction suivante, indépendante de ϑ :

(5.49) $$(\zeta,\vartheta) \longrightarrow W_j^\infty(\zeta) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq r-2 \\ 1 \leq k \leq p}} \frac{4\, \ell_{\alpha+(k),\beta+(j)}}{1+(\frac{\partial f}{\partial t}(z_o;t_o))^2} \frac{\zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \zeta_k}{\alpha!\beta!(|\alpha+\beta|+2)}$$

On désignera par U_j^∞ (resp. V_j^∞) la partie réelle (resp. imaginaire) de W_j^∞.

Démonstration du lemme :

Il résulte des trois remarques suivantes :

a) On voit immédiatement, d'après (5.48), que $W_{j,n}(\zeta,\vartheta)-W_{j,n}(\zeta,0)$ tend vers 0, uniformément sur tout compact.

b) On voit que la différence entre $W_{j,n}(\zeta,0)$ et son développement taylorien d'ordre r-1, est majorée, uniformément sur tout compact, par une quantité de la forme $C\, d_n^{r+1}\rho_n$. D'après (5.43), cette différence tend vers 0.

c) Si ϕ est une fonction dans l'idéal I_q, la remarque (5.5), et la relation (5.39) montrent que la suite $\rho_n d_n^q\ \phi(z_n,t_n)$ est bornée. Par conséquent, (5.39) et le corollaire 5-7 montrent que la partie homogène de degré q du développement taylorien de $W_{j,n}(\zeta,0)$ tend, uniformément sur tout compact, vers la partie homogène de degré q du polynôme $W_j^{\infty}(\zeta)$.

Fin de la démonstration du théorème :

On déduit facilement de (5.45), (5.47) et du lemme 5-8, en faisant tendre n vers $+\infty$, que l'on a :

$$(5.50)\qquad \sum_j \|\tilde{\pi}(X_j)\Psi\|^2 + \|\tilde{\pi}(Y_j)\Psi\|^2 \leq C_1 \sum_j \|\tilde{\pi}(L_j)\Psi\|^2 \qquad \forall\Psi\in C_o^{\infty}(R^{2p+1})$$

où l'on a posé :

$$(5.51)\qquad \tilde{\pi}(X_j) = \frac{\partial}{\partial\xi_j} - V_j^{\infty}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\vartheta} \qquad \tilde{\pi}(Y_j) = \frac{\partial}{\partial\eta_j} + U_j^{\infty}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

La constante C_1 est la même que dans l'inégalité (5.45). On a maintenant besoin du lemme suivant, qui établit un lien entre les polynômes W_j^{∞} et P.

Lemme 5-9 :

Il existe un polynôme réel $Q \in E_r$ tel que :

(5.52) $$W_j^\infty = 2\,\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\bar{\zeta}_j} + i\,\frac{\partial Q}{\partial\bar{\zeta}_j} \qquad \text{où} \qquad \tilde{P}(\zeta) = \frac{1}{\left(1+(\frac{\partial f}{\partial t})(z_o,t_o)\right)^2}\,P(\zeta)$$

Démonstration du Lemme :

Pour vérifier (5.52), il suffit de montrer que :

(5.53) $$\frac{\partial W_j^\infty}{\partial\bar{\zeta}_k} = \frac{\partial W_k^\infty}{\partial\bar{\zeta}_j}$$

(5.54) $$\frac{\partial W_j^\infty}{\partial\zeta_k} + \overline{\frac{\partial W_k^\infty}{\partial\zeta_j}} = 4\,\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial\bar{\zeta}_j\partial\zeta_k}$$

L'application qui, à tout polynôme $P \in E_r$, de la forme (5.41), associe le système de polynômes W_j^∞ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ définis par (5.49) est linéaire. il suffit donc de vérifier les égalités (5.53) et (5.54) dans le cas où $\tilde{P}$ est l'un des polynômes $\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\beta + \bar{\zeta}^\alpha\zeta^\beta$ ou bien $i(\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\beta - \bar{\zeta}^\alpha\zeta^\beta)$ puisque ces polynômes forment une base de E_r. Par exemple, si le polynôme $\tilde{P}$ est égal à $\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\beta + \bar{\zeta}^\alpha\zeta^\beta$, on vérifie que

(5.55) $$W_j^\infty(\zeta) = \frac{4}{|\alpha|+|\beta|}\left[|\alpha|\,\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j}(\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\beta) + |\beta|\,\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j}(\bar{\zeta}^\alpha\zeta^\beta)\right]$$

et la vérification de (5.53 et (5.54) est ensuite triviale. Le lemme 5-9 est donc démontré.

D'après ce lemme, les opérateurs $\tilde{\pi}(X_j)$ et $\tilde{\pi}(Y_j)$ définis en (5.51) se déduisent des opérateurs $\hat{\pi}_{\tilde{P}}(X_j)$ et $\hat{\pi}_{\tilde{P}}(Y_j)$ associés au polynôme $\tilde{P}$ selon (2.31) par le difféomorphisme suivant

(5.56) $$(\zeta, v) \longrightarrow (\tilde{\zeta}, \tilde{v}) = \left(\zeta, v + Q(\zeta)\right)$$

On peut donc déduire de l'inégalité (5.50) la suivante

$$(5.57) \qquad \sum_j \|\hat{\pi}_{\tilde{p}}(X_j)\Psi\|^2 + \|\hat{\pi}_{\tilde{p}}(Y_j)\Psi\|^2 \leq C_1 \sum_j \|\hat{\pi}_{\tilde{p}}(L_j)\Psi\|^2$$

pour tout $\Psi \in C_o^\infty((R^{2p+1})$. d'après (5.44) les champs de vecteurs $\hat{\pi}_{\tilde{p}}(X_j)$ et $\hat{\pi}_{\tilde{p}}(Y_j)$ vérifient la conditon de Hörmander. L'inégalité (5.57) implique donc, comme on l'a vu qu § I, l'hypoellipticité du système $\hat{\pi}_{\tilde{p}}(L_j)$.

La proposition 2-2 montre que le polynôme $\tilde{P}$ ne peut avoir de maximum local à l'origine, ce qui est en contradiction avec (5.43). Le théorème 5-1 est donc démontré.

§VI - CAS D'UN SYSTEME DE CHAMPS DE VECTEURS COMPLEXES -

On considère maintenant, dans un ouvert Ω de R^n, un système $L_1,\ldots L_p$ de champs de vecteurs complexes, de la forme

(6.1) $\quad L_j = X_j + iY_j \qquad j = 1,\ldots.p$

où les X_j et Y_j sont des champs de vecteurs réels dans Ω, vérifiant la condition de Hörmander $(C.H.)_r$ ($r \geq 2$). On dira que le système $L = (L_1,\ldots L_p)$ est hypoelliptique maximal en un point x_o de Ω, s'il existe un voisinage V de x_o et une constante $C > 0$ tels que l'inégalité (1.15) soit vérifiée pour tout $u \in C_o^\infty(V)$. Comme on l'a vu au §I, cette inégalité implique bien l'hypoellipticité du système L, avec perte de $1 - \frac{1}{r}$ dérivées.

Les conditions nécessaires d'hypoellipticité maximale que nous allons maintenant énoncer sont plus abstraites que celles des § précédents. Dans les §II et iii, on a défini des systèmes d'opérateurs à coefficients polynomiaux $\left(\text{les } \pi_p(L_j),\ P \in L_{z_o}\right)$ qui devaient être injectifs dans certains espaces de fonctions. Les propositions 2-2 et 3-8 nous ont permis d'expliciter cette condition d'injectivité, donc d'aboutir à l'inégalité (2.16). Dans le cas général, il ne sera pas possible d'obtenir une telle condition explicite, et nous nous contenterons de définir des systèmes d'opérateurs, remplaçant les $\pi_p(L_j)$, et qui devront être injectifs.

Ces opérateurs seront définis à partir des représentations unitaires irréductibles d'une certaine algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, Au lieu d'être indexées par un polynôme P décrivant L_{z_o}, ces représentations seront indexées, suivant Kirillov [14], par une forme linéaire $\ell \in \mathfrak{g}^*$, décrivant un certain sous-ensemble $\Gamma_{x_o} \subset \mathfrak{g}^*$.

<u>Définition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.</u>

On désigne par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie nilpotente libre à 2p générateurs, notés $\tilde{X}_j$ et $\tilde{Y}_j$ (j = 1,....p), de rang de nilpotence r. C'est, de toutes les algèbres de Lie à 2p générateurs, nilpotentes de rang r, celle dont la dimension est la plus grande.

On désigne par $\mathfrak{g}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les crochets de longueur k des éléments $\tilde{X}_k$ et $\tilde{Y}_k$. On a

(6.2) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots\ldots\ldots\ldots \oplus \mathfrak{g}_r$$

On désignera par G le groupe (connexe et simplement connexe) dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$.

<u>Définition d'un sous-ensemble Γ_{x_o} de $\mathfrak{g}^*$.</u>

Il existe une application linéaire unique λ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs X_j et Y_j, telle que

(6.3) $$\lambda(\tilde{X}_j) = X_j \qquad \lambda(\tilde{Y}_j) = Y_j \qquad j = 1,\ldots.p$$

(6.4) $$\lambda([X,Y]) = [\lambda(X), \lambda(Y)] \quad \text{si} \quad X \in \mathfrak{g}_j, \quad Y \in \mathfrak{g}_k, \quad j+k \leqslant r.$$

Si $x_o \in \Omega$, on désigne par Γ_{x_o} l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles qu'il existe une suite $(x_j)_{j \in N}$ dans Ω, une suite ξ_j dans $R^n - \{o\}$ et une suite t_j dans R^+, telles que :

(6.5) $$x_j \longrightarrow x_o \qquad |\xi_j| \longrightarrow +\infty \qquad t_j \longrightarrow 0$$

et telles que, pour tout $X \in \mathfrak{g}_k$ $(1 \leq k \leq r)$, on ait :

(6.6) $\qquad t_j^k\, \lambda(X)(x_j, \xi) \longrightarrow \ell(X)$

où $\lambda(X)(x, \xi)$ désigne le symbole de l'opérateur différentiel $\lambda(X)$.

Pour tout $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on désigne par π_ℓ la représentation unitaire irréductible du groupe G, associée selon Kirillov [14] à la forme linéaire ℓ. On notera aussi π_ℓ la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, différentielle de la représentation précédente. Rappelons que les $\pi_\ell(\tilde{X}_j)$ et $\pi_\ell(\tilde{Y}_j)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1, à coefficients polynômiaux, dans $R^{k(\ell)}$, où $2k(\ell)$ est le rang de la forme bilinéaire antisymétrique:

(6.7) $\qquad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X,Y) \longrightarrow \langle \ell, [X,Y] \rangle$

Bien entendu, on pose $\pi_\ell(\tilde{L}_j) = \pi_\ell(\tilde{X}_j) + i\, \pi_\ell(\tilde{Y}_j)$. On peut maintenant énoncer le résultat suivant, dont la démonstration figurera dans [B].

Théorème 6-1 :

Avec les notations ci-dessus, si le système L est hypoelliptique maximal en un point x_o de Ω, alors, pour tout $\ell \in \Gamma_{x_o} - \{o\}$, le système d'opérateurs $\{\pi_\ell(\tilde{L}_j),\ j = 1, \ldots, p\}$ est injectif dans $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$.

Dans le cas particulier du système de Cauchy-Riemann sur las variétés (1.1), (1.2) et (1.3), cette condition abstraite coïncide avec celles des § précédents.

On montre dans [B] un théorème analoque au théorème 6-1, pour des opérateurs d'ordre m s'exprimant de manière polynomiale par rapport à des champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander.

Réciproque et problèmes ouverts :

La réciproque du théorème 6-1, et de son analogue pour les opérateurs d'ordre m, est démontrée dans les cas particuliers suivants (outre les cas traités dans les § précédents) :

1) Si l'entier r de la condition de Hörmander est égal à 2, cette réciproque se démontre à l'aide des techniques de [10] et s'étend même à des opérateurs pseudo-différentiels.

2) Désignons par $\nu_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant r,\ x \in \Omega)$, le rang des restrictions au point x des commutateurs de longueur $\leqslant j$ des champs X_k et Y_k. Si les fonctions $x \longrightarrow \nu_j(x)$ sont constantes au voisinage de x_o, la réciproque du théorème 6-1 a été démontrée par L. P. Rothschild [19], en se ramenant au cas particulier où les X_j et Y_j sont invariants à gauche, si l'on munit R^n d'une loi de groupe convenable. (Ce cas particulier avait été traité auparavant par les auteurs [8]).

3) La réciproque du théorème 6-1 est encore vraie si les champs X_j et Y_j ont une certaine quasi-homogénéité, et si leurs commutateurs de longueur $\geqslant 2$ commutent entre eux, [A].

- B I B L I O G R A P H I E -

[1] - BAOUENDI - TREVES : A microlocal version of Bochner's tube theorem.Indiana J.Math. (1981).

[2] - BLOOM - GRAHAM : A geometric characterization of points of type m on real hypersurfaces.
J. Diff. Geometry 12 (2) (1977) 171-182.

[3] - DERRIDJ : Sur la régularité des solutions du problème de Neumann pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudo-convexes.
J. Diff. Geometry 13 (4) (1978) 559-588.

[4] - EGOROV : Subelliptic operators -
Russian Math. Survey 30 (2) (1975), p. 59-118
et 30 (3) (1975), p. 55-105.

[5] - FOLLAND - KOHN : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex.
Ann. of Math. Studies, n° 75 - Princeton, 1972.

[6] - GOODMAN : Nilpotent Lie groups -
Lectures Notes, n° 562.

[7] -GRUSHIN : On a class of hypoelliptic operators -
Math. Sbornik 83 (125) (1970) 456-473.

[8] - HELFFER - NOURRIGAT : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué.
Comm. in P.D.E. 3 (8) (1978), 643-743
et 4 (8) (1979), 899-958.

[9] - HORMANDER : L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator.
Acta Math. 113 (1965), 89-152.

[10] - HORMANDER : Pseudo differential operators and non elliptic boundary value problems - Ann. of Math. 83 (1966), 129-269.

[11] - HORMANDER : Hypoelliptic second order differential equations - Acta Math. 119 (1967), 147-171.

[12] - HORMANDER : Hypoelliptic operators with double characteristics - Math. Ann. 217 n° 2 (1975).

[13] - HORMANDER : Subelliptic operators.in Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations - Ann. of math. Studies (91).

[14] - KIRILLOV : Unitary representations of nilpotent Lie groups - Russian Math. Survey 17 (1962), 53-104.

[15] - KOHN : Subellipticity of the $\overline{\partial}$ Neumann problem on pseudo-convex domains : sufficient conditions - Acta Math. 142 (1979), 79-122.

[16] - MAIRE : Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations - Comm. in P.D.E., 5 (4) (1980), 331-380.

[17] - MOUKADEM : Interpolation pour des espaces de Sobolev avec poids associés à des représentations de groupes de Lie - Thèse - Rennes, 1981.

[18] - ROCKLAND : Hypoellipticity of the Heisenberg group - Representation theoretic criteria - Trans. A.M.S. 240 (1978).

[19] - ROTHSCHILD : A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields - Comm. in P.D.E. 4 (6) (1979), 546-699.

[20] - ROTHSCHILD - STEIN : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups - Acta Math. 137 (1976), 247-320.