JEAN MEMIN

Théorèmes limites pour les processus ponctuels

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1984, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1984___1_A4_0>

THEOREMES LIMITES POUR LES PROCESSUS PONCTUELS

Jean MEMIN
U.E.R. de Mathématiques & Info.
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

On se propose de donner, dans cet exposé, différents résultats de comportements limites d'un processus ponctuel (ou d'une suite de processus ponctuels) en terme de comportements du compensateur prévisible (ou de la suite de compensateurs) associé(s) .

Trois thèmes sont abordés :

a) loi forte des grands nombres pour $\frac{N_t}{A_t}$ lorsque $t \uparrow \infty$,

b) convergence en loi d'une suite de processus ponctuels vers la loi d'un processus ponctuel à accroissements indépendants.

c) distance en variation de deux lois de processus ponctuels et application.

Les énoncés simples obtenus sont, en fait, des cas particuliers de théorèmes limites pour les semi-martingales ; ces résultats récents sont dûs notamment à Brown, Jacod, Kabanov, Lepingle, Liptser, Mémin et Shiryayev.

1 . Notations et Rappels

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une famille continue à droite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (filtration de $\mathcal{F}$) ; les processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ considérés sont indexés par $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. La tribu des prévisibles définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ est la tribu engendrée par les processus $\mathcal{F}_t$ -adaptés et continus à gauche ; on conviendra qu'un processus est croissant s'il est $\mathcal{F}_t$-adapté, et si chaque trajectoire est croissante et continue à droite ; un processus à variation finie est la différence de deux processus croissants. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$; les seules martingales sur l'espace de base $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ que nous utiliserons sont à variations finie. X étant un processus, si la $\lim_{t \uparrow \infty} X_t$ existe au sens presque sûr, on notera X_∞ cette limite.

Etant donné un processus à variation finie A localement intégrable, il existe un processus à variation finie prévisible unique (à l'indistinguabilité près) $\tilde{A}$ tel que $A - \tilde{A}$ soit une martingale locale; $\tilde{A}$ est le compensateur prévisible de A, $\tilde{A}$ est localement intégrable et en tout t $\quad \Delta\tilde{A}_t = E\ [\Delta A_t \mid \mathcal{F}_{t-}]$, où $\Delta\tilde{A}_t = \tilde{A}_t - \tilde{A}_{t-}$ (resp : $\Delta A_t = A_t - A_{t-}$) avec $A_{t-} = \lim_{s \uparrow t} A_s$. On note $H.A_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega)\, dA_s(\omega)$ l'intégrale de Stieltjes définie "trajectoire par trajectoire" relativement à la mesure $dA_t(\omega)$ sur $\mathbb{R}^+$ muni de sa tribu borélienne $B_{\mathbb{R}^+}$. Lorsque H est un processus prévisible localement borné, et lorsque A est localement intégrable, le processus $H.A$ est à variation finie, localement intégrable et son compensateur prévisible est $H.\tilde{A}$; ainsi en notant $M = A - \tilde{A}$ $H.M = H.A - H.\tilde{A}$ est une martingale locale.

Soit X un processus à variation finie avec $X_0 = 0$, il existe une solution unique à l'équation différentielle :

$$(1) : \begin{cases} Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}\, dX_s \\ Y_0 = 1 \end{cases}$$

donnée par l'expression explicite :

$$(2) : \quad Y_t = \exp(X_t) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) \exp(-\Delta X_s)$$

on notera $\qquad Y_t = \mathcal{E}(X)_t$.

Si X est une martingale locale $\mathcal{E}(X)$ en est une aussi ; si de plus $\Delta X > -1$ $\mathcal{E}(X)$ est positif, de sorte que $\mathcal{E}(X)$ est une martingale locale positive donc une surmartingale positive

Pour toute ces notions, on peut se rapporter à Brémaud [2] Dellacherie-Meyer [4] , Jacod [5] , Liptser-Shiryayev [13], Métivier-Pellaumail [15] .

2 . Le cas des processus ponctuels

Un processus ponctuel N défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ (noté quelquefois (N,P)) est un processus croissant, nul en 0, dont chaque trajectoire est constante par morceaux et dont l'amplitude des sauts est 1. Pour chaque $t < \infty$, on a donc $P\,[N_t = \infty] = 0$: on dit que le temps d'explosion du processus est infini ; on pourrait considérer des processus ponctuels plus généraux à temps d'explosion fini, l'étude serait analogue.

Un tel processus ponctuel est localement borné, on peut donc définir son compensateur prévisible A avec pour tout t $\Delta A_t \leq 1$.
$M = N - A$ est une martingale locale, localement de carré intégrable et le processus croissant prévisible $\langle M,M \rangle$ associé à la sous-martingale locale M^2 est tel que $\langle M,M \rangle_t = \int_0^t (1 - \Delta A_s)\, dA_s$.

Le processus de poisson d'intensité λ fournit l'exemple le plus commun des processus ponctuels ; en considérant la filtration "naturelle" $(\mathcal{F}_t)$ où $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s, s \leq t\}$, son compensateur prévisible A est tel que $A_t = \lambda t$.

Un autre exemple très simple est celui d'un processus ponctuel à un seul saut : soit T une variable aléatoire positive définie sur (Ω, F, P), et $N_t = \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$, notant $\mathcal{F}_t = \sigma\{T \wedge t\}$ et F la fonction de répartition de T, le compensateur prévisible A de N est donné par la formule :

$$(3) \qquad A_t = \int_0^{T \wedge t} \frac{dF(x)}{1-F(x)_-} .$$

Le résultat de décomposition multiplicative qui suit est la clé de nombreuses applications.

Théorème 1 : [6]

Soit N *un processus ponctuel de compensateur prévisible* A ; *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *on a la formule de décomposition suivante :*

$$(4) : \exp(\lambda N_t) = \mathcal{E}(M^\lambda)_t\ \mathcal{E}(A^\lambda)_t ,$$

où A^λ *est le processus défini par* $A_t^\lambda = (e^\lambda - 1) A_t$ *et où* M^λ *est la martingale locale* $\dfrac{(e^\lambda-1)}{1+(e^\lambda-1)\Delta A} . (N-A)$.

Une telle décomposition multiplicative avec une martingale locale positive et un processus à variation prévisible est unique.

Résumé de la démonstration :

a) on vérifie par identification la formule (4) ; on remarque que $\Delta M^{\lambda} > -1$ de sorte que $\mathcal{E}(M^{\lambda})$ est une martingale locale positive donc une surmartingale.

b) si l'on a deux décompositions $\exp(\lambda N) = L^1 V^1 = L^2 V^2$, on en déduit que pour tout t $\int_0^t V_s^1 \, dL_s^1 = \int_0^t V_s^2 \, dL_s^2$ et aussi pour $s \leq t$ $L_{s-}^1 V_s^1 = L_{s-}^2 V_s^2$; on a alors :

$$\int (L_{s-}^1 V_s^1)^{-1} V_s^1 \, dL_s^1 = \int (L_{s-}^1)^{-1} dL_s^1 = \int (L_{s-}^2)^{-1} dL_s^2$$

en notant B ce processus, on a $L^1 = \mathcal{E}(B) = L^2$ d'où l'unicité.

Le théorème suivant, cas particulier d'un théorème dû à B. Grigélionis, caractérise les processus ponctuels à accroissements indépendants.

Théorème 2 : [5]

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus ponctuel soit à accroissements indépendants est que son compensateur prévisible soit déterministe (indépendant de ω).

□

La démonstration est élémentaire en appliquant le théorème 1.

a) condition suffisante : soit $\lambda > 0$, pour tout s,t $s \leq t$ on a :

$$E\left[e^{-\lambda(N_t - N_s)} \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathcal{E}(A^{-\lambda})_t \left(\mathcal{E}(A^{-\lambda})_s\right)^{-1} = E\left[e^{-\lambda(N_t - N_s)} \right]$$

b) condition nécessaire : $\left(\exp(-\lambda N_t)(E[\exp(-\lambda N_t)])^{-1}\right)_{t \geq 0}$ est une martingale positive ; ceci montre, d'après la propriété d'unicité de la décomposition du théorème 1 que $\mathcal{E}(A^{-\lambda})_t = E[\exp(-\lambda N_t)]$ d'où le caractère déterministe de A.

3 . Comportements comparés à l'infini d'un processus ponctuel et de son compensateur prévisible

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le théorème suivant où l'on obtient des propriétés du type : loi forte des grands nombres pour les processus ponctuels et lemme de Borel-Cantelli généralisé :

Théorème 3 : [11]

Soit N *un processus ponctuel,* A *son compensateur prévisible,* M = N - A.

a) $\{N_\infty < \infty\} = \{A_\infty < \infty\}$

b) soit H *un processus prévisible localement borné, on a l'inclusion :*

$\{(H.M)_{t \in \mathbb{R}^+}$ *converge lorsque* $t \uparrow \infty$ *vers une limite finie* $\}$
$\subset \{H^2.\langle M,M\rangle_\infty < \infty\}$

c) sur l'ensemble $\{A_\infty = \infty\}$ *on a*

$$\frac{N_t}{A_t} \xrightarrow{p.s} 1$$

□

Commentaire :

Le a) est immédiat en utilisant les temps d'arrêt

$T_n = \inf\{t = A_t \geq n\}$ (resp : $S_n = \inf\{t : N_t \geq n\}$) ;

pour chaque n, $(N_{t \wedge T_n} - A_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ (resp : $(N_{t\wedge S_n} - A_{t\wedge S_n})_{t \geq 0}$)

est une martingale uniformément intégrable qui converge donc presque sûrement vers une limite finie, l'hypothèse $A_\infty < \infty$ (resp : $N_\infty < \infty$) permet de conclure.

La démonstration de b) est analogue en localisant le processus $H^2.\langle M,M\rangle$ par une suite de temps d'arrêt T_n telle que $T_n \uparrow \infty$ et $(H^2.\langle M,M\rangle_{T_n \wedge t})_{t \geq 0}$ soit borné.

Pour la démonstration du c), on utilise le lemme (de type Kronecker) suivant :

Lemme 4 : [11]

Soit Z *une martingale locale,* A *un processus croissant prévisible tel que* $A_\infty = \infty$.

Si $\left(\int_0^t \frac{dZ_s}{1+A_s}\right)_{t \geq 0}$ *converge p.s vers une limite finie lorsque* $t \uparrow \infty$ $\quad \frac{Z_t}{A_t} \xrightarrow{p.s} 0 \quad (t \uparrow \infty)$ □

Le point c) *est obtenu alors en appliquant le lemme 4 à* $Z_t = N_t - A_t$, *et en utilisant* b) *pour montrer la convergence de* $\left(\int_0^t \frac{d Z_s}{1+A_s}\right)_{t \geq 0}$.

Théorème 5 : (majoration exponentielle) [16]

Soit $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ *on a*

$$P[N_T \geq \alpha(1+\varepsilon) T] \leq P[A_T > \alpha T] + \exp[-T\alpha((1+\varepsilon) \operatorname{Log}(1+\varepsilon) - \varepsilon)] \; \square$$

Commentaire :

Utilisant la décomposition multiplicative (4) avec $\lambda > 0$, on montre que $\exp(\lambda N - (e^\lambda - 1) A)$ est une surmartingale positive de valeur initiale 1. Utilisant l'inégalité de Doob pour les surmartingales, on obtient :

$$P[N_T \geq \alpha(1+\varepsilon) T] \leq P[A_T > \alpha T] + \exp[-\alpha T(\lambda(1+\varepsilon)-(e^\lambda-1))] \; ;$$

la fonction $\Phi(\lambda) = (1+\varepsilon)\lambda - (e^\lambda - 1)$ atteignant son maximum lorsque $\lambda = \operatorname{Log}(1+\varepsilon)$, on a le résultat annoncé.

Remarque 6 :

Lorsque N est un processus de Poisson d'intensité μ on a une inégalité dans l'autre sens et on obtient le résultat des grandes déviations :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{Log} P[N_T > \mu(1+\varepsilon) T] = -\mu((1+\varepsilon) \operatorname{Log}(1+\varepsilon) - \varepsilon).$$

-. Convergence en loi d'une suite de processus ponctuels vers un processus ponctuel à accroissements indépendants.

Dans ce paragraphe on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une suite (N^n) de processus ponctuels associés à une suite de filtrations $(\mathcal{F}_t^n)$ de $\mathcal{F}$; on note (A^n) la suite des compensateurs prévisibles et $(N, (\hat{\mathcal{F}}_t))$ un processus ponctuel à accroissements indépendants, donc de compensateur déterministe A d'après le théorème 2.

D désigne un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^+$ dense dans $\mathbb{R}^+$, contenant o. La notation $N^n \xrightarrow{\mathcal{L}(f,D)} N$ désigne la convergence des distributions finies suivant D de N^n vers celles analogues de N ; c'est-à-dire : pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $t_1, t_2, \dots t_p$ éléments de D on a convergence en loi du vecteur $(N^n_{t_1},\dots,N^n_{t_p})$ vers $(N_{t_1},\dots,N_{t_p})$; la notation $X^n \xrightarrow{P} X$ désigne la convergence en probabilité.

Théorème 7 : [9]

Sous les hypothèses suivantes :

(*i*) *pour tout* $t \in D$, $A^n_t \xrightarrow{P} A_t$

(*ii*) *pour tout* $t \in D$ $\sum_{s\leq t} (\Delta A^n_s)^2 \xrightarrow{P} \sum_{s\leq t} (\Delta A_s)^2$

on a alors la convergence $N^n \xrightarrow{\mathcal{L}(f,D)} N$ □

Commentaire :

La démonstration est conduite en trois étapes :

1ère étape [6] Sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème 7, on a (iii) : pour tout $t \in D$, pour tout $\lambda < o$

$$\mathcal{E}((e^\lambda-1)\ A^n)_t \xrightarrow{P} \mathcal{E}((e^\lambda-1)\ A)_t.$$

2ème étape : Sous (iii), et sous l'hypothèse (h) : il existe K tel que pour tout n, $A^n_\infty \leq K$

on a alors $N^n \xrightarrow{\mathcal{L}(f,D)} N$

3ème étape : On relache l'hypothèse de bornitude (h) de la 2ème étape. L'idée de la démonstration est de montrer la convergence $N^n \xrightarrow{\mathcal{L}(f,D)} N$ à partir de la convergence des transformées de Laplace associées aux p-uplets $(N^n_{t_1}, N^n_{t_2},\dots, N^n_{t_p})$ cette dernière convergence étant obtenue sous les hypothèses (iii) et (h) en utilisant la décomposition multiplicative (4).

En fait le théorème 7 donne un résultat de convergence (fonctionnelle) en loi, au sens de la convergence des lois des processus ponctuels sur l'espace $\mathbb{D}([o,\infty[\,,\mathbb{R})$ des applications de $[o,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continues à droite, limitées à gauche, munies de la topologie de Skorokhod qui en fait un espace métrique, séparable et complet (voir Billingsley [1] pour $\mathbb{D}([o,1],\mathbb{R})$ ou Lindvall [11] pour $\mathbb{D}([o,\infty[\,,\mathbb{R})$).

Théorème 8 : [7]

Pour qu'une suite (N^n) *de processus ponctuels converge en loi vers un processus ponctuel* N, *il faut et il suffit que cette suite converge au sens des distributions finies sur une partie dense de* $\mathbb{R}^+$.

Remarque :

Avec les données du théorème 7, si l'on a continuité de $t \longrightarrow A_t$, la conclusion de ce théorème tient sous la seule hypothèse (i) ; ce résultat antérieur est dû à Brown [3].

5. Distance en variation des lois de deux processus ponctuels.

Soit deux processus ponctuels N^1, N^2 définis sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{P})$ relativement aux filtrations $(\overline{\mathcal{F}}_t^1)$, $(\overline{\mathcal{F}}_t^2)$ de $\overline{\mathcal{F}}$ avec $\overline{\mathcal{F}}_t^1 = \sigma\{N_s^1,\ s\leq t\}$, $\overline{\mathcal{F}}_t^2 = \sigma\{N_s^2,\ s\leq t\}$. On désire évaluer la proximité des lois de N^1 et N^2 lorsque t varie de o à un instant $T \in \overline{\mathbb{R}}^+$ fixé. Une façon d'aborder ce problème est de considérer un espace $(\Omega,\mathcal{F})$ canonique, muni d'une filtration canonique $(\mathcal{F}_t)$, sur lequel on puisse représenter N^1 et N^2. Plutôt que l'espace (trop gros) $\mathbb{D}([o,\infty[,\mathbb{R})$ de Skorokhod, on prendra pour Ω l'espace de toutes les fonctions $\omega(t)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{N}$ continues à droite, croissantes, constantes par morceaux, nulles en o, n'ayant que des discontinuités d'amplitude 1, prenant des valeurs entières finies pour tout $t<\infty$; on note N le processus canonique $N_t(\omega) = \omega(t)$; $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle définie par $\mathcal{F}_t = \sigma\{N_s,\ s\leq t\}$ et $\mathcal{F} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$.
Soit P_1 (resp P_2) la probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$ image de $\overline{P}$ par N^1 (resp : N^2) ; P_1 et P_2 représentent les lois de N^1 et N^2. (N,P_1) et (N,P_2) sont sur $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t))$ les processus ponctuels correspondant à $(N^1,\overline{P})$, $(N^2,\overline{P})$ sur $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},(\overline{\mathcal{F}}_t^1))$ et $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},(\overline{\mathcal{F}}_t^2))$. Soit A^1 et A^2 les compensateurs prévisibles respectifs de (N,P_1) et (N,P_2). Comme évaluation de la proximité des lois de N^1 et N^2 entre o et T, on prend la distance en variation sur l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$ des restrictions des probabilités P_1 et P_2 à $\mathcal{F}_T$:

$$d(P_1,P_2)_{[o,T]} = \sup_{F\in \mathcal{F}_T} [\,|P_1(F) - P_2(F)|\,]$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 9 : [10] , [14]

Soit $T \in \overline{\mathbb{R}}^+$, *on suppose qu'il existe une constante* K *telle que l'on ait pour tout* $t \leq T$ *et* $\omega \in \Omega$ $A_t^1(\omega) \leq K$, $A_t^2(\omega) \leq K$.

On a alors :

$$d(P_1,P_2)_{[o,T]} \leq E_{P_1} [\mathrm{Var}(A^1 - A^2)_T] \wedge E_{P_2} [\mathrm{Var}(A^1 - A^2)_T] .$$

(E_{P1}, E_{P2} *désignent les espérances relatives à* P_1, P_2 ; $\mathrm{Var}(A^1 - A^2)$ *désigne le processus* "variation totale de $A^1 - A^2$"). □

Commentaire :

La méthode de démonstration consiste à exhiber une suite de probabilités (Q^p) sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ qui dominent les restrictions P_1^T, P_2^T de P_1 et P_2 à $(\Omega, \mathcal{F}_T)$; notant Z_T^1, Z_T^2 les densités de Radon-Nikodym $\dfrac{d\,P_1^T}{d\,Q^p}$ et $\dfrac{d\,P_2^T}{d\,Q^p}$ on a la relation classique :

$$d(P_1,P_2)_{[o,T]} = \frac{1}{2} E_{Q^p} [\,|Z_T^1 - Z_T^2|\,]$$

A partir des formules donnant Z_T^1, Z_T^2 ([2],[5],[8]) et en utilisant le calcul stochastique, on obtient l'inégalité voulue.

Une majoration un peu meilleure a été obtenue récemment par Kabanov-Liptser-Shiryayev [18]

Théorème 10 : ([18])

On a l'inégalité

$$d(P_1,P_2)_{[o,T]} \leq 2(E_{P_1} [H_T^2(A^1,A^2)] \wedge E_{P_2} [H_T^2(A^1,A^2)])$$

où $$H_T^2(A^1,A^2) = \frac{1}{2} \int_o^T (\sqrt{\lambda_s^1} - \sqrt{\lambda_s^2})^2\, d\overline{A}_s + \frac{1}{2} \sum_{s\leq t} (\sqrt{1-\Delta A_s^1} - \sqrt{1-\Delta A_s^2})^2$$

$\overline{A}$ étant un processus croissant dominant en tant que mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ A^1 et A^2 ; par exemple $\overline{A} = A^1 + A^2$ convient, λ_s^1 et λ_s^2 sont alors respectivement $\dfrac{dA_s^1}{d\overline{A}_s}$, $\dfrac{dA_s^2}{d\overline{A}_s}$.

Remarque [18] : On peut également obtenir une minoration de la distance $d(P_1,P_2)_{[o,T]}$ en termes de processus $H(A^1,A^2)$

$$1 - (E_{P_1} [\mathcal{E}_T(-H^2(A^1,A^2))] \wedge E_{P_2} [\mathcal{E}_T(-H^2(A^1,A^2))])$$

$$\leq d(P_1,P_2)_{[o,T]}$$

6. Application : approximation d'un processus ponctuel empirique par un processus de Poisson.

Soit $X_1, X_2 \ldots X_n \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, positives, de même loi, de fonction de répartition F, admettant une densité f avec $f(o) \neq o$.

Soit $\overline{N}^n$ le processus ponctuel empirique défini par $\overline{N}^n_t = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{\{X_i \leq t\}}$ et $(\overline{\mathcal{F}}^n_t)$ la famille des filtrations avec $\overline{\mathcal{F}}^n_t = \sigma\{X_i \wedge t, \; i = 1 \ldots n\}$.

Utilisant la formule (3) et l'indépendance des X_i, on obtient pour le compensateur prévisible $\overline{A}^n$ du processus $\overline{N}^n$ la relation :

$$\overline{A}^n_t = \sum_{i=1}^{n} \int_o^{t \wedge X_i} \frac{f(x)\,dx}{1 - F(x)}.$$

On normalise maintenant $\overline{N}^n$ (en n) en posant :

$N^n_t = \overline{N}^n_{t/n}$, et on pose également $\tilde{\mathcal{F}}^n_t = \overline{\mathcal{F}}^n_{t/n}$;

le compensateur A^n de N^n est alors donné par :

$$A^n_t = \sum_{i=1}^{n} \int_o^{t/n \wedge X_i} \frac{f(x)\,dx}{1 - F(x)}.$$

Soit P_n la loi de N^n (dans l'espace canonique $(\Omega,\mathcal{F})$), $\tilde{P}_n$ la loi du processus ponctuel de Poisson de compensateur $\tilde{A}^n$ avec $\tilde{A}^n_t = n\,F(t/n)$; utilisant le théorème 10, on obtient

Théorème 11 :

a) *pour une certaine constante* K , *pour* n *assez grand et pour chaque* $t > 0$

$$K \frac{f^2(o)\, t^2}{n^2} \leq d(P^n,\tilde{P}^n)_{[o,t]} \leq 2f(o)\, t/n$$

$K = \frac{1}{144}$ *convient.*

b) si $\hat{P}$ *désigne la loi de processus ponctuel de poisson homogène d'intensité* $\lambda = f(o)$; *pour chaque* $t \in \mathbb{R}^+$, $d(P^n,\hat{P})_{[o,t]} \to 0$ *lorsque* $n \uparrow \infty$.

c) si la dérivée en 0 *à droite de* f *existe, on a :*

$$d(P^n,\hat{P})_{[o,t]} \leq \frac{2}{n}\left(f(o)t + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{|f'(o)|}{f(o)^{1/2}}\ t^{3/2}\right).$$

Ce résultat est démontré dans [19] ; il reprend des énoncés proches dus à H. Rost [17] qui avait utilisé une autre estimation pour la distance en variation de processus ponctuels.

REFERENCES :

[1] P. BILLINGSLEY : Convergence of probability measures J. Wiley and sons : New-York (1968).

[2] P. BREMAUD : Point processes and queues (martingale dynamics) Springer-Verlag - Berlin-Heidelberg-New-York (1981).

[3] T. BROWN : A martingale approach to the poisson convergence of simple point processes. Ann. of Proba, 6, 615-628 (1978).

[4] C. DELLACHERIE - P.A. MEYER : Probabilités et potentiels Herman - Paris, Tome 1 (1976), Tome 2 (1980).

[5] J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. n° 714, Springer-Verlag (1979).

[6] J. JACOD - J. MEMIN : Sur la convergence des semi-martingales vers un processus à accroissements indépendants. Sém. Proba. n° 14 - Lect. Notes in Math. 784, Springer-Verlag (1980).

[7] J. JACOD - J. MEMIN : Un nouveau critère de compacité relative pour une suite de processus : Sém. de Proba. Univ. Rennes (1979).

[8] Y. KABANOV - R. CH LIPTSER - A.N. SHIRYAYEV : Absolue continuité et singularité de deux probabilités localement absolument continues. Mat. Sbornik n° 108, 1 Moscou (1979).

[9] Y. KABANOV - R.CH. LIPTSER - A.N. SHIRYAYEV : Some limit theorems for simple point processes (a martingale approach) Stochastics, vol 3, 3 203-216 (1980).

[10] Y. KABANOV - R.CH. LIPTSER : On convergence in variation of the distribution of multivariate point processes - preprint 1982. A paraître in Z. für Wahrsch.

[11] D. LEPINGLE : sur le comportement asymptotique des martingales locales : Sém. Prob. 12 ; Lect. Notes 649 - Springer-Verlag (1978).

[12] T. LINDVALL : Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $\mathbb{D}[o,\infty[$. J. Appl. Proba. n° 10, 109-121 (1973).

[13] R.CH.LIPTSER - A.N. SHIRYAYEV : Statistics of stochastic processes Springer-Verlag (1977).

[14] J. MEMIN : Distance en variation et conditions de contiguité pour des lois de processus ponctuels. Sém. de Proba. Univ. de Rennes (1981).

[15] M. METIVIER - J. PELLAUMAIL : Stochastic Integration Academic Press - New-York 1980.

[16] F. PORTAL - A. TOUATI : Grandes déviations pour les mesures aléatoires - preprint (1982).

[17] H. ROST : Diffusion de lignes dures sur la droite réelle : comportement macroscopique et équilibre local. Preprint (1983).

[18] Y. KABANOV, R. CH. LIPSTER, A.N. SHIRYAYEV : On the variation distance for probability measures defined on a filtered space. (à paraitre aux Z. W. (1985)).

[19] J. MEMIN : Convergence in distribution, convergence in variation (some examples of martingale approach). (à paraitre : Actes des 5e rencontres Franco-Belges de Statistique : Editions des Facultés Universitaires Saint-Louis (Bruxelles).