A PROPOS DES FONCTIONS HARMONIQUES SUR LES GROUPES MOYENNABLES

Yves DERRIENNIC

1) INTRODUCTION

Il est bien connu que si un groupe localement compact G porte une mesure de probabilité μ pour laquelle toutes les fonctions μ-harmoniques bornées continues sont constantes alors G est moyennable. Harmonique signifie comme d'habitude solution de l'équation

$$f(x) = f * \mu(x) = \int_G f(xy)\ \mu(dy)$$

Dans un travail récent J. Rosenblatt a démontré que cette propriété caractérise les groupes moyennables, c'est-à-dire que, G moyennable étant donné, il existe toujours sur G une mesure de probabilité μ pour laquelle les μ-harmoniques continues bornées sont constantes [6]. Ceci répond à une question de H. Fürstenberg. Antérieurement A.M. Versik et V.A. Kaimanovic avaient aussi affirmé cette propriété mais avec seulement l'indication laconique : "La démonstration consiste en une construction directe d'une telle mesure à l'aide d'une condition de Reiter" [7]. On se propose ici de donner une version peut-être simplifiée de la construction de J. Rosenblatt puis de discuter certains des exemples introduits par A.M. Versik et V.A. Kaimanovic qui montrent en particulier que la mesure convenable ne peut pas en général avoir un support compact. On montrera qu'elle ne peut pas non plus avoir en général un moment d'ordre 2 fini.

2) LA CONSTRUCTION DE J. ROSENBLATT

Rappelons tout d'abord la condition de Folner : "Un groupe localement compact dénombrable à l'infini G est moyennable si et seulement si pour tout compact K, et tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact S tel que pour tout $g \in K$, $m(g S \Delta S) < \varepsilon\, m(S)$ " (par m on note une mesure de Haar à gauche sur G et par Δ l'opération "différence symétrique").

Cette condition implique immédiatement la condition un peu renforcée suivante :

"Si G est moyennable alors pour toute famille finie $\{\rho\}$ de mesures positives bornées à support compact, pour tout compact K, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une mesure de probabilité absolument continue λ à support compact telle que, pour tout $\rho \in \{\rho\}$ et tout $g \in K$, $||\delta_g * \lambda - \lambda|| < \varepsilon$ et $||\rho * \lambda - ||\rho||\, \lambda\, || \leqslant \varepsilon\, ||\rho||$"

(δ désigne les mesures de Dirac et $||\ \ ||$ désigne la norme de la variation totale).

Si la famille $\{\rho\}$ est vide, cette seconde condition est identique à la première : on prend alors pour λ la restriction normalisée de m à S, i.e. $\lambda = \dfrac{1}{m(S)}\, m/S$.

Sinon il suffit de remplacer K par un compact K' qui contient K et aussi tous les supports des ρ.

La condition de Folner, sous sa seconde forme, est le seul outil que nous utiliserons pour effectuer la construction de Rosenblatt.

La mesure de probabilité μ cherchée, c'est-à-dire pour laquelle les harmoniques bornées continues sont constantes, apparaît sous la forme $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ où (μ_k) est une suite de mesures absolument continues strictement positives à support compact vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} ||\mu_k|| = 1$.

La suite (μ_k) est construite par récurrence. Pour cela, on suppose donnée une suite croissante de compacts (F_k) telle que $G = \bigcup_k F_k$ et une suite de réels $\theta_k > 0$ telle que $\sum_1^{\infty} \theta_k < \infty$. La mesure μ_1 peut être choisie arbitrairement ; les mesures $\mu_1 \ldots\ldots\ldots \mu_{k-1}$ étant déjà construites, on construit μ_k absolument continue et à support compact, telle que, pour tout $g \in F_k$ et toute mesure ν produit de convolution de au plus (k-1) termes pris parmi $\mu_1 \ldots\ldots \mu_{k-1}$, on ait :

$$||(\delta_g - \delta_e) * \mu_k|| < \theta_k\, ||\mu_k||$$

$$||\nu * \mu_k - ||\nu||\, \mu_k|| < \theta_k ||\nu||\ ||\mu_k||$$

Cela est possible d'après la condition de Folner renforcée. Cette construction laisse de la liberté dans le choix de la suite (F_k), de la suite (θ_k) et aussi de la suite $(||\mu_k||)$. On va montrer que si la suite $(||\mu_k||)$ vérifie $\sum_{i=1}^{k} ||\mu_k|| = 1$ et $\lim_{r\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^{k} ||\mu_i||\right)^r \right) = 0$ ce qui est évidemment possible, les F_k et θ_k restant par ailleurs arbitraires, alors la mesure $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ est une probabilité absolument continue pour laquelle $\lim_{r\to\infty} ||(\delta_g - \delta_e) * \mu^r|| = 0$ quel que soit $g \in G$. Comme on le sait, cela entraîne que les μ-harmoniques bornées continues sont constantes.

On note $M(r,k)$ l'ensemble des produits π de r termes pris parmi $\mu_1, \ldots\ldots \mu_k$, comportant au moins une fois μ_k ; on notera dans la suite $\sum_{(r,k)}$ toute somme portant sur $\pi \in M(r,k)$. Alors

$$\mu^r = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(r,k)} \pi,$$

et $\sum_{(r,k)} ||\pi|| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} ||\mu_i||\right)^r$. Pour chaque $\pi \in M(r,k)$ avec $k \geqslant r$, on considère π' obtenu en effaçant dans π tous les facteurs qui précèdent le premier μ_k et en renormalisant de façon que $||\pi|| = ||\pi'||$. Alors, si $\pi = \nu * \mu_k * \rho$, on a $\pi' = ||\nu|| \mu_k * \rho$ et $||\pi - \pi'|| = (||\nu * \mu_k - ||\nu|| \mu_k||) ||\rho|| \leqslant \theta_k ||\pi||$ d'après la construction de μ_k. Si $g \in F_r$ on a aussi pour tout $\pi \in M(r,k)$:

$$||(\delta_g - \delta_e) * \pi'|| \leqslant \theta_k ||\pi||$$

Ceci donne :

$$\left|\left| \sum_{k=r}^{\infty} (\delta_g - \delta_e) * \sum_{(r,k)} \pi \right|\right| \leqslant \sum_{k=r}^{\infty} \left[\sum_{(r,k)} ||(\delta_g - \delta_e) * \pi'|| + 2 \sum_{(r,k)} \theta_k ||\pi|| \right]$$

$$\leqslant 3 \sum_{k=r}^{\infty} \theta_k \left(\sum_{i=1}^{k} ||\mu_i||\right)^r$$

d'où $$||(\delta_g - \delta_e) * \mu^r|| \leqslant 2 \sum_{k=1}^{r-1} \left(\sum_{i=1}^{k} ||\mu_i||\right)^r + 3 \sum_{k=r}^{\infty} \theta_k .$$

En choisissant les $||\mu_i||$ comme annoncé ci-dessus, on arrive bien à la conclusion $\lim_{r\to\infty} ||(\delta_g - \delta_e) * \mu^r|| = 0$ et ceci pour tout $g \in G$.

La méthode montre suffisamment que cette mesure μ n'est pas unique. On peut, comme le souligne J. Rosenblatt, la construire symétrique. En effet, on peut imposer au compact S donné par la condition de Folner d'être symétrique ([4]) ;

de même dans la condition renforcée on peut demander que λ soit symétrique, donc dans la construction par récurrence chaque μ_k peut être choisie symétrique et alors μ est symétrique.

3) LES EXEMPLES DE VERSIK ET KAIMANOVIC

Pour chaque entier k on définit le groupe G_k qui est le produit semi-direct de $\mathbb{Z}^k$ et de $\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}^k)$ le groupe des applications à support fini de $\mathbb{Z}^k$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'action de $\mathbb{Z}^k$ sur $\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}^k)$ étant simplement définie par les translations. Etant donnés $i,j \in \mathbb{Z}^k$ et A,B parties finies de $\mathbb{Z}^k$, la loi de groupe s'écrit :

$$(i, \chi_A)\ (j, \chi_B) = (i + j, \chi_A + \chi_{B+i} \bmod 2)$$

où χ désigne les fonctions indicatrices. Ces groupes possèdent les propriétés suivantes :

1- G_k est un groupe résoluble de classe 2. En effet, comme $(i, \chi_A)^{-1} = (- i, \chi_{A-i})$ le commutateur :

$$[(i, \chi_A), (j, \chi_B)] = (0, \chi_A + \chi_{A+j} + \chi_{B+i} + \chi_B \bmod 2)$$

et les commutateurs d'ordre 2 sont nuls.

2- G_k est à croissance exponentielle.

Notons $e_1, \dots, e_k$ la base naturelle du groupe $\mathbb{Z}^k$. Les éléments $(e_1, 0)\dots(e_k, 0)$ et $(0, \chi_{\{0\}})$ forment un sytème de générateurs de G_k. Comme $(0, \chi_{\{0\}})\ (0, \chi_{\{0\}}) = (0,0)$, après simplification tout produit de n termes pris parmi ce système de générateurs s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= (X_1, 0)\ (0, \chi_{\{0\}})\ (X_2, 0)\ (0, \chi_{\{0\}})\dots(0, \chi_{\{0\}})\ (X_\ell, 0) \\ &= (X_1 + X_2 + \dots + X_\ell,\ \chi_{\{X_1,\ X_1+X_2,\ X_1+X_2+X_3, \dots,\ X_1+\dots+X_{\ell-1}\}}) \end{aligned}$$

où les X_i sont des éléments de $\mathbb{Z}^k$ à coordonnées positives, non nuls sauf peut être X_1 et X_ℓ, et vérifiant $|X_1| + |X_2| + \dots + |X_\ell| + \ell \leqslant n$ (on note $|X|$ la somme des coordonnées de $X \in \mathbb{Z}^k$). Toute partie A de l'intervalle $[0, \frac{n}{2}]$ du premier axe de coordonnées dans $\mathbb{Z}^k$ peut donc apparaître comme seconde composante d'un tel élément W.

Ceci prouve que le nombre d'éléments de G_k qui sont des produits de n facteurs pris parmi les (k+1) générateurs, est supérieur à $2^{\frac{n}{2}}$.

3- G_k n'est pas nilpotent.

On peut le vérifier directement ou le déduire de la propriété précédente, car on sait que les groupes nilpotents sont à croissance polynomiale.

Passons maintenant à l'étude des marches aléatoires sur G_k.

__Lemme__ : Soit μ_1 la loi de la marche aléatoire symétrique "élémentaire" sur G_1 (i.e. (1,0) et (-1,0) portent chacun la masse $\frac{1}{4}$ et $(0, X_{\{0\}})$ la masse $\frac{1}{2}$).

On peut construire une suite de parties A_n de G telle que $\lim\limits_n \mu_1^n (A_n) = 1$ et $\text{Log } |A_n| = 0 (n^{3/4})$.

Démonstration : Posons

$A_n = \{(j, X_B) \; ; \; |j| < n, \quad B \subset [- n^{3/4} + n^{3/4}]\}$

D'après le raisonnement fait précédemment, μ_1^n ne charge que des éléments de la forme :

$(x_1 + \dots\dots\dots + x_\ell , X_B)$ où B est obtenue en supprimant dans $\{x_1, x_1 + x_2, \dots\dots\dots, x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_\ell\}$ les termes qui apparaissent un nombre pair de fois, et où $x_1, \dots\dots\dots, x_\ell \in \mathbb{Z}$ avec $|x_1| + \dots\dots\dots + |x_\ell| + \ell < n$.

Soit (S_n) la première composante de la marche aléatoire (W_n) de loi μ_1 sur G_1. C'est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de loi $\frac{1}{4} \delta_{-1} + \frac{1}{2} \delta_o + \frac{1}{4} \delta_1$. Il est clair que :

$$(W_n \notin A_n) \subset (\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| > n^{3/4})$$

Comme $P\left[\max\limits_{1 \leq i \leq n} |S_i| > n^{3/4}\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ on obtient $\mu_1^n (A_n^c) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. D'autre part $\text{Log } |A_n| \leq \text{Log } n + (2 n^{3/4} + 1) \text{ Log } 2$.

__Corollaire__ : L'entropie de μ_1 sur G_1 est nulle. Les seules fonctions μ_1-harmoniques bornées sont les constantes.

Démonstration : L'entropie est définie par

$$h(\mu_1) = \lim_n \frac{-1}{n} \sum_{w \in G_1} \mu_1^n (w) \text{ Log } \mu_1^n (w)$$

(la somme étant étendue aux w pour lesquels $\mu_1^n (w) > 0$).

Posons $H(\nu) = - \sum_{i \in I} \nu(i) \log \nu(i)$, l'entropie d'une probabilité ν sur un ensemble fini I. Si $J \subset I$, on peut écrire :

$$- \sum_{i \in J} \nu(i) \log \nu(i) = - \left[\sum_{i \in J} \frac{\nu(i)}{\nu(J)} \log \frac{\nu(i)}{\nu(J)} - \log \nu(J) \right] \nu(J)$$

$$\leqslant - \nu(J) \log \nu(J) + \nu(J) \log |J|$$

car l'entropie est maximum pour une probabilité équirépartie. En appliquant cette inégalité à μ_1^n avec $I = V^n$ où V est le support de μ_1 et $J = A_n$ puis $J = A_n^c$, on trouve
$H(\mu_1^n) \leqslant - \mu_1^n (A_n) \left[\log \mu_1^n (A_n) - \log |A_n| \right] - \mu_1^n (A_n^c) \left[\log \mu_1^n (A_n^c) - \log |V^n \setminus A_n| \right]$,

d'où $H(\mu_1^n) \leqslant \frac{2}{e} + \log |A_n| + \mu_1^n (A_n^c) \log |V^n|$.

Comme $\lim \frac{1}{n} \log |A_n| = 0$ et que $\frac{1}{n} \log |V^n|$ est borné, on a bien $\lim \frac{1}{n} H(\mu_1^n) = 0$, car $\lim \mu_1^n (A_n^c) = 0$.

On a ainsi construit un exemple d'une probabilité adaptée sur un groupe à croissance exponentielle, dont l'entropie est nulle. D'après un théorème d'Avez, pour une telle mesure les seules harmoniques bornées sont les constantes [2]. Cet exemple répond à un problème posé par Avez [1].

Versik et Kaimanovic donnent, sans aucune indication, le résultat plus général suivant : pour toute probabilité μ symétrique à support fini sur G_1 et tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $A_n \subset G_1$ telle que $\mu^n (A_n) > 1 - \varepsilon$ et $\log |A_n| = O(\sqrt{n})$. D'après le calcul précédent l'entropie d'une telle probabilité est nulle. Ces deux auteurs indiquent aussi qu'une étude plus précise conduit au même résultat pour le groupe G_2.

Dès que la dimension k est supérieure ou égale à 3, la situation change complètement.

Lemme : Soit μ une probabilité adaptée à support fini sur G_k, avec $k \geqslant 3$. Soit $W_n = (i_n, X_{A_n})$ la marche aléatoire de loi μ sur G_k. Pour tout $w \in G_k$, la suite X_{A_n} converge P_w p,s.

Démonstration : La première composante i_n de W_n forme une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^k$ dont la loi est la projection de μ sur $\mathbb{Z}^k$. Celle-ci est adaptée, donc c'est une marche aléatoire transitoire. Pour $w \in G_k$, P_w p.s., $W_{n+1} = W_n\ (i, \chi_A) = (i_n + i, \chi_{A_n} + \chi_{A+i_n} \bmod 2)$ où (i, χ_A) est un élément du support de μ. Comme μ est à support fini, on peut considérer une boule $B(0, d)$ centrée à l'origine dans $\mathbb{Z}^k$, de rayon $d > 0$, qui contienne toutes les parties A de $\mathbb{Z}^k$ qui sont seconde composante des éléments du support de μ. Pour chaque entier $r > 0$, à partir d'un certain rang i_n est hors de la boule $B(0, r+d)$, car la marche i_n est transitoire. A partir de ce rang $A_n \cap B(0, r)$ est une suite de parties finies constante. Donc $\chi_{A_n \cap B(0, r)}$ est une suite convergente ; r étant arbitraire, χ_{A_n} est une suite convergente (tout ceci, évidemment, P_w p.s.).

Théorème : A toute probabilité μ adaptée et à support fini sur le groupe G_k, $k \geqslant 3$, il correspond des fonctions harmoniques bornées non constantes.

Démonstration : Quel que soit $j \in \mathbb{Z}^k$, la variable aléatoire $Y_j\ (\omega) = \lim_n \chi_{A_{n(\omega)}}\ (j)$ est bien définie P_w p.s., pour chaque $w \in G_k$, et est une variable aléatoire réelle invariante (les notations sont celles du lemme). En général cette variable n'est pas constante P_w p.s. pour tout w. Il lui correspond donc, par la formule $h(w) = \int Y_j\ (\omega)\ P_w\ (d\omega)$ une harmonique bornée non constante.

Pour vérifier en détail que Y_j n'est pas constante on peut raisonner de la façon suivante. Supposons que le support de μ contienne un élément (i, χ_A) tel que $i \neq 0$ et $A \neq \emptyset$. Il existe dans A, j tel que $j \notin A + n\, i$, quel que soit $n \geqslant 1$. Pour la marche issue de $w = (i, \chi_A)$, il y a une probabilité positive de suivre la trajectoire $(i, \chi_A)^n$ de $n = 0$, jusqu'à $n = \ell$, le plus petit entier tel que $\ell i \notin B(0, 2d)$. A partir de ce point il y a une probabilité positive que la marche i_n sur $\mathbb{Z}^k$ ne revienne jamais dans la boule $B(0, 2d)$, donc il y a une probabilité positive pour P_w que $j \in A_n$ pour tout n et $P_w\ (Y_j = 1) > 0$. Pour la marche issue de $w' = (0, \chi_A)$ la même construction prouve qu'il y a une probabilité positive que $j \notin A_n$ pour tout n, donc $P_{w'}\ (Y_j = 0) > 0$. Si le support de μ ne contient aucun élément du type supposé, le support de μ^2 en contient nécessairement. On peut alors recommencer la même construction.

Versik et Kaimanovic obtiennent ce résultat en supposant que μ est "non dégénérée", c'est-à-dire que G est le semi-groupe engendré par le support de μ. Comme on vient de le voir, cette hypothèse n'est pas utile.

Corollaire : Si $k \geqslant 3$, toute probabilité adaptée à support fini sur G_k est d'entropie strictement positive.

Démonstration : Cela résulte de la réciproque du théorème d'Avez rappelé ci-dessus [3] (cette réciproque est aussi démontrée par Versik et Kaimanovic sous l'hypothèse supplémentaire que μ est non dégénérée).

Corollaire : En général, sur un groupe localement compact dénombrable à l'infini, moyennable il n'existe pas de probabilité à support compact pour laquelle les harmoniques continues bornées soient constantes.

La mesure construite par la méthode de Rosenblatt (§2) n'est manifestement pas à support compact. Il est donc impossible de corriger cette construction de façon à trouver une mesure à support compact.

On se propose maintenant de généraliser un peu le raisonnement précédent de façon à montrer qu'il est impossible d'obtenir en général une mesure ayant un moment d'ordre 2 fini. Rappelons d'abord la notion de moment introduite dans [5]. Etant donné un groupe G à génération compacte et un voisinage compact K de l'élément neutre engendrant G, on dit que la mesure μ définie sur G a un moment fini d'ordre α si la série de terme général $n^{\alpha}\, \mu(K^{n+1} \setminus K^n)$ converge. On vérifie aisément que cette condition ne dépend pas du compact K choisi.

Définissons l'application $G_k \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(i, \chi_A) \longrightarrow \varphi(A)$$

où $\varphi(A)$ est le rayon de la plus petite boule centrée en 0 dans $\mathbb{Z}^k$ et contenant A. Notons λ la mesure sur $\mathbb{R}^+$ image de la probabilité μ donnée, adaptée sur G_k, par φ.

<u>Lemme</u> : Si μ a un moment fini d'ordre α sur G_k, alors λ a un moment fini de même ordre sur $\mathbb{R}^+$.

<u>Démonstration</u> : L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha \lambda(dt)$ s'écrit encore :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{(i,\chi_A)\in K^{n+1}\setminus K^n} \varphi(A)^\alpha \quad \mu(i, \chi_A)\right)$$

où $K = \{(0,0),\ (\pm e_i,0)\ _{i=1,\ldots,k},\ (0, \chi_{\{0\}})\}$, qui est un voisinage compact de $(0,0)$ engendrant G_k et qui donc convient pour définir les moments de μ. Si $(i, \chi_A) \in K^{n+1}$ il est clair que $\varphi(A) \leqslant n+1$, donc la somme considérée est majorée par :

$$\sum_{n=0} (n+1)^\alpha \quad \mu(K^{n+1}\setminus K^n)$$

ce qui prouve le lemme.

A la marche aléatoire $W_n = (i_n, \chi_{A_n})$ de loi μ sur G_k, on peut associer la marche (i_n) projetée sur $\mathbb{Z}^k$. On peut d'autre part lui associer la suite $T_n = \varphi(F_n)$ où χ_{F_n} est la seconde composante de $W_{n-1}^{-1}\, W_n$. La suite (T_n) est une suite de variables indépendantes de même loi λ sur $\mathbb{R}^+$. La marche $(i_n)_{n\geqslant 1}$ et la suite $(T_{n+1})_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes. Pour démontrer l'existence de fonctions μ-harmoniques, bornées, non constantes, sur G_k, l'argument utilisé dans le cas où μ est à support compact, pourra de nouveau être appliqué si l'inégalité $r < ||i_n|| - T_{n+1}$ a lieu p.s. à partir d'un certain rang, quel que soit l'entier $r > 0$($||i||$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^k$). En effet si $r < ||i_n|| - T_{n+1}$ alors $A_{n+1} \cap B(0,r) = A_n \cap B(0,r)$ car $\chi_{A_{n+1}} = \chi_{A_n} + \chi_{F_{n+1} + i_n}$ mod 2 ; si cette inégalité a lieu à partir d'un certain rang, la suite $\chi_{A_n \cap B(0,r)}$ est donc convergente ; si r est arbitraire la suite χ_{A_n} est aussi convergente. On va montrer que cette inégalité a lieu p.s. à partir d'un certain rang dès que μ a un moment fini d'ordre 2. Puisque, dans ce cas, la loi de (i_n) et λ ont des moments finis d'ordre 2, cela résulte du lemme suivant.

<u>Lemme</u> : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^k$, avec $k \geq 3$, indépendantes, de même loi ν adaptée à $\mathbb{Z}^k$. Soit $(T_{n+1})_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes, de même loi λ. Si ν et λ ont des moments finis d'ordre 2, si les deux suites (X_n) et (T_{n+1}) sont indépendantes entre elles alors $P\left[\liminf_n \left(T_{n+1} < \left|\left|\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell\right|\right|\right)\right] = 1$.

Comme on vient de l'expliquer ce lemme démontre le théorème suivant.

<u>Théorème</u> : A toute probabilité μ adaptée, ayant un moment fini d'ordre 2 sur le groupe G_k, $k \geq 3$, il correspond des fonctions harmoniques bornées non constantes.

<u>Démonstration du lemme</u> : On peut d'abord observer que l'événement $\liminf_n \left(T_{n+1} < \left|\left|\sum_1^n X_\ell\right|\right|\right)$ est invariant sous toute permutation finie des X_n et T_n. D'après la loi 0 ou 1 de Hewitt et Savage, sa probabilité est donc 0 ou 1. Pour démontrer que l'événement complémentaire $\limsup_n \left(\left|\left|\sum_1^n X_\ell\right|\right| \leq T_{n+1}\right)$ a une probabilité nulle on distingue deux cas. D'abord si ν n'est pas centrée, $\left|\left|\sum_1^n X_\ell\right|\right|$ croit comme n et le résultat provient de $\lim \frac{T_n}{n} = 0$ p.s. En second lieu, si ν est centrée, on étudie la convergence de la série de terme général $P\left(\left|\left|\sum_1^n X_\ell\right|\right| \leq T_{n+1}\right)$. Ce terme s'écrit aussi $\int_0^{+\infty} \nu^n(B(0,t))\ \lambda(dt)$ donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\left|\sum_1^n X_\ell\right|\right| \leq T_{n+1}\right) = \int_0^{+\infty} N(t)\ \lambda(dt)$$

où $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n(B(0,t))$ qui est la mesure potentielle de la boule $B(0,t)$. Comme ν a un moment d'ordre 2 fini, on sait que cette fonction est équivalente à t^2 à l'infini ; comme λ a un moment d'ordre 2 fini, l'intégrale $\int_0^{+\infty} N(t)\ \lambda(dt)$ converge ainsi que la série considérée, ce qui donne le résultat cherché.

<u>Remarques</u> : Si $k \geq 3$ on pourrait montrer que χ_{A_n} converge vers la fonction indicatrice d'une partie infinie de $\mathbb{Z}^k$. Si la marche projetée sur $\mathbb{Z}^k$ est centrée, l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{Z}^k$ apparaît comme un candidat raisonnable pour le rôle de frontière de Martin. Une étude détaillée serait intéressante

car il y a peu d'exemples où une détermination explicite de la frontière de Martin est possible.

On peut aussi se demander si, dans le dernier théorème, il est possible de remplacer moment fini d'ordre 2 par moment fini d'ordre α avec $0 < \alpha < 2$. L'argument utilisé ci-dessus ne pourra pas permettre d'obtenir $\alpha < 1$; en effet alors $\frac{T_n}{n}$ ne tendrait pas vers 0 et le lemme serait mis en défaut par toute marche aléatoire dont la projection sur $\mathbb{Z}^k$ ne serait pas centrée.

En fait le dernier lemme ne fait qu'exprimer de façon un peu renforcée le caractère transitoire des marches aléatoires en dimension supérieure à 3. Il ne semble pas impossible qu'il reste vrai sous des hypothèses moins restrictives.

REFERENCES

[1] A. AVEZ : Entropie des groupes de type fini.
CRAS t. 275 (1972) série A, 1363-1366.

[2] A. AVEZ : Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle
CRAS t. 279 (1974) série A, 25-28.

[3] Y. DERRIENNIC : Quelques applications du théorème ergodique sous-additif.
Astérisque n° 74 (1980), 183-201.

[4] W. EMERSON : Large symmetric sets in amenable groups.
Amer. Jour. of Math. 96 (1974), 242-247.

[5] Y. GUIVARC'H : Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques.
Bull. S.M.F. t. 101 (1973) 333-379.

[6] J. ROSENBLATT : Ergodic and mixing random walks on locally compact groups.
Math. Annalen (1981), 257 n° 1, 31-42.

[7] A.M. VERSIK et V.A. KAIMANOVIC : Random walks on groups : boundary, entropy, uniform distribution.
Soviet Math. Dokl. vol. 20 (1979) n° 6, 1170-117.

Y. Derriennic : Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
6, avenue Le Gorgeu
29283 BREST Cédex