DOMINIQUE FLAMENT

L'idée d'une « Algèbre-langue » (un tournant de l'histoire des nombres complexes)

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 2
« Séminaire d'histoire des mathématiques », , p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982___2_A3_0>

Adrien Quentin Buée : Un inconnu
(1748-1826)

L'idée d'une "Algèbre-langue"
(Un tournant de l'histoire des nombres complexes)

Dominique FLAMENT
Septembre 1982.

Dans un travail récent intitulé:"Contribution à l'étude historique des quantités imaginaires"[1] nous avons pu montrer que les difficultés qui s'opposèrent à l'élucidation des quantités imaginaires ont été levées à mesure des progrès du symbolisme et du langage mathématiques,d'une part,et,d'autre part, sur une remise en question des rapports existants entre ALgèbre et Géométrie.Dans ce cas particulier,ces progrès ne purent guère s'accomplir en ligne droite.On ne saurait parler de progrès "linéaire",mais plutôt d'un progrès présentant l'image d'un faisceau entre des points de convergence dont d'ailleurs les apparences synchrétiques ne sauraient faire méconnaître qu'elles impliquent la rencontre consciente de plusieurs champs de reflexions conduites indépendamment les unes des autres par le raisonnement clair et clairement énoncé,bien qu'elles soient dépendantes entre elles dans ce que faute d'expression plus commode on désigna sous le nom de "milieu" conceptuel inconscient.Naturellement un tel "milieu" n'excite que parce qu'existe aussi "une" société de savants,société appartenant elle même par toutes sortes de lien à "la"société la plus générale définie par toutes ses formes d'ambitions et d'activités.

En effet,"più di meno" et "meno di meno"sont d'un usage mal commode et Bombelli[2] lui-même les représentera par les abréviations "p.dm"et"m.dm".Cette notation a l'inconvénient de ne pas renseigner sur la nature de l'objet mathématique désigné,mais a au moins l'avantage de ne pas conduire à une interprétation fausse.Le XVIIème siècle paye d'audace en écrivant "$+\sqrt{-1}$" et "$-\sqrt{-1}$" mais si un tel signifiant veut dire quelque chose,ce quelque chose lui-même est erroné puisqu'il est évident qu'on ne peut pas extraire la racine carrée d'un nombre négatif.Utiliser le radical c'est donner aux symboles un caractère opérationnel qu'ils ne possèdent pas; cela conduit naturellement les mathématiciens à parler selon les cas et/ou les époques de quantités ou de nombres "sophistiques", "absurdes","inexplicables","impossibles"ou"imaginaires".Euler semble avoir compris le danger,mais après de longues réflexions: dans une première étape reprenant à son compte la notation erronée "$\sqrt{-a}$",il découvre oportunément(vers 1740)qu'elle résulte du produit

(1)D.Flament,"Contribution à l'étude historique des quantités imaginaires".Thèse doctorale de 3ème cycle.EHESS(Paris,mai 1982)

(2)R.Bombelli,L'Algebra,Bologna(G.Rossi),1579.

de "$\sqrt{-1}$" par "$\sqrt{a}$".Dans une seconde étape,il lève une deuxième difficulté en utilisant le symbole "i"dont la propriété est seulement de donner "-1"lorsqu'il est "multiplié"par lui-même.Plus de deux cent années se seront écoulées pour "redécouvrir" le symbolisme deBombelli,mais cette fois simplifié en "+i"et "-i" ayant plusieurs avantages:il utilise à bon escient les signes + ou -; il cesse d'évoquer mal à propos la notion de racine;il conduit à une notation simple a+bi qui était effectivement soujacente dans les expressions de Bombelli mais si peu clairement exprimée qu' entre temps on en avait oublié la pertinence.

Nous avons aussi montré que la représentation géométrique des quantités imaginaires a été longtemps cherchée en vain pour répondre au besoin de donner à ces nombres une "réalité" et grâce à elle plein accès à l'ensemble des mathématiques. Quand enfin cette équivalence géométrique est trouvée,on constate qu'elle ne constitue pas une"preuve"d'existence ainsi qu'on l'avait
cru précédemment.Les efforts dépensés ainsi ont contribué à approfondir les exigences du raisonnement.

Le caractère "nécessaire"de cette représentation se révèlera relatif à l'esprit du temps,comme le remarquera ensuite G.Loria,"la représentation géométrique des nombres imaginaires a été découverte une demi douzaine de fois "prouvant"qu'on se trouve en présence,non d'un produit artificiel de l'imagination (sic)de quelque mathématicien de génie,mais d'une découverte au sens vrai et propre du mot"[4].Pourtant elle ne suffira pas à convaincre:preuve en sera dans les hésitations de Gauss et de Cauchy, le premier constatant que l'on ne comprend toujours pas "la nature métaphysique de $\sqrt{-1}$"[5],le second,pendant plus de 20ans,ne voyant dans cette représentation géométrique qu'"un simple artifice logique"[6].Deux attitudes apparemment surprenantes mais qui témoigneront d'une nouvelle orientation de la pensée et des recherches mathématiques.L'esprit du temps n'est pratiquement plus attaché

---

(3)L.Euler,"Introductio in analysis infinitorum"(1748),p.290: "Cum enim numerorum negativorum logarithmi sint imaginarii,(...) erit l.-n,quantitas imaginaria,quae sit = i".C'est seulement dans son article"De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus,quas tamen per logarithmus et arcus circulares integrae licet,MS.Academiae(St.Petersbourg)exhibit.die.5 mai.1777"(ref W.W.Beman;A.M.S.B.(2)4(1898),p.274)qu'il met plus clairement en relief cette correspondance:"...formulam $\sqrt{-1}$ lettera i in po erum designabo,ita ut sit ii= -1,ideoque $\frac{1}{i}$ =-i(...)"

(4)G.Loria,"L'enigme des nombres imaginaires à travers les siècles", Scientia,21(1917),p.55.

(5) Ch.Musès,"Explorations en mathématiques";Impact,27(1977),p.81.

(6) Cité par G.Loria,op.cit,p.56.

aux justifications d'ordre purement géométrique;le symbole se détache de toute signification qui n'aurait d'autre fait que de le limiter;l'image a pu servir de guide à l'algèbre,mais elle y devient ensuite plutôt un encombrement inutile qu'une preuve suffisante.

Dans le dernier tiers du XVIIIème.siècle la reflexion s'oriente vers de nouveaux objets:l'extension de la recherche théorique fait perdre au champ d'application son caractère jusque là exclusif.On commence à se préoccuper de la solidité de l'édifice arithmétique que les recherches de représentations géométriques avaient si longtemps masquées.On s'interroge avec plus de préoccupation sur la nature des opérations arithmétiques,cherchant à savoir quelles propriétés les caractérisent.

Les recherches de A.Q.Buée n'atteindront pas le but qu'il s'était fixé,mais auront au moins le mérite d'amorcer une étude féconde.G.Peacock[7] ira beaucoup plus loin:son souci de légitimer l'usage des nombres négatifs et imaginaires le conduira à établir une distinction fondamentale entre une algèbre arithmétique appliquant les opérations de l'arithmétique aux nombres positifs et réels,et une algèbre symbolique se servant sans frein des quantités négatives,positives et imaginaires(il créa à cet effet un "principe de permanence"qui devait permettre le passage d'une algèbre à l'autre).Les travaux effectués sur la nature même des opérations[8] par G.Peacock,D.F.Gregory,A.DeMorgan,G.Boole ,etc, les successeurs de Ch.Babbage et J.Herschel,combinés à ceux de Hamilton et à certaines considérations directement liées aux représentations géométriques achèveront d'élucider les entités mathématiques aujourd'hui appelées "nombres complexes".

---

(7)G.Peacock,"Report on the recent progress and present state of certain branches of Analysis".London,1833.
"A treatise on Algebra:Vol.I-Arithmetical Algebra (Cambridge,1842);
Vol.II-On symbolical Algebra and its applications to the Geometry of position"(Cambridge,1845

(8)On pourra sur ce sujet consulter les références suivantes:
- -E.Koppelman,"The calculus of operations and the rise of abstract algebra",Archive for the History of Exact Sciences vol.8(1971-72),Springer-Verlag,pp.155-242;
- -D.Clock,"A new concept of Algebra:1825-1850";Ph.D.dissertation, University of Wisconsin,1964;
- -L.Novy,"L'Ecole algébrique anglaise",in Rev.de Synthèse:III^{e}s. n°49-52(Jan-Dec.1968),pp.211-221.

Ainsi avons nous observé dans notre étude que la "réalité" des nombres imaginaires a été acquise par deux modes distincts bien que non sans corrélation l'un à l'autre. L'un géométrique avec C.Wessel[9], J.R.Argand[10], C.V.Mourey[11], J.Warren[12], C.F.Gauss[13], et A.L.Cauchy[14]; l'autre algébrique avec A.Q.Buée[15], G.Peacock[16], W.R. Hamilton[17], A.De Morgan[18] et G.Boole[19]. Lorsque nous avons avons employé en plusieurs occasions le terme de "réalité" appliqué aux nombres imaginaires, nous nous sommes exposé à un risque: laisser croire que nous avions fait nôtre une conception du réalisme des objets mathématiques qui fut manifeste au début de notre siècle, mais qui est aujourd'hui singulièrement dépassée. En fait, l'emploi de ce mot, ou d'autres, s'est révélé essentiel pour montrer comment les mathématiques, tant dans leur contenu que dans leur forme, se sont profondément modifiées. Elles cesseront d'être les immédiates et facilement décelables traductions du "monde sensible", qu'elles furent pendant longtemps, pour devenir progressivement, à force d'abstractions successives et de recherches de cohésion interne, un réservoir de "formes abstraites", un langage symbolique apparemment sans commune parenté avec l'"extérieur" et hors d'atteinte de son influence.[20]

\+ \+ \+ \+

---

(9) C.Wessel, "Essai sur la représentation analytique de la direction" (1797), trad. française de H.G.Zeuthen. Copenhague et Paris, 1897.

(10) J.R.Argand, "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques" (1806), réimp. A.Blanchard, Paris, 1971.

(11) C.V.Mourey, "La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence" (1828), Bachelier, 2nd édition, Paris, 1861.

(12) J.Warren, "Treatise on the geometrical interpretation of the square roots of negative quantities". Cambridge, 1828;
-"On the geometrical representation of the powers quantitie, whose indices involve the square roots of negative quantities", in Philos. Trans. London, 119(1829), pp.339-359;
-"Consideration of the objections raised against the geometrical representation of the square roots of negative quantities", in Philos. Trans. London, 119(1829), pp.241-254.

(13) C.F.Gauss, "Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda (15/04/1831)", in: Werke 2, Göttingue. Acad. (1876), p.169-178

(14) A.L.Cauchy, Oeuvres complètes, 27 vol. (2 séries), Gauthier-Villars (1882-1974), Paris.

(15) A.Q.Buée, "Mémoire sur les quantités imaginaires", in Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London (20 Juin 1805), 1806.

.../...

Si nous avions voulu nous en tenir au tableau d'une d'une histoire sans heurts de la représentation géométrique des nombres complexes,représentant alors une ligne sans cesse ascensionnelle où en dernier lieu vient culminer l'image vectorielle pour nous si familière,A.Q.Buée,pour son "Mémoire sur les quantités imaginaires"communiqué par William Morgan à la Société Royale de Londres le 20 juin 1805,n'occuperait pas ici la place que nous lui avons retenue.Nous aurions repris à notre compte la facile,mais plus légitime,transition,surtout si l'on s'en tient uniquement à la teneur de leurs travaux,qui amène à faire succéder Argand à Wessel.Ce passage,plus conforme à l'idée que l'on s'est fait sur cette représentation ,a pour conséquence immédiate la suppression des hésitations et des problèmes parasites,mais souvent plus révélateurs,qui forment le cadre naturel de cette "réalisation" géométrique,bien que n'étant pas eux-mêmes d'ordre strictement mathématique.On se trouve,par conséquent,privé d'une nouvelle possibilité visant le pourquoi de telles considérations,qualifiées aujourd'hui de marginales,alors qu'elles surent en leur temps féconder de nouveaux concepts une mathématique qui se figeait.[21]

(16)Op.cit.note (7).
(17)W.R.Hamilton,"The Mathematical papers(of)",Cambridge Uni.Press, 1931-1967,vol.III,by H.Holberstam and R.E.Ingram, 1967,XXIV-672p.
-)"Theory of conjugate functions,on algebraic couples with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time"(1835),in:Irish Acad. Trans.,XVII,1837,pp.293-422;
-)"Lectures on quaternions",Dublin,1853.
(18)A.De Morgan,"On the foundation of Algebra"n°1,Trans.of the Camb. Philos.Soc.,vol.VII,part.II,1841,pp.173-188;n°2, ibid.,vol.II,part.III,1841,pp.267-300;n°3,ibid.,vol. VIII,part.I,1844,pp.139-143;n°4,ibid.,vol.VIII,part. III,1847,pp.241-254.
-)"Trigonometry and double Algebra",London,1849.
(19)G.Boole,"An investigation of the laws of thought,on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities",London,1854.
(20)Les résultats,entre autres,de Kurt Gödel obligeront au cours de la première moitié du XX^e siècle une partie des mathématiciens à revenir sur cette position et,comme le dit Emilio Garbayo Martínez,dans son ouvrage intitulé:"Control ideológico de la invención matemática"(Barcelona,1978):"...no parece quedar otro remedio que examinar en detalle los lazos que se han mostrado indestructibles,aunque complejos,entre el mundo real y las matemáticas"(p3
(21)Ne voyons-nous pas,par exemple,un Lagrange prédire que les chaire universitaires de mathématiques se feraient aussi rares que celle de langue arabe!

C'est parce que Buée[22] s'encombre volontairement d'arguments propres au langage afin de justifier la présence d'éléments "imaginaires" en Géométrie, qu'il présente à nos yeux un intérêt privilégié. C'est sans nul doute pour la même raison qu'il rebute ses lecteurs les plus avertis, indispose les esprits imbus d'une rigueur aveugle et qu'on a tendance de nos jours à le faire disparaître des "histoires des mathématiques".[23]

L'auteur donne une représentation géométrique du "signe" $\sqrt{-1}$ et cherche à la légitimer, mieux à la "populariser". Une telle exigence l'oblige à denoncer la trop grande rigidité du carcan de l'"Algèbre ordinaire" (i.e. l'"Arithmétique universelle"). Il bâtit, plutôt en prône-t-il la nécessité, une "langue mathématique" susceptible de recevoir et d'asseoir les nombres négatifs et, a fortiori, les nombres "imaginaires", sur une base moins contestable que l'existante. C'est en quelque sorte l'histoire de cette double recherche que raconte son "Mémoire".

Ce double objectif, souhaité mais non réalisé, nous porte à le faire côtoyer deux courants apparemment sans liens. Le premier cherche une "réalisation" géométrique commode à ces quantités que l'on nomme avec réserve "imaginaires"; il forge un instrument qui s'avèrera indispensable à la suprématie de l'Analyse. Une telle recherche ne visant que la découverte d'une "image" souffre d'un défaut très grave: elle suppose tacitement dans ses prémices que le "calcul" avec des "quantités imaginaires" est légitime. Cette limitation est parfaitement observable dans les travaux de Wallis,[24]

(22) Adrien Quentin Buée est né à Paris en 1748, il est ordonné prêtre et nommé d'abord organiste de Saint Martin de Tours. Lorsque la Révolution Française éclate, il publie un certain nombre de pamphlets contre la Révolution Française. Après leur publication il est obligé d'émigrer en Angleterre (à la suite de la journée du 10 Août 1792), il y séjournera pendant 21 années. Il a écrit un autre texte scientifique, mais ce dernier est resté à l'état de manuscrit: "Recherches mathématiques sur la texture intime des corps". Dans ce texte, où mathématiques et alchimie sont mélangées, il déduira à partir d'une équation algébrique générale la totalité de l'univers tant matériel qu'immatériel. Autrement dit, il reprend le véritable projet alchimiste: trouver une formule à partir de laquelle on pourrait déduire l'ensemble de la création.

En 1813 il rentre en France, devient chanoine honoraire de Notre Dame de Paris et meurt à Paris en 1826.

(23) C'est la principale raison, outre celles que nous avons déjà relevé, qui justifie l'intérêt du présent article. On observera dans les pages suivantes que Buée est loin d'être resté sans influence sur ses contemporains.

.../...

Kühn[25] et Euler[26],parmi d'autres.Ce n'est que par la suite qu'un tel problème sera posé et progressivement résolu par Wessel,Argand, Mourey,Warren,Gauss,Hamilton et Cauchy.

Le second courant se pose le problème des opérations; son premier objectif déclaré est la précision du discours mathématique.Il cherche à énoncer,plutôt à faire l'inventaire,des conditions permettant l'accès d'un nouvel "objet" dans une théorie.La rigueur de l'enchaînement des propositions,abstraction faite de leurs contenus,est aussi de son ressort.Enfin,il participe à l'établissement d'utiles délimitations entre les différents domaines formant par union ce que nous appelons "les" mathématiques.

Bien sûr,on ne saurait affirmer que la recherche d'une "langue mathématique"est une chose nouvelle en soi:Buée est, sur ce point précis,très largement dépassé par les découvertes antérieures de Leibniz.[27] Il n'apporte également rien de bien nouveau dans le domaine attaché à la stricte "réalisation" géométrique des "quantités imaginaires";son idée est très fortement anticipée par d'autres.On ajoutera à ce tableau que l'auteur n'était qu'un mathématicien dilettante-son Mémoire n'était qu'une des deux rares échappées qu'il fit hors de ses coutumières publications politico-religieuses critiques-par conséquent peu au fait des récentes découvertes mathématiques de son époque et qu'il allait à l'encontre d'une des premières exigences de son temps par l'obscurité de son travail.On comprend dès lors mieux pourquoi il ne saura pas retenir toute l'attention de l'historien des sciences et s'attirera les jugements les plus sévères.[28]

---

(24)J.Wallis,"A treatise of Algebra".London,Playford,1685.
(25)H.Kühn,"Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis";Mémoire Acad.St. Petersbourg(Novi commentarii,t.III),1751.
(26)L.Euler,Opera omnia,46 vol.(3séries),Leipzig-Berlin-Zurich (Teubner et O.Füssli),1911.
(27)On peut dans ce même ordre de recherche citer,outre ceux de nombreux autres auteurs de la même période,les études de Condillac,Degérando , Burja et Castillon.
(28)G.Loria,op.cit.note (4):"(...)Celui-ci s'exprimait d'une façon tellement confuse,se servant d'un style extrêmement embrouillé,qu'il n'a certainement pas fait avancer d'un pas la solution d'un problème difficile qui,à ce moment-là,était à l'ordre du jour;et la prétendue équation $(-1)n = (-1^{n})$ qu'il croyait avoir découverte,forme sur son nom une tache indélébile".

Pourtant Buée ne passe pas inaperçu de ses contemporains: Peacock, Hamilton, Cauchy, bien que critiquant unanimement le style de Buée, lui reconnaissent une véritable valeur.[29]

L'étude de Buée est donc un témoignage de première importance pour mesurer l'évolution d'une science qui n'a pas encore unifié son discours. Elle met crûment en relief que les mathématiques sont encore baignées d'un réalisme puisé dans le quotidien de leurs bâtisseurs, que ces derniers cherchent encore dans leur entourage, tant matériel que social, les inspirations ou les éléments propres à satisfaire leurs exposés théoriques. On reste, par conséquent, encore loin d'une "intuition" professionnelle qui puise sa substance de symboles décharnés.

Les premières lectures du long Mémoire de Buée, 65 pages surchargées de nuances linguistiques, obligent à constater que l'auteur n'a pas su atteindre une pleine maîtrise de son sujet; son exposé est alourdi par de trop nombreuses redites inutiles et manque de clarté aux moments les moins propices. A trop vouloir convaincre, en faisant appel à des notions extérieures aux mathématiques, il sème le doute. Plus maladroit que Wessel, parce que plus abstrait, plus vague parce que trop globaliste, il s'expose aux critiques les plus vives de la "Edinburgh Review".[30] L'existence même de celles-ci

---

(29) G. Peacock, "Report...." (Op. Cit. note (7)), p. 228: "The geometrical interpretation of the sign $\sqrt{-1}$, when applied to symbols denoting lines, ..., was first formally maintained by M. Buée in a paper in the Philosophical Transactions for 1806; which contains many original, though very imperfectly developed views upon the meaning and application of algebraical signs".

W.R. Hamilton, "Lectures on Quaternions" (Dublin, 1853), Preface: notes, pp. 31-34.

A.L. Cauchy, Oeuvres (2 éme. série), vol. XIV, p. 175. Il laisse Buée sur un plan d'égalité avec Argand: "Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation géométrique, contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées".

Non seulement Cauchy accorde une importance a Buée, il va plus loin en épousant certaines de ses idées il considère comme Buée que "les signes + et - placés devant les nombres peuvent être comparés ...à des adjectifs placés auprès de leurs substantifs (réf. Peacock op. cit., note (29), p. 193).

(30) "The Edinburgh Review, or Critical journal", vol. 12, nº. XXIV (London, July 1808) pp. 306-318.

est,contrairement aux propos de G.Loria(Cf.note (28)),un facteur de progrès:Elles rendent publique l'urgence d'un problème délicat et conduisent à l'affrontement d'idées à défendre.Combien de mathématiciens s'illustrèrent en marquant l'évolution de leur science par des "erreurs" qui s'avérèrent fécondes après coup!

Par la tentative qu'il ébauche,Buée se situe à l'une des origines du mouvement qui,en particulier entre les mains de l'"Ecole Anglaise",aboutira à la création de la logique symbolique et à la conception des algèbres abstraites.Aussi confuse soit-elle, l'oeuvre de Buée témoigne bien de la richesse imaginative de ce XIXe siècle naissant et offre,malgré ses maladresses,une nouvelle mise en valeur de l'extrême difficulté qu'il y avait alors à extraire ces notions devenues pour nous si "évidentes" d'une mathématique a la recherche de l'universalité de son discours.C'est aussi par son souci de vouloir faire de l'algèbre une langue,que Buée occupe une position radicale par rapport au mouvement qui essaie de libérer les mathématiques de leur pesante tutelle purement géométrique.

Dès les premières pages,l'auteur essaie d'établir une frontière entre l'Arithmétique et la Géométrie,distinction que Peacock aura soin de perfectionner tout en la critiquant.Parlant des signes "+" et "-",il souligne leurs rôles respectifs:comme signes d'opérations arithmétiques,le premier indique l'addition, le second,la soustraction;en géométrie,ils dénotent simplement des directions opposées.L'exemple qui fait suite à cette mise au point permet d'envisager ce que seront pour Buée les "objets" auxquels s'appliqueront ces opérations et présente l'avantage supplémentaire d'introduire une nouvelle notion:

> "...Lorsqu'on décrit une ligne d'une longueur déterminée, on fait deux choses:1°)on donne à cette ligne sa longueur; 2°)on lui donne sa direction.La première de ces opérations est purement <u>arithmétique</u>.La seconde est purement <u>géométrique</u>(...).Lors donc qu'on réunit ces deux opérations, on fait réellement une opération <u>arithmético-géométrique</u>"[31]

Ainsi,trois types d'opérations sont distingués;le premier prend en compte les longueurs des lignes et s'affranchit de leurs directions respectives;le second opère exactement de façon opposée et le troisième considère à la fois les longueurs et les directions des lignes.Il est donc clair que,fort des renseignements que nous a légués Wessel,la représentation géométrique des "quanti-

(31)Buée,<u>op.cit.</u>(note (15)),p.23.Tout ce qui est souligné l'a été par l'auteur,sauf mention expresse de notre part.

tés imaginaires" ne saurait appartenir excusivement à la"géométrie",elle a besoin pour exister d'un ingrédient "arithmétique" indispensable(aux dires de Buée).

Ce premier essai de l'auteur pour établir une séparation entre les "objets" de l'"arithmétique" et ceux de la "géométrie",est donc bien clair: C'est une porte ouverte pour chasser l'"impossible.En effet,il a pour but de montrer que l'impossibilité de conclure un problème posé,à cause de la présence de "quantités imaginaires",est souvent imputable non à ces éléments eux-mêmes mais à l'introduction incontrôlée, lors de la "traduction géométrique" initiale,de notions "arithmétiques";et réciproquement.C'est de ce mélange "disparate" que résulte l'"impossible".

Mais les signes "+" et "-" ne se réduisent pas uniquement à jouer ces rôles,la "langue arithmétique" que cherche à introduire Buée leur réserve une plus grande destinée;pour atteindre ce but il faudra allier la "qualité" à la "quantité":

> "En général,lorsque + et - ne signifient pas simplement l'un l'addition et l'autre la soustraction,pour savoir ce que signifie - devant une lettre,il faut savoir ce que signifierait + devant cette même lettre,et prendre pour - la signification opposée(...).Chacun des signes + et - a deux significations tout à fait différentes: 1°)mis devant une quantité q,ils peuvent désigner <u>deux opérations arithmétiques opposées</u>, dont cette quantité est sujet;2°)devant cette même quantité,ils peuvent désigner <u>deux qualités opposées</u> ayant pour sujet les <u>unités</u> dont cette quantité est composée".[32]

Si le "sujet" change et,par conséquent,justifie cette apparition de la "qualité",néanmoins les signes "+" et "-" restent soumis à certaines restrictions:

(32)Buée,<u>ibid</u>.,pp.23-24.

"Dans l'algèbre ordinaire, c'est-à-dire dans l'algèbre considérée comme arithmétique universelle, où l'on fait abstraction de toute espèce de qualité, les signes + et − ne peuvent avoir que la première de ces significations. Par conséquent, dans cette algèbre où tout est abstrait, une quantité isolée peut bien porter le signe + qui, dans ce cas, n'ajoute rien à l'idée de cette quantité ; mais elle ne peut pas porter le signe −. En effet, cette quantité étant supposée isolée, si on l'ajoute, ce ne peut être qu'à zéro; si on la soustrait, ce ne peut être que de zéro. Le premier est possible, mais le second est absurde".[32]

Si l'on s'en tient strictement aux précisions de Buée, une lettre a précédée du signe "−" ne peut exister isolément tandis que la même lettre précédée du signe "+" est parfaitement acceptable. On découvre aussi que la première peut être parfois envisagée si la seconde a été préalablement définie. Comme il le dit lui-même[33], si "+t" est un "temps passé", alors "−t" est un "temps futur" égal ; si "+p" est une "propriété", alors "−p" est une "dette" d'égale valeur. Le paragraphe 4 de son "Mémoire" interdit tout possible renversement de cette proposition logique : concevoir une totale autonomie à une lettre précédée du signe "−" est complètement exclu. Se référant aux différentes positions, "+ 1" qu'occupe une ligne lorsqu'elle est soumise à une opération "arithmético-géométrique", il précise :

"Il ne suffit pas, pour connaître la situation désignée par − 1, de connaître une de celles qu'on désigne par + 1, il faut encore savoir à laquelle chaque − 1 est opposée"[34].

Buée accorde − les déclarations précédentes le prouvent amplement − une importance et un privilège exceptionnels au signe "+" ; il érige en "règle" une simple habitude d'écriture qui ramassait en une simple lettre,

(33) Buée, ibid., p. 24.
(34) Ibid., pp. 23-24.

"a", l'expression symbolique "+ a" (une telle réduction subsiste de nos jours, mais la lettre "a" n'est pas) condamnée à ne représenter que des nombres "abstraits"). C'est cette pratique commode qui le conduit arbitrairement à tolérer "+ a" dans l'"algèbre ordinaire", car celle-ci est vue comme l'expression simplifiée de la "somme 0 + a" ; "- a" n'a évidemment pas de sens, puisqu'elle correspond à la forme réduite de la "différence absurde 0 - a". Par ce parti-pris, on constate déjà que Buée va à l'encontre de ses définitions précédentes (1° et 2°) ; dans la pratique courante des mathématiques les signes "+" et "-" ne sauraient se prévaloir de la sorte. On comprend qu'une simple exception de cette nature souligne le caractère particulier des "nombres négatifs" par rapport aux nombres "naturels" et contribue à freiner leur accession à la place qu'ils occupent aujourd'hui. Inutile de préciser que les nombres "imaginaires" se trouvent, a posteriori, dans une situation encore plus précaire. Bien sûr, l'attitude de Buée n'est pas le radicalisme de Frend ni le refus plus motivé de L. Carnot, mais l'introduction des nombres négatifs dans le "calcul" doit être justifiée par l'apport d'une nouvelle conception :

> "(...) Toutes les fois qu'on a pour résultat d'une opération une quantité précédée du signe -, il faut, pour que ce résultat ait un sens, y considérer quelque qualité. Alors l'algèbre ne doit plus être regardée simplement comme une arithmétique universelle, mais comme une langue mathématique (...)" [35]

Tout devient alors clair pour lui ; l'emploi de "- a" ne doit plus choquer l'esprit, si l'on se réfère à sa seconde définition (2°) ; on n'utilisera plus l'"absurde" expression "soit la quantité moindre que rien - a", on devra avoir en vue la "qualité" traduite par le signe "-" ou, plus précisément,

---

(35) Buée, ibid., p. 25.

> "ce n'est pas la quantité qui est plus petite que zéro, c'est la qualité qui est inférieure à la nullité"35 .

Non content d'avoir introduit la notion trop riche de "qualité" en cette science qui se débat avec celle de "quantité", Buée pousse très loin son idée de "langue mathématique" et va jusqu'à en considérer la grammaire :

> "Selon la seconde signification (2°) donnée aux signes + et –, ils désignent deux qualités opposées ayant pour sujets les unités dont une quantité est composée. Or comme une qualité ne peut être séparée de son sujet, les signes + et – ne peuvent être séparés de leurs unités. Dans la langue algébrique, ces unités sont les substantifs, et les signes + et –, des adjectifs"36 .

Donc, lorsque l'on trouve dans un calcul les expressions "+ q" ou "– q" (quoique le cas de "+ q" soit plus fortement indéterminé, comme nous l'avons vu), il faudra cette fois avoir présent à l'esprit que celles-ci sont en fait les expressions condensées non pas de "0 + q" ou de "0 – q", mais de "+ 1.q" ou "–1.q", respectivement ; la lettre q est alors le "nombre de fois" qu'est prise l'"unité + 1 ou – 1 (ayant une qualité quelconque) , elle correspond par conséquent à un nombre dit "abstrait".

A la suite d'une si rapide entrée en matière, propre à nous plonger immédiatement dans la mouvance de la grammaire, surtout lorsqu'elle vient enrichir les mathématiques de nouvelles difficultés, Buée a le champ libre pour nous apporter des précisions sur ce qu'il faut entendre par "quantités imaginaires".

> "Du signe $\sqrt{-1}$.
> Je mets au titre Du signe $\sqrt{-1}$ et non De la quantité ou de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$; parce que $\sqrt{-1}$ est un signe

---

(36) Buée, *ibid.*, p. 25.

> particulier joint à l'unité réelle 1, et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif"[37].

Buée, par une telle précision, ne peut être vu que comme un succésseur d'Euler, bien qu'il fasse toujours usage de " $\sqrt{-1}$" au lieu de "i". La mise en garde précédente le met à l'abri du risque de s'aventurer dans l'impasse à laquelle conduisit le caractère trop évocateur du symbole " $\sqrt{-1}$". Pour lui, ce dernier, pris seul, ne signifie rien ; aucun caractère opérationnel ne peut lui être attribué. Par contre, c'est lui qui introduira l'"action" en qualifiant l'unité ; dans ce dernier cas, ce n'est plus de " $\sqrt{-1}$" dont on parle, mais de " $\sqrt{-1}.1$". On comprend que Buée nous assaille de mots ; son symbolisme est à la merci d'une simple réduction scripturale "naturelle" qui n'eut pas été préalablement introduite par la métalangue ; trop de références tacitement incluses rendent mal aisé l'emploi de son symbolisme. Comment comprendre ce nouveau "signe" et le caractériser de façon telle qu'il ne vienne pas choquer l'esprit ? Buée maintient son lecteur un moment en haleine :

> "Mais que veut dire ce signe ? Il n'indique ni une addition, ni une soustraction, ni une suppression, ni une opposition par rapport aux signes + et −. Une quantité accompagnée de $\sqrt{-1}$ n'est opposée ni à celle qu'indique +, ni à celle qui est désignée par −. Qu'est-elle donc ?"[37].

Pour expliquer ce signe qui, en première approximation, heurte, car il ne s'oppose pas clairement aux signes + et −, l'auteur, en mal de procédés tirés de l'arithmétique ou de l'algèbre, fait appel à la géométrie. Ici encore, l'affaire n'était pas sans difficultés : les nombres "réels" avaient, avec le temps, su trouver comme lieu "naturel" la droite. Cette linéarité vite acquise devint le fait du <u>nombre</u>. Cette image cartésienne

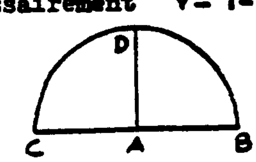
---

(37) Buée, <u>ibid.</u>, p. 27.

commode fut aussi le premier obstacle qui se dressa devant les "quantités imaginaires". L'image mentale qui ressortait d'une si riche correspondance "arithmético-géométrique" était celle d'une droite achevée, donc impropre à recevoir de nouveaux "nombres". Deux options s'offraient alors pour échapper à cette contrainte. La première, plus spéculative et en quelque sorte métaphysique, se heurte au dogme euclidien en attribuant une épaisseur au point et à la droite. Le point correspondant au nombre "0" sur une droite orientée partage celle-ci de sorte que les nombres positifs se situent d'un côté du point "0" et les nombres négatifs de l'autre. Il devient alors impossible de placer les "imaginaires" de part et d'autre d'un tel point. L'épaisseur du point "0" s'offrait alors comme possible réceptacle propre à recevoir ces quantités énigmatiques. Si une telle considération gênait, on se limitait à rejeter ces "nombres" à l'infini des extrémités de la droite réelle. La seconde option, celle qui nous est plus familière, permet d'échapper à cet univers unidimensionnel en recourant au plan. Paradoxalement, Buée opte à la fois pour ces deux possibilités.

Pour découvrir l'"énigme" qui entoure le signe " $\sqrt{-1}$", il nous invite à supposer "trois lignes égales AB, AC, AD, qui partent toutes du point A".[38] On pourrait déjà se demander ce qu'il entend par "égales" lorsqu'il se réfère à des "lignes" ; ici, <u>a priori</u>, il semble que l'auteur tient uniquement compte de leur longueur, faisant abstraction de leurs directions respectives. Néanmoins, il poursuit en disant :

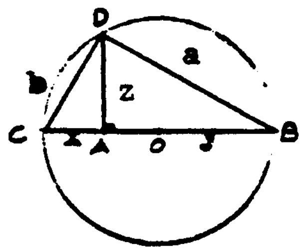
> "Si je désigne la ligne AB par + 1, la ligne AC sera − 1, et la ligne AD, qui est une moyenne proportionnelle entre AB et AC, sera nécessairement $\sqrt{-1^2}$ ou plus simplement $\sqrt{-1}$"[38].



(38) Buée, <u>Ibid.</u>, pp. 27-28.

Nous allons donner un exemple qui conduit à un tel résultat.

Soit la figure suivante :



(cercle de centre O)

où AB = y, AC = x, AD = z, BD = a et CD = b (I).

Les triangles CBD, CAD, ABD sont rectangles. Au moyen du théorème de Pythagore, on déduit respectivement de ces derniers les trois relations suivantes :

i) $(x + y)^2 = a^2 + b^2$

ii) $x^2 + z^2 = b^2$

iii) $y^2 + z^2 = a^2$

On tire aisément de celles-ci, en substituant dans i) a^2 et b^2 par leurs expressions données en ii) et iii), l'égalité :

iv) $z^2 = x.y.$

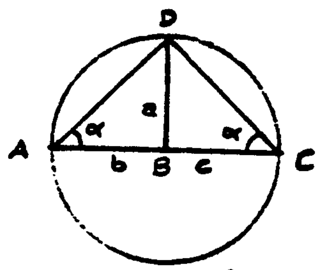
Partant d'une telle relation et compte tenu de (I), on trouve alors :

$AD = \sqrt{AB.AC}.$

Si nous choisissons, à la manière de Buée, les valeurs AB = + 1 et AC = − 1, il s'en suit le résultat suivant :

$AD = \sqrt{(+1).(-1)} = \sqrt{-1^2} = \sqrt{-1}$

Celui-ci, bien que s'avérant exact (se référant pour cela à une autre théorie), est obtenu d'une façon qui n'est pas correcte. En effet, la relation iv) est atteinte par un calcul géométrique effectué sur des grandeurs "absolues" (i.e.,avec des segments de droite abstraction faite de leurs orientations respectives;ce ne sont pas des"vecteurs": on ne considère pas, par exemple, une relation du type AC = − CA !). Or, ici, nous avons fait un choix qui implique une orientation préalable de la figure géométrique initiale et, par conséquent, fausse la pertinence du théorème de Pythagore, car le "produit" et la "somme" considérés a posteriori ne sont plus les mêmes opérations qui nous permirent d'aboutir à la relation iv). Pour clore cette remarque en mettant l'accent sur ce type de difficultés, nous allons souligner l'erreur inhérente à un tel mélange de notions. Soit la figure ci-dessous :



où $AB = b$, $BC = c$, $DB = a$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \alpha$. Il est immédiat, en considérant les tangentes des deux angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$, que :

(1) $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, d'où $b = c$ (a, b, c étant non nuls). Oublions un moment ce dernier résultat et posons :

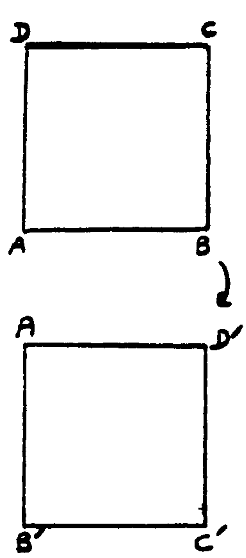
(2) $b = -1$ et $c = +1$. La relation (1) n'est alors plus possible, car elle conduit à l'égalité fausse $-1 = +1$. Cette simple illustration laisse soupçonner qu'il ne suffit pas de dire que " $\sqrt{-1}$ est la moyenne proportionnelle entre -1 et $+1$" pour avoir trouvé la représentation géométrique des nombres "imaginaires" ; une telle expression maintient dans l'obscurité le sens qu'il faut attribuer à la "somme" (par exemple) $a + b\sqrt{-1}$. Retournons aux propos de notre auteur.

Buée tire comme conclusion que :

> "(...) $\sqrt{-1}$ est le signe de PERPENDICULARITÉ, dont la propriété caractéristique est que tous les points de la perpendiculaire sont également éloignés de points placés à égales distances de part et d'autre de son pied. Le signe $\sqrt{-1}$ exprime tout cela et il est le seul qui l'exprime. Ce signe

mis devant a (a signifiant une ligne ou une surface) veut donc dire qu'il faut donner à <u>a</u> une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donnerait, si l'on avait simplement + a ou − a"[39].

Buée donne une autre explication géométrique qui est en grande partie celle de Kühn améliorée, mais nous l'avons déjà constaté auparavant, elle s'appuie également sur une extension mal justifiée du calcul algébrique. Cette représentation est obtenue en faisant des rotations d'un quart de tour autour d'un sommet pris comme centre, d'un des carrés de la figure de Kühn :



"Supposons AB = $\pm$ 1, et par conséquent AD = $\pm$ 1 et mettons en A le point de départ de la description des lignes AB et AD, en sorte que AB et AD portent le même signe, + ou −, et que le carré ABCD soit positif.

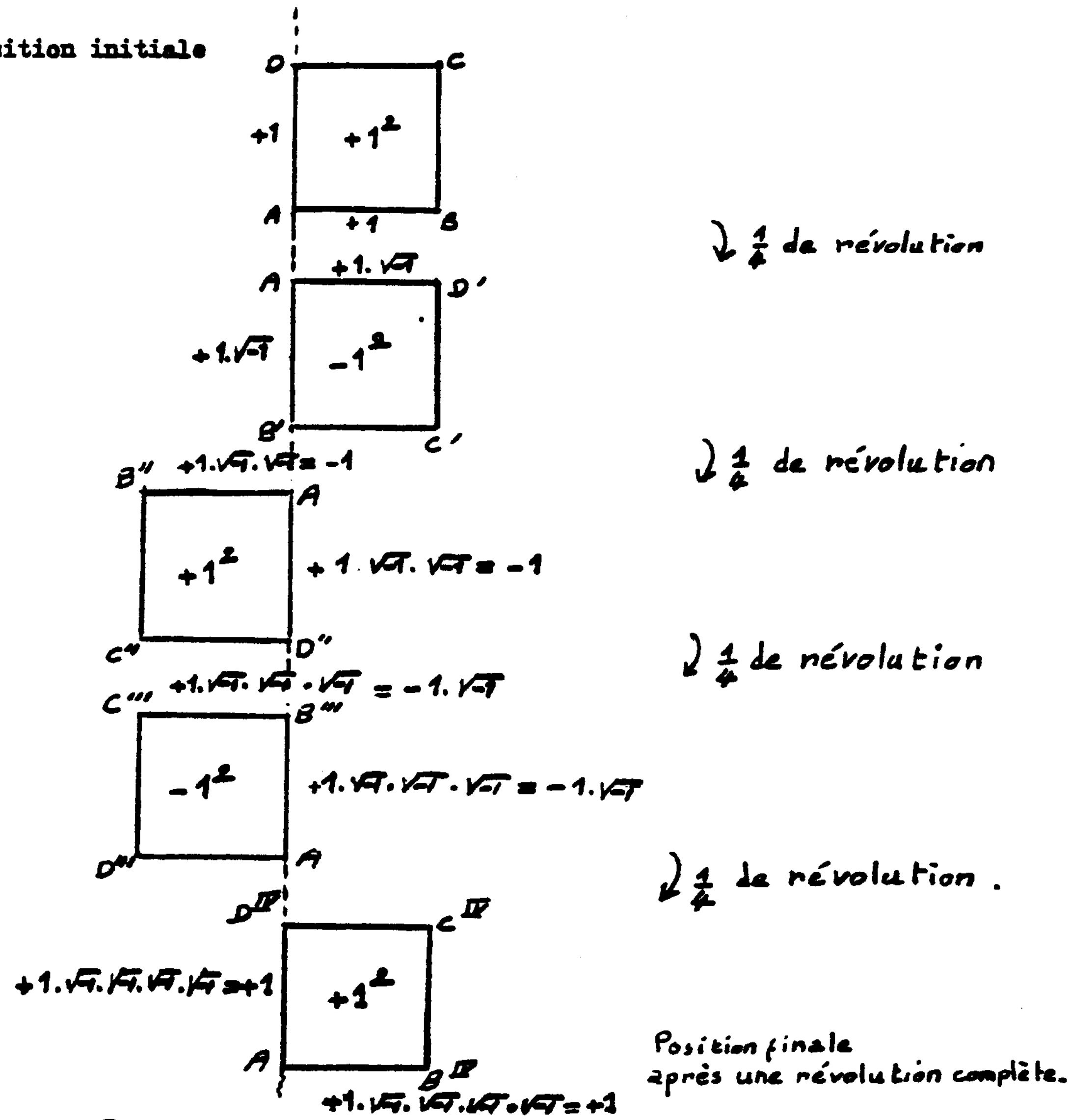
Maintenant faisons faire à ce carré un quart de révolution autour du point A pris comme centre. Après ce mouvement, le point B sera en B', le point C en C', et le point D en D'. Chacune des lignes AB, BC, CD, DA prendra une situation perpendiculaire à celle qu'elle avait et, au lieu du carré ABCD, on aura le carré AB'C'D'. Or A étant le point de départ, il est clair que, si le carré ABCD est positif, le carré A'B'C'D' doit être négatif, et <u>vice-versa.</u>

Par conséquent, si ABCD = + 1^2, dont le côté AB ou CD ou DA est = $\pm$ 1, on a AB'C'D' = − 1^2, dont le côté AB' perpendiculaire à AB, ou BC' perpendiculaire à BC, ou C'D' perpendiculaire à CD, ou DA perpendiculaire à DA et = $\pm\sqrt{-1}$. On voit donc que, si l'on donne à tous les côtés d'un carré des positions perpendiculaires à celles qu'ils ont, <u>sans cependant changer leurs positions respectives et faisant le plus petit mouvement possible</u> (c'est-à-dire, en n'ajoutant pas le mouvement de translation à celui de rotation), on obtient le même résultat qu'en joignant le signe $\sqrt{-1}$ au signe de ces côtés"[40].

(39) Buée, <u>ibid.</u>, p. 28.
(40) <u>ibid.</u>, pp. 28-29.

Ainsi, si nous prenons le carré ABCD, dont les côtés AB et AD représentent, par exemple, "+ 1", après chaque quart de révolution, il occupe les différentes positions suivantes (où A est pris comme centre de révolution) :

Position initiale



Plusieurs remarques s'imposent ici. La définition que donne Buée du "signe $\sqrt{-1}$" ne peut être pleinement interprétée sans introduire une notion de mouvement. En effet, lorsqu'il considère le carré ABCD (que nous prendrons de côté a), les côtés AB et AD représentent tous les deux la grandeur a ; à aucun moment il ne suppose que ceux-ci puissent représenter respectivement a et $a\sqrt{-1}$, et ce, simultanément. Par contre, c'est l'action du "signe $\sqrt{-1}$" sur la grandeur "a" qui conduit celle-ci à prendre une position perpendiculaire à celle qu'elle occupait précédemment. C'est ce "diachronisme" qui permet de donner un sens à l'expression symbolique " $\pm\sqrt{-1}$" ; le "substantif" 1 "est déterminé successivement par les "adjectifs" + (ou -) et $\sqrt{-1}$. Buée n'essaie pas de poser dès le départ un carré dont les côtés seraient porteurs du "signe $\sqrt{-1}$". En aucun cas, une telle figure ne peut prendre la première place dans la description d'un mouvement, ni donc être prise isolément. C'est sa propre définition qui implique cette contrainte, contrainte qui ôte tout caractère primitif à la "quantité imaginaire".

Buée précise plus loins que " $\sqrt{-1}$" n'est pas le

> "signe d'une <u>opération arithmétique</u>, ni d'une opération <u>arithmético-géométrique</u>, mais d'une opération purement géométrique. C'est un signe <u>purement descriptif</u>. J'appelle signe purement descriptif un signe qui indique la <u>direction</u> d'une ligne, abstraction faite de sa <u>longueur</u>"[41] .

Cette dernière précision met en relief la difficulté qu'il y a à lire et comprendre Buée. Précédemment (p. 10), nous avons vu que la "quantité imaginaire" ne pouvait être exclusivement du ressort de la "géométrie" et que seule l'"arithmético-géométrie" offrait la voie la plus adéquate pour sa légitimation. L'auteur paraît faire ici un retour sur ses précédentes affirmations et semble découvrir au fil de son explication les faiblesses de sa théorie. On se trouve, en fait, face à une interférence entre la "langue mathématique" qu'il suggère et la "géométrie" telle qu'on la comprenait et la comprend. C'est l'emploi de deux mots distincts (géométrie et descriptif) qui nous amène à formuler cette hypothèse. Si ces deux expressions verbales étaient équivalentes, sa propre phrase nous les montrent ainsi, l'une d'entre elles serait de trop et surchargerait inutilement son "stock"

(41) Buée <u>ibid.</u>, pp. 30-31.

de définitions. L'auteur marque une différence entre l'objet "idéal" que la "Géométrie" définit et l'image suggestive que l'on élabore pour la représenter (du ressort de la "qualité").

On peut regretter que Buée ait voulu à tout prix "naturaliser" le symbole " $\sqrt{-1}$" au moyen d'exemples rendant illusoire le progrès qu'il venait de réaliser :

> "Quoique la perpendicularité soit proprement la seule qualité indiquée par le signe $\sqrt{-1}$, on peut lui faire signifier, au figuré, une qualité toute différente, pourvu qu'on puisse raisonner sur cette qualité, comme on raisonnerait sur la perpendicularité même. Par exemple, si + s représente une somme possédée, et - s la même somme due, je dis que s $\sqrt{-1}$ peut représenter la même somme ni possédée ni due (...)"[42].

La tâche des comptables se complique fâcheusement et les concepts mathématiques déjà embarrassés par la "qualité" voient leur interprétation suspendue à l'alea temporel. Buée s'enfonce plus avant dans cette voie en voulant montrer à quel point l'emploi de " $\sqrt{-1}$" est pertinent pour résoudre certains problèmes posés par la vie quotidienne, tel celui de l'homme qui s'interroge sur la quantité d'argent qu'il a entre les mains : cette somme est-elle une "dette", un "gain" ou "ni possédée ni due" ? On laissera au lecteur le soin de juger l'ampleur de cette difficulté, mais en précisant néanmoins que la résolution de ce problème conduit l'auteur à définir le "produit" d'une dette par une dette et à donner une signification "opérationnelle" à l'expression, entre autres, symbolique "$\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1}$". Après avoir enrichi de nouveaux mots (ou maux) les mathématiques, Buée cherche à préciser le sens de "t $\sqrt{-1}$" lorsque la lettre t représente le "temps" ; il le trouve en attribuant au "présent", cet "indivisible" insituable entre un "passé" et un "futur" sans cesse changeants, une élasticité tirée d'ex-

---

(42) Buée, ibid., pp. 30-31.

pressions appartenant au "langage vulgaire" (comme ce jour-ci, le mois présent, la présente année..."[43]).

Il n'est pas nécessaire de pousser plus avant dans l'"Algèbre-langue" de Buée pour se rendre compte qu'une telle nouveauté devait choquer ses contemporains. Néanmoins, c'est par ce biais original qu'il reste fidèle à l'énoncé du "théorème fondamental de l'Algèbre", contrairement à L. Carnot qui s'en tenait à l'"arithmétique universelle" et qui, par conséquent, rejetait les racines négatives ou "imaginaires" d'une équation, ou à Foncenex[44] qui, dans ses "Réflexions sur les Quantités imaginaires", nous confirme qu'il connaît la représentation géométrique de $\sqrt{-1}$ (il la doit certainement à Wallis), mais précise que "si cette construction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait absolument rien connaître (...)" et conclut en ajoutant :

> "On devrait par conséquent s'attacher à les écarter [les quantités imaginaires] autant qu'il est possible des équations finales, puisque, prises dans quelque sens que ce soit, elles ne peuvent pas résoudre la question, comme les racines négatives dont toute la contradiction consiste dans leur manière d'être à l'égard des positives".

Parfois Buée met en relief certaines difficultés inhérentes aux "quantités imaginaires", mais son explication n'est pas satisfaisante, ni pertinente, car elle s'écarte trop du raisonnement mathématique. Il fait remarquer, par exemple, partant d'un triangle rectangle ABD dont l'hypothénuse est désignée par BD et les côtés par $AB = 1$ et $AD = \sqrt{-1}$ (il envisage ici un cas qui n'avait pas été traité avec le carré ABCD précédent), que le théorème de Pythagore conduit à écrire : $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 1^2 + (\sqrt{-1})^2$. Une telle égalité nous amène à poser, après simplification : $BD^2 = 0$. Buée

(43) Buée, ibid., p. 35.

(44) Buée, ibid., p. 84.

explique le paradoxe de cette égalité en disant qu'elle est "absurde":

> "C'est que le premier membre $1^2 + (\sqrt{-1})^2$ ou $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ représente une figure formée de deux carrés égaux tels que les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés correspondants de l'autre ; tandis que le second + 1 - 1 ou 0 signifie la différence de deux unités abstraites égales. Ainsi l'équation $\overline{BD}2 = 0$ peut être traduite par cette proposition : la figure $\overline{BD}2$ est égale à la différence de deux unités abstraites. Cette proposition ne renferme point de contradiction, mais elle ne présente aucun sens. Les idées qu'elle allie ne sont point opposées, mais disparates"[45].

Ainsi l'auteur a bien remarqué ce que nous avons exposé précédemment (p. 16), mais ne cherche pas à voir d'où vient la difficulté ; il se contente de la rejeter après l'avoir jugée sans intérêt.

Au paragraphe 35 de son "Mémoire", Buée apporte des résultats plus conformes à nos vues actuelles. Partant d'un carré ABCD de côté égal à A, il constate que le carré $\overline{BD}^2$ de la diagonale BD s'écrit $\overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2$, mais que celui-ci peut aussi s'exprimer sous la forme $\overline{BD}^2 = (1 + \sqrt{-1}^2)$ $(1 - \sqrt{1}^2)$. C'est de ces deux égalités qu'il déduit la proportion suivante : $1 + \sqrt{-1}^2 : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 1 - \sqrt{-1}^2$. Elle est, dit-il, "absurde" si $\sqrt{2}$ est pris avec une signification "arithmétique". C'est en voulant rétablir cette proportion géométrique et lui donner un sens correct, i.e., en voulant éviter le mélange se trouvant dans la proportion précédente entre expressions "purement descriptives" et "arithmétiques", qu'il marque un net progrès :

> "Si $\sqrt{2}$ représente $\overline{BD}$, il représente une ligne dont la direction, par rapport à $\overline{BA}$, peut être représentée de la manière suivante : soit $\sqrt{-1} = 1 \times e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ (e étant la base des logarithmes hyperboliques et π la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est 1) ; $1 \times e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ signifie la ligne $\overline{AD}$ dont la direction est $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$. De même, $\sqrt{2} \times e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$ signifiera la ligne $\overline{BD}$ dont la direction est $e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire, demi-perpendiculaire"[46].

---

(45) Buée, ibid., p. 39.
(46) Ibid., pp. 40-41.

Peu de choses manquent à l'auteur pour atteindre la représentation géométrique qui fait usage de "segments de droite orientés"[47]. C'est lui-même, à propos d'un problème de L. Carnot[48], qui limite sa découverte et s'interdit ainsi la possibilité de donner la "réalisation" géométrique précédente des "quantités imaginaires". En effet :

> "Ce n'est pas le produit des lignes $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, mais le produit de leurs valeurs arithmétiques qui résoud la question ; car un produit de lignes, c'est-à-dire un résultat de lignes multipliées par des lignes ne signifie rien. On ne demande pas une figure géométrique, mais un nombre. Or, pour avoir les valeurs arithmétiques de $\overline{EA}$, $\overline{BE}$, il faut écarter de leurs expressions les signes qui n'ont trait qu'à leurs positions. Sans cette précaution, on confondrait les signes des valeurs numériques avec des signes de position ou des signes purement descriptifs"[49].

Ainsi, bien que proche à maints égards de la représentation géométrique, Buée n'atteint pas son but. C'est paradoxalement cette même "langue algébrique" qui, propice à soulever le voile qui cachait certaines difficultés intrinsèquement liées à l'usage irraisonné de symboles trop "réalistes", empêche Buée d'être créateur dans le domaine exclusivement rattaché au problème de la représentation géométrique du nombre complexe. C'est le manque d'attention qu'il manifeste envers la nécessité de légitimer les opérations "algébriques" sur les "quantités imaginaires" qui rend dès le départ son travail trop partiel et vain. C'est le même manque de précision, malgré l'introduction de son opération "arithmético-géométrique", qui l'empêche de concevoir un nouvel objet, auquel s'appliquerait le "calcul", tel que le "segment orienté" de Wessel ou la "ligne dirigée" d'Argand (ou de Français[50], qui parlait de "droite de grandeur et de position").

A la fin de son "Mémoire", Buée donne de nouvelles illustrations

(47) Due à R.Argand et J.F.Français.

(48) L. Carnot, "La Géométrie de Position", Paris, 1803, n° 58 (note Buée).

(49) Ibid., p. 47.

(50) J.F.Français, "Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation des symboles imaginaires", in Annales de Mathématiques de Gergonne, t.IV(1813-1814), pp.61-71.

des "quantités imaginaires";cette fois-ci,il ne s'agit plus de rendre un service inappréciable au comptable,mais de venir en aide au marbrier dans sa tâche quotidienne.Le signe $\sqrt{-1}$ intervient pour expliquer la présence d'une "vide" dans un carré de marbre(ce dernier,sans que l'auteur juge opportun de le souligner,devient donc un "cadre")ou justifie l'adjonction de "faux" marbre à du "vrai"ou,enfin,représente la"largeur" d'une ligne et l'"épaisseur" d'une surface(!).

Nous ne prolongerons pas plus loin la lecture de telles explications d'où le raisonnement mathématique s'évade trop souvent pour laisser place à de nombreuses justifications peu rigoureuses;mais on n'aura sans doute pas manqué d'apprécier qu'un tel texte révèle clairement un nouvel état d'esprit. Et si de telles explications peuvent sembler déplacées ici,il convenait pourtant de les consigner pour deux,au moins deux, raisons que nous rappellerons:La première est l'originalité de ce travail[51];la seconde vient du fait,qui peut surprendre, que ce document d'une valeur mathématique très inférieure à celle de Wessel,fut comparé à l'"Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques"d'Argand;on alla même jusqu'à prétendre que son "Essai",dont la clarté est très supérieure à celle de Buée, n'était le résultat que d'un plagiat du "Mémoire" de ce dernier.

\+ + + +

(51)Le sillage de Buée n'est pas celui d'une langue mathématique formelle,i.e.,ce n'est pas celui de la"Caractéristique" de Leibniz,Lambert,etc.,c'est celui d'une sémantique de la langue naturelle.Bien que cela reste en grande partie confus,sur une base en fait sémantique Buée utilise ce que l'on appelle aujourd'hui les structures sémiotiques élémentaires,en particulier les oppositions qualitatives(que l'on trouve chez les "structuralistes")et les termes neutres. Il traite les signes d'une façon qui est presque saussurienne.Lorsque,par exemple,il parle de $\sqrt{-1}$ comme d'un signe de perpendicularité,il utilise une métaphore qui est de type "ni...ni"(Cf.,par exemple,note (42),p.21)Nous devons ce commentaire à Jean Petitot.