Y. DERRIENNIC

M. LIN

Sur la tribu asymptotique des marches aléatoires sur les groupes

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983___1_A2_0>

SUR LA TRIBU ASYMPTOTIQUE DES MARCHES ALEATOIRES SUR LES GROUPES

Y. DERRIENNIC, M. LIN

Le but de cette note est de mettre en évidence que la tribu asymptotique d'une marche aléatoire sur un groupe abélien (ou sur un groupe nilpotent discret ou de classe deux...) est toujours factorisable par la variable aléatoire qui indique la position initiale et de tirer quelques corollaires de ce résultat. En particulier on obtient ainsi l'équivalence des notions de mélange faible et de mélange complet ([1]) pour une telle marche aléatoire. Bien que les énoncés qui suivent s'obtiennent facilement à partir de résultats bien connus, ils n'apparaissent, à notre connaissance, explicitement nulle part et ils suggèrent des questions qui semblent intéressantes.

On considère donc un groupe abélien localement compact à base dénombrable G et une mesure de probabilité μ sur G. On note G_1 le plus petit sous-groupe fermé portant μ et G_2 le plus petit sous-groupe fermé portant $\mu * \hat{\mu}$ où $\hat{\mu}$ est la symétrique de μ. Le sous-groupe G_2 est le plus petit sous-groupe fermé dont une classe $(G_2\, a)$ porte μ ([6]) . On note aussi m une mesure de Haar de G ; p_i la projection canonique de G sur G/G_i, m_i une mesure de Haar de G/G_i, avec $i = 1$ ou 2. Les deux résultats suivants sont classiques :

- une fonction continue bornée f est μ-harmonique (i.e. solution de $f(x) = f * \mu(x) = \int_G f(xy)\, \mu(dy)$ si et seulement si elle a pour période tout élément de G_1 (théorème de Choquet-Deny).

- $G_2 = G$ (dans ce cas on dit que μ est strictement apériodique) si et seulement si $\lim_n \|f * \mu^n\|_{L^1(m)} = 0$ pour toute fonction f d'intégrale nulle pour m (résultat dû à Stam si $G = \mathbb{R}$).

Grâce à la correspondance canonique entre fonctions μ-harmoniques bornées et variables bornées invariantes pour la marche aléatoire de loi μ, le théorème de Choquet-Deny permet de factoriser chaque variable invariante bornée par la position initiale de la marche. Pour préciser ceci, on introduit le processus de Markov canonique $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{N}}, (X_n)_{n\geq 0}, (P_x)_{x\in G}, \theta)$ qui constitue la marche aléatoire de loi μ ; on note $\tilde{m}$ la mesure sur Ω définie par $\tilde{m} = \int_G P_x\, m(dx)$

...

et $\mathcal{J}$ la sous-tribu de $B^{\otimes\mathbb{N}}$ invariante sous θ. Alors $f \longrightarrow f\left(p_1(X_o)\right)$ est un isomorphisme entre $L^\infty(G/G_1, m_1)$ et $L^\infty(\Omega, \mathcal{J}, \tilde{m})$. Une factorisation du même type est valable pour les variables bornées asymptotiques. On note $\mathcal{A}$ la tribu asymptotique de la marche, c'est-à-dire la sous-tribu $\bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_{n+k} ; k \geq 0)$ de $B^{\otimes\mathbb{N}}$.

<u>Théorème</u> : La tribu asymptotique $\mathcal{A}$ est factorisable par la position initiale X_o. Plus précisément, l'application $f \longrightarrow f\left(p_2(X_o)\right)$ est un isomorphisme entre $L^\infty(G/G_2, m_2)$ et $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{m})$.

Démonstration : La mesure μ étant portée par la classe $(G_2\, a)$, on vérifie immédiatement que, pour tout n, $f\left(p_2(X_o)\right) = f\left(p_2(X_n\, a^{-n})\right)$ $\tilde{m}$ pp. Donc $f\left(p_2(X_o)\right)$ définit bien une variable aléatoire asymptotique bornée mod. $\tilde{m}$. Comme $m_2 \sim p_2(m) = p_2\left(X_o(\tilde{m})\right)$ cette application est injective et elle préserve manifestement la structure d'espace L^∞. Pour obtenir la surjectivité on applique le théorème de Choquet-Deny à la marche aléatoire espace-temps. Celle-ci est définie sur le groupe $G \times \mathbb{Z}$ par la mesure $\mu \otimes \delta_1$ (où δ désigne les mesures de Dirac). Le plus petit sous-groupe fermé de $G \times \mathbb{Z}$ portant $\mu \otimes \delta_1$ est égal à $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2\, a^k \times \{k\})$.
Etant donnée une variable asymptotique bornée Y, il lui correspond une fonction $(\mu \otimes \delta_1)$-harmonique bornée définie par

$$h(x, n) = \int_\Omega Y(\theta^n)\, d P_x$$

et $\lim_n h(X_n, n) = Y$ $\tilde{m}$ p.p. ([6]). D'après le théorème de Choquet-Deny h est factorisable par le sous-groupe $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2\, a^k \times \{k\})$; donc h s'écrit :
$h(x, n) = g\left(\bar{p}_2(x\, a^{-n})\right)$ où g est définie sur G/G_2. Comme $p_2(X_n) = p_2(X_o)\, p_2(a)^n$ $\tilde{m}$ p.p., on obtient pour tout n, $h(X_n, n) = g\left(p_2(X_n\, a^{-n})\right) = g\left(p_2(X_o)\right)$ $\tilde{m}$ p.p. et donc $Y = g\left(p_2(X_o)\right)$ $\tilde{m}$ p.p.

<u>Corollaire 1</u> : Pour tout $u \in L^1(G, m)$

$$\lim_n \|u * \mu^n\|_{L^1(m)} = \sup \left\{ \int_G u.\, g(p_2)\, dm \;;\; g \in L^\infty(G/G_2, m_2),\ \|g\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Démonstration : il est clair que $\|u * \mu^n\|_{L^1(m)} = \|u * \hat{\mu}^n\|_{L^1(m)}$
D'après [3], $\lim_n \|u * \hat{\mu}^n\|_{L^1(m)}$ est la variation totale de la mesure $\int_G P_x\, u(x)\, m(dx)$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'identification de $\mathcal{A}$ fournie par le théorème donne alors le corollaire.

...

Corollaire 2 : Pour $f \in L^1(G, m)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_n ||f * \mu^n||_{L^1(m)} = 0$

ii) pour tout caractère γ de G vérifiant $|\int_G \gamma(x)\, \mu(dx)| = 1$ alors $\int_G \gamma(x)\, f(x)\, m(dx) = 0$

Démonstration : Si $|\int_G \gamma(x)\, \mu(dx)| = 1$, γ est constant sur le support de μ, donc γ égale 1 sur G_2 et $\gamma = \bar{\gamma}\,(p_2)$ où $\bar{\gamma}$ est un caractère de G/G_2. Si $\lim_n ||f * \mu^n||_1 = 0$ on a en vertu du corollaire 1 :

$$\int_G f(x)\, \bar{\gamma}\left(p_2(x)\right)\, m(dx) = \int_G f(x)\, \gamma(x)\, m(dx) = 0$$

Réciproquement si ii) est vrai, pour tout caractère $\bar{\gamma}$ de G/G_2; $\int_G \bar{\gamma}\left(p_2(x)\right) f(x)\, m(dx) = 0$. Comme les combinaisons linéaires des caractères de G/G_2 sont $\sigma(L^\infty, L^1)$ denses dans la boule unité de $L^\infty(G/G_2, m_2)$, on obtient la même égalité avec $\bar{\gamma}$ remplacé par un élément quelconque de $L^\infty(G/G_2, m_2)$. Le corollaire 1 donne alors $\lim_n ||f * \mu^n||_{L^1} = 0$

Remarque : Le corollaire précédent a été prouvé dans [4] en utilisant le théorème de synthèse spectrale. La démonstration donnée ici évite l'usage de ce théorème mais fait appel au théorème de convergence des martingales.

Corollaire 3 : Pour l'opérateur de convolution par μ les propriétés de mélange complet et de mélange faible sont équivalentes. Autrement dit, il y a équivalence entre :

i) pour tout u d'intégrale nulle dans $L^1(G, m)$

$\lim_n ||u * \hat{\mu}^n||_1 = 0$ (mélange complet).

ii) pour tout u d'intégrale nulle dans $L^1(G, m)$

$$\lim_n \sup_{||f||_\infty \leq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_G f(x)\, (u * \hat{\mu}^i)(x)\, m(dx)\right] = 0$$

(mélange faible).

...

Démonstration : D'après le "théorème du mélange faible" de [1] le mélange faible implique l'ergodicité, donc ici $G_1 = G$, et l'absence de valeur propre unimodulaire distincte de 1 correspondant à des fonctions propres bornées. Or un caractère γ de G/G_2 induit une fonction propre $\gamma\ (p_2)$ associée à la valeur propre $\gamma\left(p_2\ (a)\right)$. Le mélange faible implique donc $G_2 = G$, et le mélange complet résulte alors du corollaire 1.

Considérons maintenant le cas où G n'est plus nécessairement abélien. Pour simplifier, supposons désormais μ adaptée c'est-à-dire que $G_1 = G$. Pour que la conclusion du théorème reste valable il est tout d'abord nécessaire de disposer d'une version du théorème de Choquet-Deny pour μ ; en effet, s'il existe des μ-harmoniques bornées non constantes, μ étant supposée adaptée, la marche est transitoire et il est impossible de factoriser les variables invariantes par X_o donc a fortiori les asymptotiques. Si l'on sait que les μ-harmoniques bornées sont constantes, on peut chercher à appliquer la méthode décrite ci-dessus pour factoriser les asymptotiques. Pour cela on a besoin du résultat algébrique suivant.

<u>Lemme</u> : Si μ est adaptée sur G, le plus petit sous-groupe fermé de $G \times \mathbb{Z}$ portant la mesure $\mu \otimes \delta_1$ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2\ a^k \times \{k\})$
où G_2 est le plus petit sous-groupe distingué fermé de G dont une classe porte μ et où $G_2 a$ est la classe de G_2 qui porte μ.

Démonstration : G_2 étant distingué et fermé, on vérifie très simplement que $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2\ a^k \times \{k\})$ est un sous-groupe fermé de $G \times \mathbb{Z}$ qui porte $\mu \otimes \delta_1$.

Supposons qu'un autre sous-groupe fermé de $G \times \mathbb{Z}$ porte $\mu \otimes \delta_1$. Il est de la forme $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (H_k \times \{k\})$. H_o est un sous-groupe fermé de G.

Pour chaque k, H_k est une classe de H_o. Si $H_1 = H_o\ a_1$ alors $H_{-1} = a_1^{-1}\ H_o$ et $a_1^{-1}\ H_o\ a_1 = H_o$ d'où $H_k = H_o\ a_1^k$ pour tout entier k. Si $H_1 = a_1 H_o$ le résultat est le même. La mesure μ est portée par $H_1 = H_o a_1$. Pour conclure, il

...

suffit de prouver $G_2 \subset H_o$, donc il suffit de prouver que H_o est distingué. Or $\{x \in G \mid x H_o = H_o x\}$ est un sous-groupe fermé de G qui porte μ car il contient $H_o a_1$. Comme μ est adaptée, ce sous-groupe est G donc H_o est distingué.

Dans le cas non abélien, ceci justifie la restriction imposée à G_2 d'être distingué. Pour montrer que les asymptotiques bornées sont exactement de la forme $f\left(p_2(X_o)\right)$ mod. $\tilde{m}$ avec $f \in L^\infty(G/G_2, m_2)$, sous l'hypothèse que les μ-harmoniques bornées sont constantes, il suffirait de prouver que les $\mu \otimes \delta_1$-harmoniques bornées sont aussi constantes sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2 a^k \times \{k\})$, car alors, grâce au lemme, la démonstration donnée ci-dessus s'appliquerait encore. Nous ne savons pas prouver cette propriété. Mais dans chacun des cas suivants où il est connu que les μ-harmoniques bornées sont constantes, le résultat est vrai :

- G est nilpotent discret ou de classe 2 ([5]) ; alors $G \times \mathbb{Z}$ et $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2 a^k \times \{k\})$ sont de même nature que G.

- G est nilpotent quelconque et μ est étalée ou a un moment fini ([5]); alors $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (G_2 a^k \times \{k\})$ est nilpotent et $\mu \otimes \delta_1$ vérifie la même propriété que μ.

- G est discret et μ est d'entropie nulle ([2]) ; alors il est évident que $\mu \otimes \delta_1$ est aussi d'entropie nulle.

- la marche de loi μ est récurrente sur G, alors le résultat est bien connu ([6]), exercice 2.19 p. 172).

Dans chacun de ces cas le théorème et le corollaire 1 énoncés ci-dessus restent donc vrais.

...

1 - J. AARONSON, M. LIN, B. WEISS : Mixing properties of Markov operators.
Israel, J. of M. 33, n° 3-4, 1979, 198-224.

2 - A. AVEZ : Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentiell
CRAS, t. 279, sér. A, 1974, 25-28.

3 - Y. DERRIENNIC : Lois "zéro ou deux".
Ann. I.H.P. Vol. XII n° 2, 1976, 111-129.

4 - S. FOGUEL : On iterates of convolutions.
Proc. Amer. Mat. Soc. Vol. 47 n° 2, 1975, 368-370.

5 - Y. GUIVARC'H : Croissance polynomiale et périodes.
Bull. S.M.F. 101, 1973, 333-379.

6 - D. REVUZ : Markov Chains
North Holland Pub.

Y. Derriennic : Département de Mathématiques - Faculté des Sciences
6, avenue Le Gorgeu - 29283 BREST

M. Lin : Department of Mathematics - Ben Gurion University
Beer Sheva - Israel