PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

GÉRARD BOURDAUD

Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 30-40
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_30_0>

LE CALCUL FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Gérard Bourdaud

Exposé à Rennes (décembre 91)

I-Introduction

Quelles sont les fonctions G, de la variable réelle, telles que $G \circ f$ appartienne à $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour toute f appartenant à $H^s(\mathbb{R}^n)$? La réponse à cette question est maintenant connue dans trois cas:

(i) s entier et $s \geqslant n/2$ [B1] ,

(ii) $0 \leqslant s \leqslant 1$ ([I], [MM], [BK1], [B1], [B2], [B3], [B4]) ,

(iii) $3/2 \leqslant s < n/2$.

Dans le troisième cas, le calcul fonctionnel est *trivial:* seules les fonctions $G(t) = ct$ opèrent. Ce phénomène, a priori surprenant, a été mis en évidence par Dahlberg [D] ; l'auteur a observé que le résultat de Dahlberg se généralise aisément à tout réel tel que $3/2 < s < n/2$ [B5] et, de façon plus subtile, au cas limite $s = 3/2$ [B6].

Dans les autres cas, ce sont généralement les conjectures les plus naïves qui se sont trouvées vérifiées. Ainsi, si s est un entier tel que $s > \sup(n/2,1)$, la condition $G \in H^s_{loc}(\mathbb{R})$ - clairement nécessaire pour que G opère - est également suffisante; de même, pour $0 < s \leqslant \inf(n/2,1)$, la condition suffisante évidente - à savoir $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$ - est en fait nécessaire.

Le lecteur trouvera dans un exposé précédent [B4] la liste des résultats obtenus jusqu'en 1990; le seul résultat démontré depuis lors concerne le cas critique $s = 3/2$. Plutôt que de délivrer une nouvelle énumération, nous préférons revenir ici, à travers des cas typiques, sur les méthodes utilisées.

Précisons nos notations. Nous allons élargir notre propos aux diverses versions L^p des espaces de Sobolev, pour lesquelles nous adopterons la *notation générique* $E_p^s(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, pour s entier, $s \geqslant 0$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ pourra être l'espace de Sobolev usuel $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$; pour s réel, $s > 0$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ désignera aussi l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ($q \in [1,+\infty]$) ; pour $s > 0$ et $1 \leqslant p < +\infty$, $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ sera encore l'espace de Triebel-Lizorkin $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ($q \in [1,+\infty]$). $\| f \|$ désignera la norme de f dans $E_p^s(\mathbb{R}^n)$, quand il n'y aura pas de risque de confusion.

Ajoutons - pour rassurer le lecteur - que nous utilisons rarement les définitions précises de ces espaces. Il nous suffira bien souvent d'observer que $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge dans $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$, pour lequel nous disposons d'une norme "raisonnable", à savoir

$$\| f \|_p + \sup_{h\neq 0} |h|^{-s} \left(\int | f(x+h) - f(x) |^p \, dx \right)^{1/p},$$

ceci, bien sûr, pour $0 < s < 1$; pour $s = 1$, il convient de remplacer la différence première par la différence seconde; pour $s > 1$, on procède comme pour les espaces de Sobolev usuels. En fait l'étude des $W^{s,p}$ (s entier) et des H^s (s réel positif) est tout à fait typique des résultats plus généraux.

L'introduction du nombre $\rho = (n/p)-s$ est justifiée par l'importante estimation

$$(1) \qquad \| f(./\lambda) \| \leqslant \lambda^{\rho} \| f \| \qquad (\forall \lambda \in]0,1]) .$$

On dira que $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est *sur-critique* s'il s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, sous-critique dans le cas contraire. Il est bien connu que $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est sous-critique pour $s < n/p$, sur-critique pour $s > n/p$. Voici la liste *exhaustive* des $E_p^{n/p}(\mathbb{R}^n)$ *sur-critiques:*

$B_p^{n/p,1}(\mathbb{R}^n)$ (voir [T]), $F_1^{n,q}(\mathbb{R}^n)$ (voir [J]) et $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$.

Une dernière précision: à l'exception du cas $p = +\infty$, $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ ne contient pas de constante non nulle, de sorte que la condition $G(0) = 0$ est toujours nécessaire pour que G opère sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$; elle sera, en règle générale, sous-entendue.

"Last but not least": le présent travail est le résultat de collaborations avec Dalila Kateb, Djelil Kateb et Yves Meyer.

II– Non-trivialité du calcul fonctionnel

Nous disons que le calcul fonctionnel est *non-trivial* si les fonctions de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ opèrent sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1. *Le calcul fonctionnel sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est non-trivial si et seulement si $s < 1 + (1/p)$ ou $s \geqslant n/p$. Pour $1 + (1/p) \leqslant s < n/p$, seules les fonctions linéaires opèrent.*

Ce théorème comporte des lacunes: pour certains E_p^s – fort exotiques, il est vrai – nous ne savons pas prouver la non-trivialité, bien qu'elle soit vraisemblable; c'est le cas de $B_p^{1+(1/p),1}(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leqslant p < n-1$), $F_1^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ ($1 < s \leqslant 2$, $s < n$) et $F_p^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ ($p < n$, $q \neq 2$, $q \neq p$).

Le théorème 1 repose sur l'existence de fonctions plateaux (ou localement linéaires) ayant des normes appropriées:

Lemme 1. *Dans le cas sous-critique, il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geqslant 1}$ de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, portées par le cube unité $Q = [-1/2, +1/2]^n$, telles que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et $\lim_{\nu \to +\infty} \| \theta_\nu \| = 0$.*

Preuve. Donnons-nous une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur Q et $\varphi(x) = 0$ hors de $2Q$.

Le cas $s < n/p$ est très simple: on pose $\theta_\nu(x) = \varphi(2^\nu x)$ et on utilise l'estimation (1).

Supposons maintenant $s = n/p$ et posons

$$\theta_\nu(x) = \nu^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \varphi(2^j x) \ ;$$

tout se passe comme si la somme ci-dessus était une série d'ondelettes, de sorte que $\| \theta_\nu \|$ est estimée par $\nu^{(1/q)-1}$ dans le cas Besov et par $\nu^{(1/p)-1}$ dans le cas Triebel-Lizorkin (voir [B2] ou [B3] pour plus de détails).

Dans le cas sur-critique, il est hors de question que $\| \theta_\nu \|$ tende vers 0: on a en effet $1 \leqslant \| \theta_\nu \|_\infty \leqslant C \| \theta_\nu \|$.

Lemme 2. *Supposons $s = 1 + (1/p)$ (avec $q > 1$, dans le cas Besov, et $p > 1$, dans le cas Triebel). Il existe alors une suite $(u_\nu)_{\nu \geqslant 1}$ de fonctions C^∞, portées par Q, telles que*

(i) $u_\nu(x) = x_1$, pour $|x_1| \leqslant 2^{-\nu-1}$ et $|x_j| \leqslant 1/4$ ($j = 2, \ldots, n$) ;

(ii) $\lim_{\nu \to +\infty} \| u_\nu \| = 0$.

Plaçons-nous d'abord en dimension 1. D'après le lemme 1, il existe une suite (θ_ν) de fonctions C^∞, portées par $[-1/2, +1/2]$, vérifiant $\theta_\nu(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 2^{-\nu-1}$ et

$$\lim_{\nu \to +\infty} \| \theta_\nu \|_{E_p^{1/p}(\mathbb{R})} = 0.$$

Rien n'interdit, dans la preuve du lemme 1, de choisir la fonction φ paire et d'intégrale nulle; on a alors $\int \theta_\nu(x)\, dx = 0$, de sorte que la fonction $u_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \theta_\nu(t)\, dt$ satisfait à toutes les conditions souhaitées.

En dimension $n \geqslant 2$, on pose $u_\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = u_\nu(x_1)\, \varphi(2x_2) \ldots \varphi(2x_n)$.

Venons-en à la preuve du théorème 1. Nous supposerons d'abord $1 + (1/p) \leqslant s < n/p$ et, dans un premier temps, $s < 2$. Soit G une fonction, de classe C^1, qui opère sur $E^s_p(\mathbb{R}^n)$; on sait alors ([BK2], [B3]) qu'en un sens faible, G opère de façon *bornée:*

Lemme 3. *Il existe des constantes $C_j > 0$ telles que, pour toute fonction f, portée par Q, $\| f \| \leqslant C_1$ implique $\| G \circ f \| \leqslant C_2$.*

Posons $f(x) = 2^\nu a\, u_\nu(r^{-1}x)$, où les nombres $a \geqslant 1$, $r \in]0,1]$ et l'entier $\nu \geqslant 1$ sont reliés par la condition

(2) $$2^\nu a \| u_\nu \| r^\rho = C_1 .$$

Soient $\tau \in]0,1/4]$ et $h = (\tau a^{-1} r\, 2^{-\nu}, 0, \dots, 0)$. Intégrons $| D_1(G \circ f)(x+h) - D_1(G \circ f)(x) |^p$ sur l'ensemble défini par

$$| x_1 | < r\, 2^{-\nu-2} \text{ et } | x_j | < r/4 \quad (j = 2, \dots, n);$$

l'inégalité $\| G \circ f \|_{B^{s,\infty}_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2$ conduit alors à

(3) $$\int_{[-a/4,+a/4]} | G'(t+\tau) - G'(t) |^p \, dt \leqslant C_3 \, (a\, 2^\nu)^{1-sp} \, r^{-\rho p}.$$

Si $s > 1 + (1/p)$, on fait $\nu = 1$. L'égalité (2) devient $r^\rho a = C_4$ et le second membre de (3) est estimé par a^{1+p-sp} ; en faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient $G' = \mathrm{Cte}$.

Pour $s = 1+(1/p)$, on pose $a = \| u_\nu \|^{-1}$. On a alors $2^\nu r^\rho = C_1$ et le second membre de (3) est estimé par a^{-p} ; en faisant tendre ν vers $+\infty$, il vient encore $G' = \mathrm{Cte}$.

Dans le cas $s = 2$ et $p = 1$, on modifie la preuve ci-dessus en remplaçant les différences premières par des différences secondes (voir [B6] pour plus de détails).

Enfin, pour $s \geqslant 2$ et $p > 1$, on note qu'il existe des nombres s_1

et p_1 tels que

$$p < p_1 < +\infty \ , \ 1 + (1/p_1) < s_1 < 2 \quad \text{et} \quad (n/p_1) - s_1 = \rho \ ;$$

alors $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge dans $B_{p_1}^{s_1,\infty}(\mathbb{R}^n)$; en appliquant le calcul précédent au couple (s_1, p_1), on parvient à la même conclusion.

Passons aux preuves de non-trivialité. En dehors des cas bien connus: $0 \leqslant s < 1$ ou $s \geqslant n/p$ (voir [R], [M], etc), on utilise le

Théorème 2. *Toute fonction dont la dérivée seconde est une mesure bornée opère sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leqslant s < 1 + (1/p)$ (sauf - peut-être - si $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est l'un des espaces exceptionnels signalés après le théorème 1).*

Voici les grandes lignes de la démonstration.

La "propriété de Fubini", vérifiée par certains E_p^s, et, pour les autres, un argument d'interpolation non-linéaire, permettent de nous limiter à la dimension 1.

La seconde réduction consiste à écrire

$$G(x) = (1/2) \int_{\mathbb{R}} (|x-\tau| - |\tau|) \, d\mu(\tau) \ + \ ax \quad ,$$

où $\mu = G''$, de sorte qu'il nous suffit d'obtenir l'estimation

$$(4) \qquad \| \, | f - \tau | - | \tau | \, \| \leqslant C(s,p) \, \| f \| \ ,$$

pour tout $f \in E_p^s(\mathbb{R})$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$. La preuve de (4) repose sur une version précisée de l'inégalité de Hardy-Littlewood [HL]; dans le cas où E_p^s est l'espace de Sobolev usuel H^s, cette inégalité s'écrit

$$(5) \int_{\mathfrak{J}} |f(x)|^2 \mathrm{dist}(x, \mathfrak{J}^c)^{2-2s} dx \leqslant C(s) \iint_{\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}} |f(x) - f(y)|^2 |x-y|^{1-2s} dx\, dy,$$

pour tout intervalle ouvert $\mathfrak{J}$, borné ou non, et toute fonction f, de classe C^1, telle que

(i) $f(x) = O(x^{-2})$ ($|x| \to +\infty$), si $\mathfrak{J}$ est non borné ,

(ii) $\int_{\mathfrak{J}} f(x)\, dx = 0$, si $\mathfrak{J}$ est borné.

On applique (5) à la fonction f' sur chacun des intervalles aux bornes desquels $f-\tau$ s'annule. Le lecteur trouvera tous les détails dans les références [BM] et [BK3].

III- Vers les conditions nécessaires

Une fois écartés les cas de trivialité, notre objectif est d'obtenir des conditions nécessaires simples pour qu'une fonction opère. Un premier pas dans cette direction est le

Théorème 3. *Supposons $s > 0$; alors toute fonction qui opère sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est*

(i) lipschitzienne si $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est sous-critique,

(ii) localement lipschitzienne si $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est sur-critique.

Ces conditions ne sont suffisantes que pour $0 < s < 1$ (ainsi que pour $s = 1$, si on se limite aux espaces de Sobolev classiques $W^{1,p}$); on montre en effet facilement que certaines fonctions lipschitziennes n'opèrent pas sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$, dès que $s > 1$.

Nous indiquerons la preuve du théorème 3 dans le cas où $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ est sous-critique et $0 < s < 1$ (pour $s \geqslant 1$, il suffit de remplacer les différences premières par des différences d'ordre supérieur: voir [B3]).

On cherche à mettre en évidence une constante $K > 0$ telle que $|G(a) - G(b)| \leqslant K|a - b|$, pour tous nombres a et b; pour cela, on teste G sur la fonction

$$f(x) = (b-a)\sum_{|k_j|\leqslant \mu} \varphi(3(r^{-1}x - k)) + a\,\theta_\nu(x)$$

(Les fonctions φ et θ_ν ont été introduites au lemme 1 ; la somme $\sum_{|k_j|\leqslant \mu}\dots$ est étendue aux $k \in Z^n$ tels que $|k_j| \leqslant \mu$ pour $j = 1,\dots, n$).

Nous proposons d'appeler f un "peigne d'Igari", d'une part à cause de sa forme en dimension 1, d'autre part parce que S. Igari [I] a eu, le premier, l'idée d'utiliser une telle fonction – en prenant pour φ et θ_ν des fonctions caractéristiques d'intervalles – afin de décrire le calcul fonctionnel dans l'espace $H^s(\mathbb{R})$ ($0 < s < 1/2$).

Les entiers positifs μ , ν et le nombre $r \in]0,1]$ seront astreints aux conditions

(6) $|a| \, \| \theta_\nu \| \leqslant C_1/2$,

(7) $(3\,|a-b|)^{-1} \leqslant C_5\, r^\rho\, \mu^{n/p} \leqslant (2\,|a-b|)^{-1}$,

(8) $r\,\mu \leqslant 2^{-\nu-2}$.

Pour un choix convenable de C_5, les conditions (6) et (7) entraînent $\| f \| \leqslant C_1$ (voir le lemme 3); de son coté, l'inégalité (8) implique

$f(x) = b$ sur $r((1/3)Q + k)$, $f(x) = a$ sur $r(Q + k) \setminus r((2/3)Q + k)$.

Voici comment réaliser ces trois inégalités. D'après le lemme 1, on a (6) pour un grand entier ν; ensuite, pour $\rho > 0$, on pose

$$r = \{(2\,C_5\,|\,a-b\,|)^{-1}\,\mu^{-n/p}\}^{1/\rho}\ ;$$

l'hypothèse $s > 0$ permet d'obtenir (8) dès que μ est assez grand; pour $\rho = 0$, on commence par choisir μ pour avoir (7), puis r suivant (8).

Alors, en intégrant $|\,(G \circ f)(x + (1/3)re_1) - (G \circ f)(x)\,|^p$ sur la réunion des cubes $r\,(\,[0,1/6]^n + k\,)$ ($|k_j| \leqslant \mu$), on obtient

$$|\,G(a) - G(b)\,| \leqslant C_6\, r^{-\rho}\, \mu^{-n/p}\ ;$$

une nouvelle utilisation de (7) permet de conclure.

Les méthodes employées dans la preuve ci-dessus sont assez souples pour fournir, si besoin est, des conditions d'ordre supérieur sur la fonction G (voir [B 1]).

IV- En guise de conclusion

En dehors des cas $0 < s < 1$ et - si on se limite aux espaces de Sobolev classiques - s entier, on ne dispose d'aucune condition nécessaire *et* suffisante d'opérance.

Pour $1 < s < 1 + (1/p) < 2$, la condition suffisante du théorème 2 n'est en rien nécessaire; on montre en effet [BM] que la condition

$$G' \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad |G''(t)| \leqslant C|t|^{-1},$$

est également suffisante, au moins dans le cas Besov. Par exemple, la fonction $G(t) = |t|^{1+i}$ opère sur $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, alors que G'' n'est pas une mesure.

Pour $s \geqslant n/p$, les conditions suffisantes connues s'obtiennent par interpolation [P] ou par linéarisation [M], deux méthodes qui "gaspillent" vraisemblablement de la régularité sur G.

Risquons deux *conjectures:*

1- Dans le cas sur-critique, avec $s > 1 + (1/p)$, l'appartenance locale à $E_p^s(\mathbb{R})$ est nécessaire et suffisante pour que G opère sur $E_p^s(\mathbb{R}^n)$.

2- Si $E_p^{n/p}(\mathbb{R}^n)$ est sous-critique, avec $n > p + 1$, l'appartenance locale-uniforme à $E_p^{n/p}(\mathbb{R})$ est nécessaire et suffisante pour que G opère sur $E_p^{n/p}(\mathbb{R}^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] G.BOURDAUD. Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. Invent. Math. 104 (1991), 435-446.

[B2] ----------. Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique. Proc. Amer. Math. Soc (à paraître).

[B3] ----------. Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel. Annales de l'I.H.P. (Analyse non linéaire) (à paraître).

[B4] ----------. Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. Séminaire E.D.P., Ecole Polytechnique, 1990-91, n°4.

[B5] ----------. Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. Sém. Anal. Harm., Orsay (1980-81), 6-17.

[B6] ----------. La trivialité du calcul fonctionnel dans $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$. C.R.A.S. (à paraître).

[BK1] G.BOURDAUD et D.KATEB. Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 1067-1076.

[BK2] -------------. Fonctions qui opèrent sur certains espaces de Besov. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40 (1990), 153-162.

[BK3] G.BOURDAUD et M.E.D.KATEB. Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire. Math. Zeit. (à paraître).

[BM] G.BOURDAUD et Y.MEYER. Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. J. Funct. Anal. 97 (1991), 351-360.

[D] B.E.J.DAHLBERG. A note on Sobolev spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35,1 (1979), 183-185.

[HL] G.H.HARDY et J.E.LITTLEWOOD. Some properties of fractional integrals (I). Math. Zeit. 27 (1928), 565-606.

[I] S.IGARI. Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\hat{A}^2$. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15 (1965), 525-536.

[J] B.JAWERTH. Some observations on Besov and Lizorkin-Triebel spaces. Math. Scand. 40 (1977), 94-104.

[M] Y.MEYER. Régularité des solutions des E.D.P. non-linéaires (d'après J.M.Bony). Séminaire Bourbaki, 1979-80, n°560.

[MM] M.MARCUS et V.J.MIZEL. Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev Spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 187-218.

[P] J.PEETRE. Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj) 12 (35) (1970), 325-334.

[R] T.RUNST. Mapping properties of non-linear operators in spaces of Triebel-Lizorkin and Besov type. Analysis Mathematica 12 (1986), 313-346.

[S] G.STAMPACCHIA. Equations elliptiques du second ordre à coeficients discontinus. Univ. Montréal Press, Québec (1966).

[T] H.TRIEBEL. Theory of Function Spaces. Birkhäuser, Boston (1983).

Université Paris VII
C.N.R.S. - U.A. 212
Tour 45-55, 5°étage
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France