UNE INEGALITE DE LOJASIEWICZ EFFECTIVE

Pablo SOLERNO
IAM
Viamonte 1636
(1055) Buenos Aires ARGENTINE

INTRODUCTION

Dans ce travail, on présente une version quantitative de l'inégalité de Łojasiewicz, pour le cas de fonctions semi-algébriques continues définies sur un ensemble semi-algébrique fermé et borné.

Le résultat s'obtient en combinant la démonstration qui se trouve dans [BCR] (Th.2.6.6) avec des bornes apparaissant à partir de l'algorithme d'élimination des quantificateurs développé dans [HRS 1] ou [HRS 2].

Comme conséquence de cette inegalité de Łojasiewicz, on obtient aussi une version du lemme de finitude avec des bornes pour les degrés des polynomes.

Dans le cas des corps algébriquement clos il est possible d'obtenir une estimation similaire pour l'inégalité de Łojasiewicz (voir [JS] et [K]).

NOTATIONS ET DEFINITIONS

K est un corps réel clos quelconque.

Pour tout $x \in K^n$, nous posons $|x| := \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$ (où $x:=(x_1,x_2,\dots,x_n)$) et $B(x,r) := \{y \in K^n \,/\, |x-y| \leq r^2\}$ (où $r \in K$ est positif).

$\mathcal{L}_K$ note le langage de premier ordre sur K ; pour tout $\Phi \in \mathcal{L}_K$ on définit $\mathcal{F}_\Phi \subseteq K[X_1,\dots,X_n]$ l'ensemble (fini) de tous les polynomes qui apparaissent dans l'écriture de Φ.

On pose :

$$\deg(\Phi) := \max.\{\deg(F)/F \in \mathcal{F}_\Phi\}$$

$$\sigma(\Phi) := \sum_{F\in\mathcal{F}_\Phi}\deg(F)$$

$$\ell(\Phi) := \max.\{\text{coefficients des polynomes de } \mathcal{F}_\Phi \text{ en valeur absolue}\}$$

Si la formule Φ est écrite sous forme prénexe, nous considérons aussi $a(\Phi) :=$ # alternations de blocs de quantificateurs de Φ.

Si $A \subseteq K^n$ est un ensemble semi-algébrique et $f : A \longrightarrow K$ est une fonction semi-algébrique, on définit $Z(f) := \{x \in A/ f(x)=0\}$

RESULTATS

THEOREME 1.(Inégalité de Łojasiewicz)

Soit $A \subset K^m$ un ensemble semi-algébrique fermé et borné défini par une formule prénexe Φ ; f et g deux fonctions continues semi-algébriques de A dans K (de graphes représentés par des formules prénexes φ_1 et φ_2 respectivement) telles que $Z(f) \subseteq Z(g)$.

Supposons que :

$$\max\{\sigma(\Phi),\ \sigma(\varphi_1),\ \sigma(\varphi_2)\} \leq \sigma$$

$$\max\{a(\Phi),\ a(\varphi_1),\ a(\varphi_2)\} \leq a$$

$$\mathcal{F}_\Phi \cup \mathcal{F}_{\varphi_1} \cup \mathcal{F}_{\varphi_2} \subseteq K[X_1,\dots,X_n].$$

Alors il existe une constante universelle $c_1 \in \mathbb{N}$

et une constante $c_2 \in K_{>0}$ telles que

$$|g(x)|^{\sigma^{n^{c_1 a}}} \leqslant c_2 |f(x)| \quad , \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Dans le cas particulier où A est décrit par une formule sans quantificateurs et f et g sont des polynomes , on a le résultat plus précis suivant :

THEOREME 2. Soit $A \subset K^n$ un ensemble semi-algébrique fermé et borné défini par une formule Φ sans quantificateurs , et soit $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $Z(f) \subseteq Z(g)$.

Soit $\sigma \in \mathbb{N}$ tel que $\max\{\sigma(\Phi), \deg(f), \deg(g)\} \leqslant \sigma$

Alors il existe une constante universelle $c_1 \in \mathbb{N}$ et une constante $c_2 \in K_{>0}$ telles que

$$|g(x)|^{\sigma^{c_1 \cdot n}} \leqslant c_2 \cdot |f(x)| \quad , \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 sont essentiellement les mêmes que celle de l'inégalité de Łojasiewicz présentée dans [BCR] Ch.2 §6 , avec quelques considérations quantitatives (qui se déduissent de l'algorithme d'élimination des quantificateurs de [HRS 1] ou [HRS 2] ; on peut voir aussi [R]) contenues dans le lemme suivant :

LEMME 3. Soit $\Phi \in \mathcal{L}_K$, prénexe , avec $\mathcal{F}_\Phi \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$. Notons $\sigma := \sigma(\Phi)$, $a := a(\Phi)$ et $\ell := \ell(\Phi)$. Alors :

(i) il existe une formule $\overline{\Phi} \in \mathcal{L}_K$, sans quantificateurs et équivalente à Φ telle que :

$$\deg(\overline{\Phi}) \leqslant \sigma^{n^{ca}} \quad \text{et} \quad \ell(\overline{\Phi}) \leqslant \ell^{\sigma^{n^{ca}}} .$$

(ii) dans le cas $a=1$, on peut choisir $\overline{\Phi}$ de manière que :

$$\deg(\overline{\Phi}) \leqslant \sigma^{c.n} \quad \text{et} \quad \ell(\overline{\Phi}) \leqslant \ell^{\sigma^{cn}} .$$

(où $c \in \mathbb{N}$ est une constante universelle)

Demonstration : (i) L'affirmation sur le degré forme part de l'énoncé du théorème 3 de [HRS 1] (ou bien du théorème 5 de [HRS 2]). La borne sur $\ell(\overline{\Phi})$ s'obtient par simple inspection de l'algorithme mentionné.

(ii) se déduit de l'examen de l'algorithme. L'apparition de $\sum_{F\in\mathcal{F}_\xi}\deg(F)$ est due à l'étape de réduction (a) (suivant la notation de [HRS 1]) et à l'élimination d'une variable (dernière partie de la démonstration de [HRS 1] Th.3). L'exposant $c.n$ provient de l'application d'un Nullstellensatz effectif (partie (c) de [HRS 1]) et du calcul d'une base standard de dimension 0 (partie (d)).∎

Nous donnons maintenant la démonstration du théorème 2. Le théorème 1 se montre similairement.

Preuve du théorème 2

La partie essentielle consiste à exhiber une constante universelle $c_1\in\mathbb{N}$ de manière que la fonction semi-algébrique définie sur A par :

$$\begin{cases} \dfrac{g(x)^{\sigma^{c_1.n}}}{f(x)} & \text{si } x\notin Z(f) \\ 0 & \text{si } x\in Z(f) \end{cases}$$

soit continue.

Ensuite , étant donné que A est fermé et borné , il suffira de choisir comme valeur de c_2 le maximum de la fonction sur A (qui existe en vertu du Th.2.5.8 de [BCR]). Pour cela on suit , avec des estimations quantitatives , la démonstration de la Prop.2.6.4 et du Th.2.6.6 de [BCR]).

PROPOSITION 4. Dans les conditions du théorème 2 , il existe une constante universelle $c_1\in\mathbb{N}$ de manière que la fonction $\alpha : A\longrightarrow K$ définie par

$$\alpha(x):=\begin{cases} \dfrac{g(x)^{\sigma^{c_1.n}}}{f(x)} & \text{si } x\notin Z(f) \\ 0 & \text{si } x\in Z(f) \end{cases}$$

est continue.

Démonstration.

(1) Pour tout $x \in A$, $u \in K$ on pose $A(x,u) := B(x,1) \cap \{y \in A / u.|g(y)| = 1\}$
Il est clair que $A(x,u)$ est un ensemble semi-algébrique fermé et borné dans K^n.
Soit Ψ la formule :

$$\Psi : \Phi(X) \ \& \ (|Y-X|^2 \leq 1) \ \& \ \Phi(Y) \ \& \ (U.|g(Y)| = 1)$$

où Φ est la formule qui décrit A ; $X := (X_1, \ldots, X_n)$, $Y := (Y_1, \ldots, Y_n)$ et U sont les variables (libres) de Ψ .
On a alors :

$(x,u,y) \in K^{2n+1}$ vérifie Ψ sii $y \in A(x,u)$

D'autre part $\sigma(\Psi) \leq 3\sigma + 3$.

(2) On définit la fonction semi-algébrique $v : A \times K \longrightarrow K$ par

$$v(x,u) := \begin{cases} \sup\left\{ \left| \dfrac{1}{f(x)} \right| / \ y \in A(x,u) \right\} & \text{si } A(x,u) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A(x,u) = \emptyset \end{cases}$$

(notons que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in A(x,u)$ puisque $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in A(x,u)$).
On considère maintenant la formule :

$$\Theta : (\exists Y) \ (\Psi \ \& \ |f(Y)|.\Lambda \leq 1)$$

(où Λ est une nouvelle variable libre)
On a $\sigma(\Theta) \leq \sigma(\Psi) + \sigma + 1 \leq 4(\sigma+1)$.
Appliquant le lemme 3 à la formule Θ , il existe une formule $\overline{\Theta}$ équivalente à Θ et sans quantificateurs telle que:

$$\deg(\overline{\Theta}) \leq (\sigma(\Theta))^{c.n} \leq (4(\sigma+1))^{c.n}$$

(où $c \in \mathbb{N}$ est une constante universelle.)

(3) Fixons $x_0 \in A$ de manière telle qu'il existe $u \in K$ avec $A(x_0,u) \neq \emptyset$.
La formule $\overline{\Theta}(x_0, U, \Lambda)$ (dans les variables libres U , Λ) est une disjonction de formules du type :

$(h_1(x_0,U,\Lambda)>0\ \&\ \ldots\ \&\ h_t(x_0,U,\Lambda)>0\ \&\ h_{t+1}(x_0,U,\Lambda)=0\ \&\ \ldots$

$\ldots\ldots\ \&\ h_r(x_0,U,\Lambda)=0\ )$

avec $r \geqslant t \geqslant 0$ et $h_j \in K[X_1,\ldots,X_m,U,\Lambda]$.
Pour tout $u \in K$ tel que $A(x_0,u) \neq \emptyset$ la formule $\bar{\Theta}(x_0,u,v(x_0,u))$ est vérifiée ; de plus , dans ce cas ,

$$v(x_0,u) = \sup\{\lambda \in K \ / \ \bar{\Theta}(x_0,u,\lambda) \text{ est vérifiée}\}$$

Il est facile de voir qu'alors $v(x_0,u)$ est forcément l'une des racines réelles de l'un des polynomes non nul $h_j(x_0,u,\Lambda)$, avec $j \geqslant t+1$ (pour une disjonction consistante qui apparait dans $\bar{\Theta}(x_0,u,\Lambda)$) , puisque $\bar{\Theta}(x_0,u,\Lambda)$ décrit l'ensemble $(-\infty, v(x_0,u)] \subseteq K$.

(4) Soit $\widetilde{\mathcal{F}}_{\bar{\Theta}} \subseteq K[U,\Lambda]$ l'ensemble des polynomes qui apparaissent dans $\bar{\Theta}(x_0,U,\Lambda)$. Si on applique la décomposition cylindrique à $\widetilde{\mathcal{F}}_{\bar{\Theta}}$ selon la direction Λ (voir par exemple [BCR] Th.2.3.1) on observe qu'il existe $\beta \in K$ (qui dépend de x_0) tel que :

(i) $A(x_0,u)=\emptyset$ pour tout $u \geqslant \beta$,

ou bien

(ii) $A(x_0,u) \neq \emptyset$ pour tout $u \geqslant \beta$ et il existe un index j tel que

$$- \ h_j(x_0,u,\Lambda) \not\equiv 0 \qquad \forall u \geqslant \beta$$
$$- \ h_j(x_0,u,v(x_0,u))=0 \qquad \forall u \geqslant \beta$$

(5) On définit un polynome $H \in K[X_1,\ldots,X_m,U,\Lambda]$ comme suit :

$H := \Lambda$, si on est dans le cas (i)

ou

$H := h_j(X_1,\ldots,X_m,U,\Lambda)$, si on est dans le cas (ii).

Dans les deux cas , H a les propriétés :

$$- \ H(x_0,u,\Lambda) \not\equiv 0 \qquad \forall u \geqslant \beta$$
$$- \ H(x_0,u,v(x_0,u)) = 0 \qquad \forall u \geqslant \beta$$
$$- \ \deg(H) \leqslant \deg(\bar{\Theta}) \leqslant (4(\sigma+1))^{c.n}.$$

Le fait que $H(x_0,u,v(x_0,u))=0 \ \forall u \geqslant \beta$, montre que

$$|v(x_0,u)| \leq \gamma(x_0).u^{p_0} \quad \forall u \geq \beta$$

où $\gamma(x_0)$ est une constante qui dépend de x_0 et $p_0 \in \mathbb{N}$ est tel que

$$p_0 \leq \deg(H) \leq (4(\sigma+1))^{c.n}$$

(voir [BCR] Prop.2.6.1) . Soit $p := (4(\sigma+1))^{c.n}$.

(6) Si finalement on suppose que $x_0 \in A$ est tel que $g(x_0)=0$, on a (pour tout $u \gg 0$ et où $\tilde{\gamma}(x_0) \in K$ dépend de x_0):

$$\left|\frac{1}{f(y)}\right| \leq |v(x_0,u)| \leq \tilde{\gamma}(x_0).u^{p} \qquad \forall y \in A(x_0,u)$$

et ainsi

$$\frac{|g(y)|^{p}}{|f(y)|} \leq \tilde{\gamma}(x_0) \qquad \forall y \in A(x_0,u), \text{ et } g(y) \text{ suff. petit}$$

Et par conséquent , la fonction

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{|g(x)|^{p+1}}{|f(x)|} & \text{si } x \notin Z(f) \\ 0 & \text{si } x \in Z(f) \end{cases}$$

est continue sur A puisque $p+1$ est indépendant de x_0.

De plus , on a :

$$p+1 = (4(\sigma+1))^{c.n}+1 \leq \sigma^{4c.n} \qquad .\blacksquare.\blacksquare$$

REMARQUE 5. Si les entrées de Φ , graphe de f et graphe de g sont dans un sous-anneau archimédien $L \subseteq K$, on peut estimer à priori la valeur de la constante C_2 .

Il suffit pour cela d'utiliser la formule sans quantificateurs qui décrit l'image de la fonction α et à l'aide du lemme 3 , d'estimer une borne supérieure pour le maximum de cette fonction.

On obtient une borne d'ordre :

$$\ell^{\sigma^{n^{c.a}}} \quad \text{(pour le Th.1)}$$

et

$$\ell^{\sigma^{c.n}} \quad \text{(pour le Th.2)}$$

où ℓ est une borne supérieure pour max $\{\ell(\Phi), \ell(\varphi_1), \ell(\varphi_2)\}$ (dans le Th. 1) et pour max $\{\ell(\Phi), \ell(f), \ell(g)\}$ (dans le Th.2); $c \in \mathbb{N}$ est une constante universelle.

On obtient comme conséquence du théorème 2 la version suivante du théorème de finitude:

THEOREME 6. Soit $A \subseteq K^n$ un ensemble semialgébrique ouvert défini par une formule Φ sans quantificateurs , et soit $\sigma := \sigma(\Phi)$. Alors A admet une décomposition:

$$A = \bigcup_{j=1}^{N} A_j$$

où chaque A_j est de type:

$$A_j = \{x \in K^n / F_{1_j}(x) > 0, \dots, F_{s_j}(x) > 0\}$$

et

$$\deg F_{i_j} \leq \sigma^{c.n^4} \quad (1 \leq j \leq N, 1 \leq i_j \leq s_j), N \leq \sigma^{n^c}$$

Dém: On combine la démonstration du théorème de finitude présentée dans [BCR] (Th.2.7.1) avec le théorème 1. ∎

REMARQUE 7. On peut de plus construire un algorithme qui calcule $\{F_{i_j}, 1 \leq j \leq N, 1 \leq i_j \leq s_j\}$ en temps séquentiel σ^{n^c} et parallèle $(n \log \sigma)^c$.

REFERENCES

[BCR] Bochnak J., Coste M., Roy M-F. : Géométrie algébrique réelle. Springer Verlag (1987).

[HRS 1] Heintz J., Roy M-F., Solernó P. : Complexité du principe de Tarski-Seidenberg. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.309. 825-830 (1989).

[HRS 2] Heintz J., Roy M-F., Solernó P.:Sur la complexité du principe de Tarski-Seidenberg. A paraître dans Bull. de la Soc. Math. de France.

[K] Kollár J. : A Łojasiewicz-type Inequality for Algebraic Varieties. Preprint(1989)

[JS] Ji S., Shiffman B. : Aglobal Łojasiewicz inequality for complete intersections in $\mathbb{C}^n$. Preprint.

[R] Renegar J. ; On the computational complexity and geometry of the first order theory of the reals. Technical Report , Cornell Univ. Ithaca (1989)