S. Dobyinsky

Renormalisations du produit, formes bilinéaires et espaces de Lizorkin-Triebel

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992-1993, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992-1993___1_A3_0>

Renormalisations du produit, formes bilinéaires et espaces de Lizorkin-Triebel.

S. Dobyinsky

CEREMADE
Université Paris IX, Dauphine

1. Introduction.

A l'aide de symboles bilinéaires, nous construisons un opérateur de produit renormalisé $P^\sharp$ qui améliore, du point de vue de l'inégalité de Hölder et de la compatibilité avec la convergence faible, les propriétés du produit ponctuel de deux fonctions.

Cet opérateur $P^\sharp$ est, dans un certain sens, (voir [**5**]) équivalent aux paraproduits de Bony. Le lecteur pourra consulter [**5**] pour une construction par ondelettes d'un opérateur de produit renormalisé.

A l'aide de cet opérateur $P^\sharp$ nous établissons des versions précisées de résultats récemment obtenus (voir [**1**],[**3**],[**4**],[**8**]), qui relient oscillations, espaces de Hardy, et compatibilité avec la convergence faible.

Nous exposerons ici comme exemple d'application celui des formes bilinéaires dans le cas du rang constant (dont le lemme "Div-Curl" est un cas particulier). Soulignons que C. Li, A. Mc Intosh, Z. Wu et K. Zhang ont obtenu (voir [**8**]) le même résultat, mais sans la restriction du rang constant.

2. Les espaces de Lizorkin-Triebel homogènes.

Nous introduisons ici sommairement les espaces de Lizorkin-Triebel homogènes, $\dot{F}_p^{0,q}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < +\infty$, $0 < q \leq +\infty$. Le lecteur pourra trouver davantage de détails sur ces espaces dans [**6**],[**7**],[**9**].

Soit ϕ une fonction de la classe de Schartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\operatorname{supp} \hat{\phi} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \, ; \, \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\right\}$$

$$|\hat{\phi}(\xi)| \geq c \qquad \text{si} \quad \frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3} \, .$$

On pose, pour $j \in \mathbf{Z}$: $\phi_j(x) = 2^{nj}\,\phi(2^j x)$.

On définit $\dot{F}_p^{0,q}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des distributions tempérées (modulo les polynômes) f telles que

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{0,q}} = \left\| \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} |\phi_j * f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < +\infty \, .$$

On a alors les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} L^p &\sim \dot{F}_p^{0,2} \qquad \text{si} \quad 1 < p < +\infty \\ \mathcal{H}^p &\sim \dot{F}_p^{0,2} \qquad \text{si} \quad 0 < p \leq 1 \\ \dot{B}_1^{0,1} &\sim \dot{F}_1^{0,1} \end{aligned}$$

Les inclusions suivantes seront essentielles pour les applications que nous avons en vue :

$$\begin{aligned} \dot{B}_1^{0,1} &\underset{\neq}{\subset} \mathcal{H}^1 \\ \dot{F}_p^{0,1} &\underset{\neq}{\subset} \mathcal{H}^p \qquad \text{si} \quad 0 < r \leq 1 \, . \end{aligned}$$

3. La renormalisation du produit par symboles bilinéaires.

Nous décrivons ici la méthode de renormalisation du produit de deux fonctions à l'aide des symboles bilinéaires que R. Coifman et Y. Meyer ont analysés dans [**2**].

On appelle symbole bilinéaire une fonction $\tau(\xi, \eta)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$, qui vérifie la condition d'homogénéité suivante :

$$\tau(\lambda\xi, \lambda\eta) = \tau(\xi, \eta) \qquad \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ et tout } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \, .$$

A chaque symbole bilinéaire $\tau(\xi, \eta)$ on associe un opérateur bilinéaire T_τ au moyen de l'équation

$$(1) \qquad T_\tau(f,g)(x) = (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,\eta)\cdot x}\, \tau(\xi,\eta) \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta)\, d\xi\, d\eta\, .$$

En particulier, l'opérateur de produit ponctuel de deux fonctions est défini à travers cette équation par le symbole $\tau(\xi, \eta) = 1$.

Les opérateurs T_τ ainsi définis sont continus de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, pour $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $1 \le r < +\infty$ (voir [**2**]).

Pour définir un produit renormalisé qui soit borné de $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, nous aurons besoin des résultats suivants.

Lemme 1. (Voir [**3**]).

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur bilinéaire T_τ défini par l'équation (1) soit continu de $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ est que son symbole bilinéaire $\tau(\xi, \eta)$ vérifie la condition

$$(2) \qquad \tau(\xi, -\xi) = 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \,,\ \xi \neq 0\, .$$

Considérons maintenant une fonction $\rho(\xi, \eta)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho(\xi,\eta) = \rho(\eta,\xi) & \forall\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\} \\ \rho(\lambda\xi,\lambda\eta) = \rho(\xi,\eta) & \forall\, \lambda > 0 \quad , \quad \forall\, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \rho(\xi,\eta) = 1 & \text{si} \quad |\xi+\eta| \le \dfrac{1}{10}(|\xi| + |\eta|) \\ \rho(\xi,\eta) = 0 & \text{si} \quad |\xi+\eta| \ge \dfrac{1}{5}(|\xi| + |\eta|)\, . \end{cases}$$

Nous décomposons alors le produit ponctuel de deux fonctions f et g de $L^2(\mathbb{R}^n)$ de la façon suivante :

$$fg = T_\rho(f,g) + T_{1-\rho}(f,g)\, .$$

Nous appellerons produit renormalisé de f et g et nous noterons $P^\sharp(f,g)$ le terme $T_{1-\rho}(f,g)$.

D'après le lemme (1), l'opérateur $P^\sharp$ est continu de $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

En fait, le lemme suivant montre que $P^\sharp$ se prolonge en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace de Hardy $\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Lemme 2. (Voir [**5**]).
Soit τ un symbole bilinéaire vérifiant, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes :

$$(4) \qquad \begin{aligned} \tau(\xi, -\xi) &= 0 & \forall\, \xi \neq 0 \\ \partial_\varepsilon^\alpha \tau(\xi, -\xi + \varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= 0 & \forall\, \xi \neq 0\,,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\,. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur bilinéaire T_τ est borné de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, dès que $m \geq n\big(\frac{1}{r} - 1\big)$.

Dans le but d'obtenir, à l'aide de cet opérateur de renormalisation du produit, l'appartenance à un espace de Hardy des formes bilinéaires, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 3. (Voir [**5**]).
Soit $\tau(\xi, \eta)$ un symbole bilinéaire vérifiant, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes :

$$(5) \qquad \begin{aligned} \tau(\xi, -\xi) &= 0 & \forall\, \xi \neq 0 \\ \partial_\varepsilon^\alpha \tau(\xi, -\xi + \varepsilon)|_{\varepsilon=0} &= 0 & \forall\, \xi \neq 0\,,\ 0 \leq |\alpha| \leq m \\ \tau(\xi, 0) = \gamma(0, \eta) &= 0 & \forall\, \xi \neq 0\,,\ \forall\, \eta \neq 0\,. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur bilinéaire T_τ est continu de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{F}_r^{0,1}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, dès que $m \geq n\big(\frac{1}{r} - 1\big)$.

4. Compacité par compensation des formes bilinéaires dans le cas du rang constant.

Soit

$$\begin{aligned} B_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N_1} &\to \mathbb{R}^{m_1} \\ B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N_2} &\to \mathbb{R}^{m_2} \end{aligned}$$

deux formes bilinéaires à valeurs vectorielles.

On suppose que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, les applications linéaires $B_1(\xi, \cdot)$ et $B_2(\xi, \cdot)$ sont de rang constant.

Soit maintenant $Q : \mathbb{R}^{N_2} \to \mathbb{R}^{N_1}$ une application linéaire qui vérifie la condition

$$(6) \qquad \lambda^T Q \nu = 0 \qquad \text{si} \quad B_1(\xi, \lambda) = B_2(\xi, \nu) = 0 \quad \text{pour un certain} \quad \xi \neq 0\,.$$

Notons $q(\lambda, \nu) = \lambda^T Q \nu$ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ associée à Q.

Théorème 1.
Soient $f \in (L^p(\mathbb{R}^n))^{N_1}$, $g \in (L^q(\mathbb{R}^n))^{N_2}$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, telles que :

$$\begin{aligned} (7) \qquad & B_1(D, f) = 0 \\ (7') \qquad & B_2(D, g) = 0 \qquad \textit{au sens des distributions.} \end{aligned}$$

Alors $q(f, g)$ appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)$, si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $r > \frac{n}{n+1}$.

Preuve du théorème 1.
Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on note

$$\begin{aligned} H_\xi^1 &= \{\lambda \in \mathbb{R}^{N_1} \; ; \; B_1(\xi, \lambda) = 0\} \\ H_\xi^2 &= \{\lambda \in \mathbb{R}^{N_2} \; ; \; B_2(\xi, \lambda) = 0\}\,. \end{aligned}$$

On considère les opérateurs de projection orthogonale

$$\begin{aligned} \Pi_\xi^1 : \mathbb{R}^{N_1} &\to H_\xi^1 \\ \Pi_\xi^2 : \mathbb{R}^{N_2} &\to H_\xi^2\,. \end{aligned}$$

Les applications $\xi \mapsto \Pi_\xi^1$ et $\xi \mapsto \Pi_\xi^2$ sont homogènes de degré 0 et, grâce à l'hypothèse de rang constant, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On définit maintenant les opérateurs linéaires

$$\begin{aligned} T_1 : (L^p(\mathbb{R}^n))^{N_1} &\to (L^p(\mathbb{R}^n))^{N_1} \\ T_2 : (L^p(\mathbb{R}^n))^{N_2} &\to (L^p(\mathbb{R}^n))^{N_2} \end{aligned}$$

par l'équation

$$(8) \qquad \widehat{T_1 f(\xi)} = \Pi^1_\xi \hat{f}(\xi)$$

$$(8') \qquad \widehat{T_2 f(\xi)} = \Pi^2_\xi \hat{g}(\xi) .$$

On remarque alors que grâce aux hypothèses (7) et (7') sur les fonctions f et g, on a $\hat{f}(\xi) \in H^1_\xi$, $\hat{g}(\xi) \in H^2_\xi$, pour tout $\xi \neq 0$, ce qui implique $T_1(f) = f$, $T_2(g) = g$.

Observons maintenant que $q(f,g)$ est tout simplement une combinaison linéaire de produits de deux fonctions, liées par des propriétés d'oscillation. Nous faisons donc appel maintenant à la méthode de renormalisation du produit par symboles bilinéaires.

Rappelons que l'opérateur P de produit ponctuel se décompose en

$$P = P^\sharp + T_\rho$$

où ρ est un symbole bilinéaire vérifiant les conditions (3). Réécrivons maintenant $q(f,g)$ à l'aide de cette décomposition

$$\begin{aligned} q(f,g) &= f^T Q\, g = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} q_{ij} f_i g_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} q_{ij}\, P^\sharp(f_i, g_i) + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} q_{ij}\, T_\rho(f_i, g_j) . \end{aligned}$$

Notons $q^\sharp(f,g)$ et $q_\rho(f,g)$ chacun des termes de la décomposition précédente. Le terme $q^\sharp(f,g)$ appartient à $\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)$.

Nous montrerons maintenant que les hypothèses (7),(7') sur f et g entraînent en fait l'appartenance de $q_\rho(f,g)$ à un espace strictement contenu dans $\mathcal{H}^r(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Lizorkin-Triebel $\dot{F}^{0,1}_r(\mathbb{R}^n)$.

On a :

$$\begin{aligned} q_\rho(f,g) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} q_{ij}\, T_\rho(f_i, g_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi+\eta)x}\, q_{ij}\, \rho(\xi,\eta) \hat{f}_i(\xi) \hat{g}_j(\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi+\eta)x}\, \hat{f}(\xi)^T [\rho(\xi,\eta) Q]\, \hat{g}(\eta)\, d\xi\, d\eta . \end{aligned}$$

Les oscillations (7) et (7') vont être introduites dans le symbole grâce aux identités $\Pi^1_\xi \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)$, $\Pi^2_\xi \hat{g}(\eta) = \hat{g}(\eta)$.

On réécrit alors

$$\begin{aligned} q_\rho(f,g) &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi+\eta)x}\, \hat{f}(\xi)^T \Pi^{1^T}_\xi\, \rho(\xi,\eta) Q\, \Pi^2_n\, \hat{g}(\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi+\eta)x}\, \hat{f}(\xi)^T A(\xi,\eta)\, g(\eta)\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

où $A(\xi,\eta)$ est la matrice $\Pi^{1^T}_\xi\, \rho(\xi,\eta)\, Q\, \Pi^2_\eta$, de composantes $a_{ij}(\xi,\eta)$, $i = 1, N_1$, $j = 1, N_2$.

On obtient finalement

$$\begin{aligned} q_\rho(f,g) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi+\eta)x}\, a_{ij}(\xi,\eta) \hat{f}_i(\xi) \hat{g}_j(\eta)\, d\xi\, d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} T_{a_{ij}}(f_i, g_j) \end{aligned}$$

où $T_{a_{ij}}$ est l'opérateur bilinéaire associé au symbole $a_{ij}(\xi,\eta)$ au moyen de l'équation (1).

Etudions maintenant les propriétés de chacun des symboles a_{ij} :

- a_{ij} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$
- $a_{ij}(\xi,\eta)$ est homogène de degré 0
- $a_{ij}(0,\eta) = a_{ij}(\xi,0) = 0$.

A ces propriétés, que vérifiait déjà le symbole $\rho(\xi,\eta)$, s'ajoute une annulation supplémentaire, conséquence de (6) :

$$\begin{aligned} A(\xi,-\xi) &= \rho(\xi,-\xi)\, \Pi^{1^T}_\xi\, Q\, \Pi^2_{-\xi} \\ &= \Pi^{1^T}_\xi\, Q\, \Pi^2_{-\xi} \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 3, le symbole $a_{ij}(\xi,\eta)$ définit, pour chaque $i = 1, N_1$, $j = 1, N_2$, un opérateur bilinéaire $T_{a_{ij}}$ continu de $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{F}^{0,1}_r(\mathbb{R}^n)$, dès que $r > \frac{n}{n+1}$.

Références.

[1] R. Coifman et L. Grafakos, *Hardy space estimates for multilinear operators I.* Preprint.

[2] R. Coifman et Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels.* Astérisque **57**, SMF (1978).

[3] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes, *Compacité par compensation et espaces de Hardy.* C.R. Acad. Sci. Paris, **309**, série I, (1989), 945–949.

[4] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces.* A paraître au Journal de Math. Pures et Appliquées.

[5] S. Dobyinsky, *Ondelettes, renormalisations du produit et applications à certains opérateurs bilinéaires.* Thèse du Ceremade, (1992).

[6] M. Frazier et B. Jawerth, *A discrete transform and decomposition of distribution spaces.*

[7] M. Frazier, B. Jawerth et G. Weiss, *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces.* To appear as a monography in the CBMS-AMS Regional Conference series.

[8] C. Li, A. Mc Intosh, Z. Wu et K. Zhang, *Compensated compactness paracommutators, and Hardy spaces.* Macquarie Mathematics Reports, (1992).

[9] H. Triebel, *Theory of function spaces II.* Monographs in Mathematics, Vol. 84, Birkhäuser verlag, (1992).