PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

VIVIANE DURAND-GUERRIER

Logique et raisonnement mathématique Exemple d'analyse de tâches à l'aide de la logique formelle

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994-1995, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. nº 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994-1995___3_A2_0>

LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUE EXEMPLE D'ANALYSE DE TACHES A L'AIDE DE LA LOGIQUE FORMELLE

Viviane DURAND-GUERRIER
Chercheur au Centre Scientifique J. FOURIER à Valence
et au CNRS - IRPEACS, Equipe COAST à Lyon

Introduction

Les erreurs dites "de logique" et les relations qu'entretiennent la logique naturelle, la logique formelle et le raisonnement mathématique sont au coeur de mon travail de thèse.
Le but de cet exposé est de montrer, sur un exemple, qu'une anlyse fine, à l'aide du calcul des prédicats, de la structure logique des tâches visant à tester les aptitudes au raisonnement des élèves peut conduire à reconsidérer les reponses possibles et la nature des processus cognitifs en jeu. [1]
Dans la première partie, je présente le cadre théorique qui sous-entend cette analyse. La deuxième partie, consacrée à l'analyse de la tâche, fera de très larges emprunts à Durand-Guerrier (1995).

I-Le cadre théorique: quelques repères

I-1 Problématique générale

En *mathématiques*, nous travaillons avec des systèmes hypothético-déductifs. Les notions centrales sont celles de définition, axiome, démonstration et théorème. L'implication joue un rôle fondamental à travers les règles d'inférences qui permettent le raisonnement déductif: Tiers exclu, Modus ponens, Modus tollens, transitivité de la relation d'antécédent à conséquent etc...
La logique "naturelle", au sens de logique de sens commun, est véhiculée par le langage courant; elle est présente de fait dans la classe. C'est une logique discursive, qui fait appel aux modalités. Elle rentre souvent en conflit avec les règles du discours mathématique.[2]
La logique formelle, calcul des propositions et calcul des prédicats, dont le symbolisme est utilisé en mathématiques, n'est plus présente dans la classe en tant q
u'objet enseigné. De très nombreux enseignants se demandent quelle place elle peut ou doit occuper suivant les différents niveaux d'enseignement.
Raisonner juste est une aptitude indispensable pour faire des mathématiques. Or, si l'on en croit Blanché (1973)

"*Raisonner juste, c'est faire des inférences correctes.*"

Cette aptitude est-elle innée? acquise? peut-elle être développée par un entraînement spécifique du type Ateliers de Raisonnement Logique? par un enseignement de logique? quel serait alors le contenu d'un tel enseignement? A quel niveau du cursus devrait-il intervenir?

De nombreux travaux ont été consacrés à ces questions tant en psychologie cognitive[3] qu'en didactique [4]. Dans les travaux de psychologie cognitive sur le raisonnement, la logique formelle est en générale assimilée au calcul des propositions. Or celui-ci est notoirement nsuffisant

* Cet article a été publié dans les cahiers du séminaire DidaTech de Grenoble de l'année 94-95

---

[1] Ce dernier point est mis plus clairement en évidence dans l'analyse que j'ai faite de la tâche de sélection de Wason (utilisée en psychologie cognitive pour tester l'existence d'une logique mentale chez les sujets adultes). Cette analyse se trouve dans Durand-Guerrier 1994.

[2] Voir à ce propos Grize 1990 et Duval 1993.

[3] Pour une revue détaillée de ces positions voir Engel 1989.

[4] Par exemple Noirfalise 1991; Legrand 1993; Orus-Baguena 1992; Radford 1985; El Faqhi 1991

pour analyser les processus en jeu dans l'activité mathématique. J'insiste dans cet exposé sur le rôle fondamental du calcul des prédicats comme logique pertinente pour analyser les tâches de raisonnement en mathématique.

Après avoir rappelé les principales hypothèses en psychologie cognitive, j'aborde la question sous l'angle de l'épistémologie, ce qui permet de renouveler le regard que l'on porte habituellement sur la logique dans notre communauté.

I-2 Quelques hypothèses en psychologie cognitive

A la suite des travaux de Piaget, certains auteurs ont cherché à mettre en évidence l'existence d'une logique mentale présente dans l'esprit humain, pouvant se décrire à l'aide du calcul propositionnel (Wason 1977; Politzer 1981). D'autres, comme Braine (1978) et Fodor (1975), font l'hypothèse de l'existence d'un langage mental ou "mentalais", basé sur les règles de déduction naturelle de Gentzen.[5] Ces hypothèses rentrent en conflit avec les résultats expérimentaux, principalement ceux obtenus avec les tâches censées mesurer l'adéquation des structures mentales avec l'implication matérielle du calcul des propositions.[6] Ceci a conduit certains auteurs à proposer des hypothèses alternatives: Dans un article de 1986 intitulé "Reasoning without logic", Johnson-Laird rejette l'existence d'une logique mentale et développe une théorie des modèles mentaux: il suppose que les sujets se font une représentation mentale de la situation et cherchent des contre-exemples dans la conclusion.[7] Dumont (1982) insiste sur les effets liés à la situation; Girotto (1991) sur l'importance du choix du marqueur verbal et parle de "schéma pragmatique": Duval (1988) insiste sur la place respective de l'antécédent et du conséquent, et Politzer (1991) met en évidence l'importance de la valeur informative des énoncés.
En accord avec Pascal Engel, je dirais que le problème posé ici est celui:

> "*du degré d'indépendance des structures psychologiques par rapport aux structures abstraites*". (op.cité p 392)

I-3 L'éclairage épistémologique

Dans ce qui suit, je me propose de défendre deux thèses: l'une sur la nature de la relation entre la logique des propositions et les règles de raisonnement, l'autre sur le rôle du calcul des prédicats dans la classe de mathématiques.

A- Calcul des propositions[8] et raisonnement

> La logique propositionnelle ne se propose pas de "modéliser" le raisonnement naturel, ni même le raisonnement mathématique, bien qu'elle ait été construite pour formaliser certains aspects des mathématiques.
>
> C'est une théorie de l'inférence valide, qui permet de légitimer les inférences reconnues comme valides dans le discours naturel et de contrôler des inférences moins classiques telles qu'elles peuvent apparaître dans les raisonnements mathématiques.

Je vais justifier cette affirmation en présentant rapidement l'émergence du concept d'implication de l'antiquité à nos jours, à travers quelques auteurs.

A1- Le calcul des propositions dans l'antiquité:

---

[5] Voir une analyse détaillée de ces positions dans Engel 1989 pp 381-392.
[6] Une implication matérielle est fausse dans un seul cas: lorsque son antécédent est vrai et son conséquent faux.
[7] Voir présentation dans Richard 1990 et pour une analyse critique, Engel 1989 pp 50-53.
[8] En logique, une proposition est ce qui est susceptible de porter le vrai ou le faux.

Dès l'antiquité, chez les Mégariques , on voit apparaître une première formulation de l'implication vérifonctionnelle par Philon de Mégare:

> « *Le conditionnel est vrai lorsqu'il ne commence pas par le vrai pour finir par le faux; de sorte qu'il y a pour ce conditionnel trois façons d'être vrai et une d'être faux.»* (Sextus Empiricus, cité in Blanché 1970)

A la même époque, les Stoïciens développent un système qui fait d'eux «*les précurseurs du calcul propositionnel* » (Lukasiewicz 1934). Ils définissent des syllogismes ou tropes posés a priori comme valides. Par exemple:

Si la première, la seconde;
Or la première;
Donc la seconde.

A partir de cinq tropes posés comme principes premiers et de quatre règles de formation, ils construisent d'autres figures de raisonnement valides.(Lukasiewicz 1934, Blanché 1970).

A-2 Le calcul des propositions à l'époque moderne: Frege-Russell-Wittgenstein-Quine

Reconnu depuis quelques années comme le précurseur de la logique formelle moderne, Frege (1848-1925) se propose d'extirper tout psychologisme de la logique et d'éliminer dans les raisonnements mathématiques tout recours à l'évidence. Pour cela, il crée une idéographie dont il dit que:

> "*Son premier objectif est de nous fournir le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences et de nous permettre de remonter à la source de tout ce qui y restait implicite.*" (cité in Blanché 1970)

A la même époque, Russell (1872-1970) qui veut fonder les mathématiques sur la logique, développe un symbolisme encore en usage aujourd'hui. Il définit l'implication matérielle en ces termes:(1903)

> "*Cette relation en vertu de laquelle il nous est possible de faire des inférences valides, je l'appelle implication matérielle*"

Cette notion est définie contre l'intuition, mais Russell cherche cependant à en donner une justification psychologique.
L'implication matérielle relie deux propositions; elle est fausse dans le seul cas où son antécédent est vrai et son conséquent faux. On l'appelle parfois "implication philonnienne" en référence à Philon de Mégare.
Parallèlement, Wittgenstein (1889-1951), qui a travaillé avec Frege et Russell, met en place, dans le Tractacus Logico-Philosophicus (1921), la logique des propositions comme système vérifonctionnel dont l'élément de base est la variable propositionnelle.
C'est une logique bivalente (il y a exactement deux valeurs de vérité: le Vrai et le Faux) et vérifonctionnelle (la valeur de vérité d'un énoncé ne dépend que de la valeur de vérité de ses composants). Les connecteurs sont définis par leur table de vérité. Il y a 16 connecteurs binaires qui peuvent s'exprimer à l'aide d'un petit nombre d'entre eux correspondant aux connecteurs classiques. Les constantes logiques ainsi définies "*ne renvoient à aucun objet de pensée*". Elles évoquent des systèmes de possibilités pour la vérité et la fausseté et montrent la structure des propositions. On associe à chaque énoncé sa table de vérité. Les tautologies sont des énoncés prenant la valeur Vrai pour toute distribution de valeur de vérité. Ce sont les théorèmes du calcul des propositions. Les contradictions sont des énoncés prenant la valeur Faux pour toutes les distributions de valeurs de vérité. Les tautologies et les contradictions sont:

> " *des énoncés vides de sens; mais ce ne sont pas des non sens..Elles appartiennent au symbolisme logique tout comme le zéro appartient au symbolisme arithmétique.*"

Les tables de vérités fournissent un critère de décision pour les tautologies et donc permettent les démonstrations dans ce système.

Le philosophe et logicien américain Quine n'a cessé dans toute son oeuvre de chercher à clarifier les notions logiques et l'usage qu'on en fait. Dans son ouvrage Méthode de logique (1950), il propose de distinguer quatre notions habituellement désignées par le terme *implication.* Il

appelle *Conditionnel* un énoncé conditionnel du langage courant introduit par "si"; *Conditionnel matériel* l'implication matérielle; *Faisceau de conditionnels* l'implication formelle de Russell[9]. Il réserve le terme d'*implication* aux tautologies de la forme $(S_1 \Rightarrow S_2)$, où S_1 et S_2 sont des énoncés (des schémas) du calcul des propositions.
De nombreuses règles d'inférences classiques du raisonnement déductif sont associées à l'implication au sens de Quine:

Modus Ponens: le schéma $((p \Rightarrow q) \wedge p)$ implique le schéma q[10]

Modus tollens: le schéma $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q)$ implique le schéma $\neg p$

Transitivité de la règle d'antécédent à conséquent:

le schéma $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r))$ implique le schéma $(p \Rightarrow r)$

Disjonction des cas: Le schéma $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q))$ implique le schéma q

Cette distinction entre conditionnel matériel et implication au sens de Quine renvoie à la différence entre un énoncé vrai dans une théorie mathématique donnée (un théorème de mathématiques), et un énoncé vrai pour toute substitution d'énoncés, c'est-à-dire une loi logique. Son importance pour les mathématiques tient au fait que ces lois logiques légitiment a posteriori les inférences classiques et fournissent des outils pour contrôler la validité d'inférences moins classiques, permettant ainsi d'exercer un contrôle sur des modes de raisonnement plus subtils.

Ce qui précède nous permet de conclure avec Pascal Engel (op.cité, p 392)

> "*Deux évidences apparemment contradictoires demeurent: la logique ne décrit pas, et ne peut pas décrire directement les processus du raisonnement naturel (comme si on pouvait transposer les règles de la logique au plan de la psychologie); mais elle ne peut pas non plus codifier quelque chose qui soit totalement distinct des démarches du raisonnement (comme si la logique n'était qu'un jeu abstrait sur des règles arbitraires)*"

B- Calcul des prédicats[11] et mathématiques

> Le calcul des prédicats est une extension du calcul des propositions dans laquelle la règle de la bivalence stricte ne s'applique plus.
>
> C'est la logique de référence pertinente pour l'activité mathématique.

B1- Le syllogisme aristotélicien

Développée dans les Premiers Analytiques, la théorie du syllogisme aristotélicien peut-être considérée, d'une certaine manière, comme l'ancêtre du calcul des prédicats. C'est une logique des termes et de la quantification. Certains syllogismes sont posés comme principes premiers, valides a priori: ce sont les syllogismes de la première figure. Par exemple, le syllogisme universel de la première figure

---

[9] L'implication formelle de Rusell est définie plus loin, dans le paragraphe B2.

[10] Traduction des symboles logiques utilisés: $\neg$: non; $\wedge$: et; v: ou; $\Rightarrow$: si, ...alors; $\forall$: pour tout, quelque soit: $\exists$: il existe.

[11] Un prédicat à une place exprime une propriété que peuvent vérifier ou non les éléments d'une classe donnée. « Etre pair » est un prédicat à une place.
Un prédicat à p places exprime une relation que peuvent ou non vérifier p objets donnés pris dans une classe donnée. « Etre inférieur à « est un prédicat à deux places.

Si A est affirmé de tout B
et si B est affirmé de tout C,
nécessairement A est affirmé de tout C.

Un syllogisme concluant est un syllogisme vrai pour toute substitution de termes. C'est une loi logique. Aristote s'emploie à déterminer quels sont les syllogismes concluants et il les réduit aux syllogismes de la première figure. On retrouve ici, comme chez les Stoïciens, la recherche de modes valides de raisonnement. Pour Aristote toute démonstration est un syllogisme. A propos de la vérité des énoncés, il distingue trois types de vérité:

Les énoncés vrais "de facto"

Les énoncés vrais dont la vérité est la conséquence d'un autre énoncé.

Les énoncés vrais obtenus comme conclusion d'un syllogisme universel à prémisses vraies. Une vérité de ce type est dite nécessaire.

Dans les Seconds Analytiques, il s'emploie à appliquer son système à la démonstration. Cependant, il est vraisemblable que les Premiers Analytiques sont postérieurs aux Seconds Analytiques et qu'ainsi "*la logique déductive est fille des mathématiques*" (Kline 1980 p 42)

B2: l'implication formelle de Russell

La plupart des théorèmes de mathématiques expriment une propriété universelle possédée par une certaine classe d'objets. Pour formaliser les mathématiques, Russell introduit donc l'implication formelle:

$$\forall x\ (\ P(x) \Rightarrow Q(x)\ )$$

où P et Q sont des prédicats, et x une variable décrivant une certaine classe d'objets.
La vérité d'un énoncé de cette forme exprime que pour chaque instantiation de la variable x par un objet a de la classe, le conditionnel matériel $(P(a) \Rightarrow Q(a))$ est vrai.
En particulier, il est vrai chaque fois que $P(a)$ est faux.
Par suite, la définition vérifonctionnelle de l'implication est une nécessite interne à la logique du premier ordre, qui répond à des besoins de formalisation des mathématiques.

B3: Le calcul des prédicats[12]

Le calcul des prédicats est un système formel, construit de manière syntaxique à l'aide de symboles de constantes, de relations, de fonctions, de variables, de connecteurs propositionnels et de deux quantificateurs: un quantificateur universel et un quantificateur existentiel.
On construit les termes (à l'aide des constantes; des variables et des fonctions) puis les formules atomiques (à l'aide des symboles de relations) et enfin les formules complexes (à l'aide des connecteurs logiques et des quantificateurs).
Dans une formule complexe, on peut trouver deux types de variables:

les variables liées, qui sont dans le champ (ou la portée) d'un quantificateur.

les variables libres, qui ne sont pas dans le champ d'un quantificateur.

Dans la formule "$\forall x\ (\ r(x,y) \vee t(x,y)\ )$", x est liée; y est libre.
Il en découle deux types de formules selon que la formule ne contient pas de variable libre (on dit que la formule est close) ou contient au moins une variable libre (la formule est dite non close).
Lorsqu'une formule $F(x)$ contient exactement une variable libre on peut lui associer deux formules closes: sa clôture universelle $\forall x F(x)$ et sa clôture existentielle $\exists x F(x)$.

B4-Satisfaction et vérité dans le calcul des prédicats

Il n'y a pas à proprement parler de notion de vérité dans le calcul des prédicats. Dans le système lui-même, il y a des théorèmes qui sont des énoncés universellement valides obtenus à partir des tautologies du calcul des propositions et des règles de formation. Pour parler de vérité, il est nécessaire d'interpréter le langage dans une structure, c'est-à-dire dans un ensemble non vide

[12] Pour une présentation détaillée, voir par exemple Cori et Lascar (1993) tome 1.

d'éléments sur lequel sont définies des fonctions et des relations associées aux symboles du langage.
Aux formules closes du langage, on associe des propositions qui ont donc une valeur de vérité déterminée. Il n'en va pas de même pour les formules non closes. Les énoncés obtenus contenant des variables libres, il faut instantier les variables pour obtenir une proposition. On dit alors qu'une formule contenant une variable libre est satisfaite par un élément a dans une structure donnée si la proposition obtenue en substituant cet élément à la variable dans la formule est vraie dans la structure considérée.
Pour une formule non close donnée et une structure donnée, il se peut que certains éléments satisfassent la formule et d'autres non. L'énoncé correspondant n'a donc pas de valeur de vérité déterminée. Pour pouvoir donner une valeur de vérité, il faut considérer les formules closes associées.
La clôture universelle d'une formule contenant une variable libre est vraie dans une structure donnée si cette formule est satisfaite par tous les éléments de l'ensemble sous-jacent. Sa clôture existentielle est vraie si elle est satisfaite par au moins un élément de l'ensemble.

En conséquence:

La notion centrale dans le calcul des prédicats est celle de satisfaction d'une formule non close par un élément. Pour déterminer la valeur de vérité d'un énoncé du calcul des prédicats, il faut disposer d'une structure; il faut de plus que cet énoncé ne comporte pas de variable libre. Ainsi la dichotomie vrai/faux du calcul des propositions ne s'applique pas strictement aux énoncés du calcul des prédicats.

I-4 Le calcul des prédicats, logique de référence pour l'activité mathématique.

Il est tout à fait clair que le calcul des propositions est un système trop pauvre pour formaliser les mathématiques. Le calcul des prédicats, au contraire, a été construit précisément dans ce but. Utiliser son symbolisme devient indispensable dès lors que l'on manipule des énoncés complexes. En effet, en mathématiques, on travaille essentiellement avec des variables. Les propriétés mathématiques associées aux éléments s'interprètent en termes de prédicats et ne sont pas des propositions. De plus, les énoncés non clos du calcul des prédicats sont présents de fait dans la classe de mathématiques; en voici deux exemples parmi d'autres:

a) Résoudre une équation algèbrique dans un ensemble de nombres donné, c'est déterminer les éléments qui satisfont une égalité, donc un prédicat.

b) Déterminer le graphe d'une relation binaire sur un ensemble E, c'est déterminer l'ensemble des couples de ExE qui satisfont cette relation.

Par contre, les propriétés attribuées aux structures s'interprètent, dans ces structures, en termes de formules closes. Ce sont des propositions. Par exemple, le théorème
"*Toute fonction continue sur un intervalle de R est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle*"
est une propriété de l'ensemble des fonctions numériques réelles, sur lequel on a défini la continuité et construit l'intégrale de Riemann.
La notion de vérité étant relative à la structure dans laquelle on interprète une formule close, le domaine de référence des objets manipulés est essentiel, même pour des énoncés très simples. Prenons l'énoncé suivant:

"*Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.*"

C'est une propriété vérifiée par chaque élément de l'ensemble des losanges.
C'est une propriété caractéristique des losanges si l'on considère l'ensemble des parallélogrammes
C'est une propriété vérifiée par les losanges, mais aussi par d'autres éléments, si on se place dans l'ensemble des quadrilatères.
Enfin, un théorème est un énoncé dont la clôture universelle est vraie et la règle d'inférence fondamentale en mathématique est la suivante:

Pour tout x, si p(x) alors q(x)
Or p(a)
Donc nécessairement q(a)

Notons que l'on retrouve ainsi la notion de nécessité déjà présente chez Aristote.

Nous pouvons conclure avec cette citation de Gilles Gaston Granger(1994, p 79):

> "*Le passage de cette théorie de l'objet en général aux théories d'objets proprement mathématiques comporte me semble-t-il deux étapes caractéristiques. La première déjà mentionnée, insuffisamment reconnue peut-être, comme décisive, est la superposition d'une théorie des prédicats au simple calcul des énoncés*" [13]

Je me propose maintenant de montrer à l'aide d'un exemple que cette importance vaut aussi pour l'analyse a priori des tâches expérimentales en didactique.

II- Le labyrinthe: analyse d'une tâche donnée en mathématique

Il est classique de considérer les tâches expérimentales censées mesurer les aptitudes au raisonnement comme relevant du simple calcul propositionnel. Or comme je l'ai montré à propos de la tâche de sélection de Wason (op cité), l'interprétation dans le calcul des prédicats permet de mieux rendre compte des processus cognitifs en jeu dans la tâche et de reconsidérer, de manière positive, certaines réponses obtenues aux questions posées.

L'exemple qui va suivre illustre ce phénomène et met en évidence une "distance" entre les conceptions des élèves et les conceptions des professeurs relativement à la nature de la tâche proposée.

II-1 Présentation de la tâche

-------- insérer document --------

Cet item a été proposé dans le cadre d'une évaluation organisée par l'Association des Professeurs de Mathématiques dans les classes d'enseignants volontaires en fin de Seconde en 1991, dans la rubrique Argumentation-raisonnement-expression[14]. Les résultats obtenus lors de cette épreuve apparaissent, pour les auteurs, comme surprenants et difficiles à interpréter.

Avant de commenter les résultats et les analyses proposées dans l'article, je vais faire une analyse de la structure logique des phrases proposées:

II-2 Analyse de la tâche

a) Du point de vue de la logique "naturelle"

(Le point de vue "logique naturelle" s'oppose ici simplement au point de vue "formalisation de la tâche" qui sera développée plus loin.)

X est le nom d'une personne qui a traversé le labyrinthe; on pourrait tout aussi bien l'appeler Pierre ou Paul. La population à laquelle appartient la personne X n'est pas spécifiée.

La personne X étant donnée, chaque phrase de la forme "*X est passée par Z*" où Z désigne une pièce donnée du labyrinthe est susceptible de recevoir une valeur de vérité puisque X a effectivement réalisé la traversée du labyrinthe.

---

[13] Autrement dit au calcul des propositions

[14] EVAPM91/2 Evaluation du programme de mathématiques Seconde 1991, Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement public.

Par suite chacune des phrases de la forme "*si X est passée par Z, alors X est passée par W*" où Z et W désignent des pièces données est susceptible de recevoir une valeur de vérité, valeur de vérité qui dépend exclusivement de la valeur de chacun des composants. Les six phrases sont donc des propositions.

La phrase 1 "*X est passée par P*" est fausse car P ne possède aucune porte; il est donc impossible que X soit passée par P.

La phrase 2 est vraie car pour sortir du labyrinthe, il faut passer par R, et donc par Q; or pour passer par Q, il faut passer par N. On ne peut donc pas sortir sans passer par N. la personne X est sortie; elle est donc passée par N.

Pour la phrase 3, on ne peut pas savoir car on peut traverser le labyrinthe en passant par M (par exemple: CDILMNQR); mais il est aussi possible de le traverser sans passer par M (par exemple: CBGFONQR). Ne connaissant pas le trajet de X, on ne peut pas savoir si X est passée par M. Celui qui doit répondre à la question ne peut pas dire si cette phrase est vraie ou fausse. Pour X, qui sait quel est son trajet, cette phrase est soit vraie, soit fausse.

La phrase 4 est vraie car on ne peut pas passer par O sans passer par F (en effet O a exactement deux portes dont l'une donne sur F). Donc dès que l'antécédent est vrai, le conséquent l'est aussi. L'implication ne peut donc pas être mise en défaut.

La phrase 5 est vraie pour une raison similaire.

Pour la phrase 6, il se peut que l'antécédent soit vrai et le conséquent faux, par exemple si X a emprunté le trajet: (CDILMNQR); cette phrase peut donc être fausse; mais il se peut aussi qu'elle soit vraie, par exemple si X a emprunté le trajet :(CDIJKLMNQR).
Comme celui qui doit répondre ne connaît pas le trajet de X, il ne peut pas savoir si la phrase est vraie ou fausse.

Ce qui précède montre que pour répondre aux questions, il est fait appel aux modalités du nécessaire (il faut), du possible, de l'impossible et du contingent (on ne peut pas savoir)
D'autre part, les arguments donnés pour les phrases 3 et 6 montrent qu'en fait, ici ce qui compte est moins la "personne" que le "trajet", et ce tant du point de vue cognitif, comme le montre ce qui précède, que du point de vue d'une formalisation possible comme je vais le montrer.

b) Formalisation de la tâche en utilisant la variable *trajet*

On peut définir la variable *trajet* comme une suite finie de lettres prises parmi les lettres de A à T.
On peut alors considérer l'ensemble **T** des trajets permettant de traverser le labyrinthe. Chaque élément t de **T** est une suite finie de lettres prises parmi les lettres de A à T et vérifiant certaines conditions. Par exemple: la suite commence par C; se termine par NQR; ne contient ni A, ni P, niS, ni T.... et compte tenu de ce que l'on ne peut pas passer deux fois par la même porte, le nombre de trajets possibles est fini et on peut décrire complètement **T.**

t étant un trajet, on dira qu'une pièce Z est élément de t si la lettre Z apparaît dans la suite t. On associe ainsi à chaque pièce du labyrinthe un prédicat à valeur dans **T.**

Une personne X ayant traversé le labyrinthe étant donnée, on peut lui associer son trajet t_X, et les phrases se traduisent alors par les énoncés suivants:
E_1: P est élément de t_X
E_2: N est élément de t_X
E_3: M est élément de t_X
E_4: si O est élément de t_X, alors F est élément de t_X
E_5: si K est élément de t_X, alors L est élément de t_X
E_6 si L est élément de t_X, alors K est élément de t_X

Notons que l'énoncé E_6 est la réciproque de l'énoncé E_5.
t_x est maintenant une interprétation de la variable trajet t, et on peut associer à chacune des phrases une formule non close du calcul des prédicats:

F_1: $P \in t$ F_2: $N \in t$ F_3: $M \in t$

F_4: $(O \in t) \Rightarrow (F \in t)$ F_5: $(K \in t) \Rightarrow (L \in t)$ F_6: $(L \in t) \Rightarrow (K \in t)$

Pour chacune de ces formules, on peut considérer leur clôture universelle et leur clôture existentielle dans **T**.

Pour F_1, elles sont toutes les deux fausses. Par suite, pour chaque interprétation de t, l'énoncé correspondant est faux; en particulier E_1 est faux.

Pour F_2, la clôture universelle est un énoncé vrai dans **T**.
Par suite, pour chaque interprétation de t, l'énoncé correspondant est vrai; en particulier l'énoncé E_2 est vrai.

Pour F_3, la clôture universelle est un énoncé faux, tandis que la clôture existentielle est un énoncé vrai.
La valeur de vérité de l'énoncé associé à F_3 dans **T** dépend de l'interprétation de la variable t.
Par suite, on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de E_3.

Pour F_4, la clôture universelle est vraie; ainsi l'énoncé E_4 est vrai; il en de même pour F_5 et E_5.

Pour F_6, la clôture universelle est fausse et la clôture existentielle est vraie; on est dans le même cas que pour F_3, et donc on ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de E_6.

II-3 Le point de vue des auteurs: analyse et commentaires

Si on regarde les résultats obtenus et l'analyse qu'en font les auteurs, on constate que la réponse attendue par ceux-ci à chacune des questions est en accord avec celle que nous avons donné pour les phrase 1 à 5, mais diffère pour la phrase 6, qu'ils considèrent comme étant fausse, ce qui les conduit à rejeter la réponse "*on ne peut pas savoir*" que donnent la plupart des élèves.

Pour comprendre la divergence constatée pour la réponse à cette dernière question, on doit considérer que, pour les auteurs, dans les phrases 4, 5 et 6, X joue le rôle de variable quantifiée, et que la question qu'ils pensent poser en 6 est :
Est-il vrai que pour toute personne X ayant traversé le labyrinthe, si X est passée par L, alors X est passée par K?

C'est en tout cas ce que laisse entendre le commentaire suivant:

> "*Les phrases 4 à 6 posent un problème manifeste aux élèves:*
> *Appartiennent-elles au langage courant? Dans ce cas il peut en effet arriver que, dans une situation semblable, on ne s'interroge que sur la véracité de la seconde partie de l'assertion (mais pas toujours, que l'on pense aux enquêtes policières!)*
> *S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'interpréter de façon globale? Dans ce cas, ce qui importe est la qualité d'un lien entre deux assertions et non la véracité particulière de chacune des assertions*"

Ce qui est exprimé dans la dernière phrase, c'est la différence entre l'implication matérielle et l'implication formelle. Ainsi, pour les auteurs, l'expression "*si.., alors*" qui apparaît dans les questions 4, 5 et 6 doit être entendue comme étant universellement quantifiée.

Ceci appelle plusieurs remarques:

1) Si l'on considère que, pour les auteurs de l'article, la dernière phrase est quantifiée implicitement, alors X désigne la variable "*personne*". Dans ce cas, il y a un changement de statut pour X qui est considérée comme variable non quantifiée dans 3, alors qu'elle est considérée comme universellement quantifiée dans 6 et ce sans aucun indice dans la formulation qui permettrait aux élèves d'envisager ce changement. Ceci s'apparente à une rupture de contrat.

2) Dans l'épreuve, à aucun moment il n'est parlé de la population de référence, ce qui exclut a priori toute quantification. En outre, même si on avait la population de référence, il faudrait rajouter l'hypothèse que tous les trajets possibles sont réalisés, faute de quoi on ne pourrait pas attribuer de valeur de vérité à certains énoncés quantifiés (c'est le cas par exemple pour la phrase 6). On l'a vu, la variable pertinente est la variable "*trajet*".

Le fait qu'il y ait rupture de contrat pourrait être contesté par l'argument suivant:

Dans la classe de mathématique, l'expression "si,..alors" désigne toujours un conditionnel implicitement quantifié.

On peut alors objecter que les réponses des élèves révèlent que cet implicite n'est pas partagé. En effet, la réponse majoritaire est appuyée par des arguments illustrés par la phrase suivante, citée par les auteurs dans leur commentaire:

> "*La phrase n°6 n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K, mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec L, évitant ainsi le passage par K.*"

Dans cette phrase, il est clair que X désigne une personne ayant effectivement réalisé la traversée (on peut remplacer X par Pierre) et que l'argument porte sur le trajet réalisé.

En conclusion de leur analyse, les auteurs s'étonnent que

> "*La réussite à cet item se révèle indépendante, voire corrélée négativement avec la réussite aux démonstrations à contenu mathématique de l'épreuve T, avec la moyenne d'année attribuée par les enseignants, avec le score obtenu dans l'épreuve de la première passation.*"

Si l'on considère l'analyse précédente, l'échec à cet item mesure la distance entre le point de vue des élèves sur cet item et le point de vue des enseignants, et non des difficultés liées au maniement de l'implication. Le fait que la quantification implicite n'aille pas de soi, et soit même inadaptée à la situation proposée n'est pas perçue par les auteurs. Or c'est précisément ce point qui explique l'écart avec les réponses des élèves.

Conclusion

Je retiendrai pour conclure trois points.

Le premier concerne la nécessite d'une analyse fine de la nature des tâches censées mesurer les aptitudes au raisonnement. Dans l'exemple étudié, l'analyse de la structure logique de la tâche à l'aide du calcul des prédicats permet d'expliciter la nature de la variable pertinente pour la situation et d'interpréter les propositions comme des instantiations d'énoncés non clos. D'autre part, elle met en évidence le fait que celui qui doit répondre à la question ne dispose pas, dans certains cas, des informations nécessaires pour répondre par oui ou par non, et que cela est lié à l'existence, ou non, d'une règle générale.

Le second tient à la particularité du sens que revêt l'expression "*si,..alors*" en mathématique, laquelle traduit dans la plupart des cas une implication formelle, donc universellement quantifiée. Dans la tâche du labyrinthe, les réponses proposées par les auteurs montrent que ceux-ci prennent en compte la possibilité de la réponse "*on ne peut pas savoir*", mais qu'ils la réfutent dans le cas où la phrase comporte un conditionnel, ce qui tend à prouver que la difficulté se joue autour des différentes notions que recouvre le terme *implication.*

Le troisième point porte sur la quantification universelle implicite des énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques. Cette pratique très répandue et non partagée par les élèves[15] nous conduit à considérer dans la classe non pas deux pôles, mais trois, à savoir: la logique de sens commun, qui se situe plutôt du côté de l'élève, la logique de l'enseignant de mathématique, avec une pratique largement répandue de quantification implicite, et la logique formelle, qui se distingue des deux précédentes, sans leur être totalement étrangère.
Je fais l'hypothèse que cette pratique de quantification universelle implicite pourrait être à l'origine d'obstacles didactiques résistants comme on peut le constater en premier cycle universitaire: problèmes des "réciproques"; nature des objets mathématiques manipulés; difficultés liées à la déduction (sens du mot "donc" en mathématiques) etc...La vérification expérimentale de cette hypothèse est en cours.

BIBLIOGRAPHIE

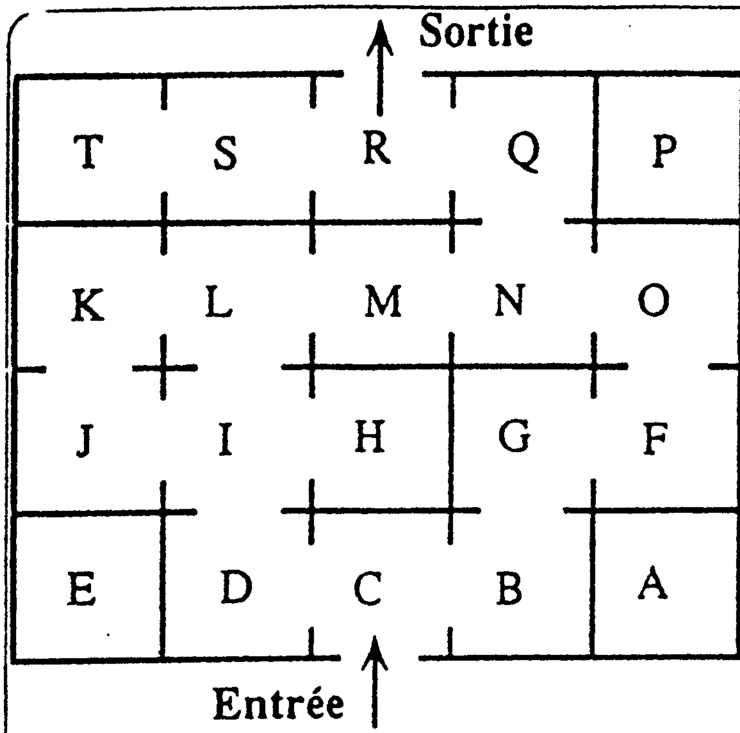
ARISTOTE *Les premiers analytiques* Traduction Jean Tricot. Vrin: Paris 1993
ARISTOTE *Les seconds analytiques* Traduction Jean Tricot. Vrin: Pari 1987
BLANCHE,R.(1970) *La logique et son histoire d'Aristote à Russell.* Armand Colin: Paris
BLANCHE,R.(1973) *Le raisonnement.* PUF: Paris
BRAINE,M.1978 On the relations between the natural logic of reasoning and standard logic *in Psychological review n°85* pp1-21 cité in Engel 1989.
CORI,R.& LASCAR,D. (1993) *Logique mathématique Cours et exercices* Tome 1. Masson: Paris
DUMONT B. (1982) L'influence du décor et du langage dans des épreuves de type logique portant apparemment sur l'implication logique. *Educationnal Studies in mathematics* n° 13, pp 409-429
DURAND-GUERRIER,V. (1994) Problèmes de raisonnement et de logique chez les élèves de terminales C et de premier cycle universitaire scientifique; les difficulté liées à l'implication; questions méthodologiques in *Actes du Premier Colloque Jeunes Chercheurs en Sciences cognitives,* Université Joseph Fourier Grenoble I
DURAND-GUERRIER,V.(1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement Mathématique dans une perspective didactique, *Actes du Colloque GDR-INRP Différents types de savoirs et leurs articulations.* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble (A paraître)
DUVAL,R.(1988) Ecarts sémantiques et cohérences mathématiques: introduction aux problèmes de congruences, *in Annales de didactique et de sciences cognitives, vol.1,* IREM de Srasbourg
DUVAL,R.(1993) Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive, *Petit X* n°31, pp 37-61, Grenoble

[15] Voir aussi Durand-Guerrier 1995, op cité.

El FAQHI,E.M.(1991) *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.
ENGEL,P. (1989) *La norme du vrai, philosophie de la logique*. Gallimard: Paris
FREGE,G. (1971) *Ecrits logiques et Philosophiques*, traduction et introduction de Claude Imbert. Seuil: Paris
FODOR,J. (1975) *The language of thought* MIT Press, Bradford Books, Cambridge Mass., cité in ENGEL 1989
GIROTTO,V. (1991) Reasoning on deontics rules: the pragmatic schemas approach, *Intellectica* n¯ 11, pp 15-52
GRANGER,G.G. (1994) *Formes, opérations, objets*. Vrin: Paris
GRIZE,J.B. (1990) *Logique et langage*, Ophrys
JOHNSON-LAIRD,P.N. (1986) Reasoning without logic, in T.Meyers, K.Brown & B.McGonigle (Eds) *Reasoning and discourse processes*,14-49, Academic press: London.
KLINE,M. (1980) *Mathématiques, la fin de la certitude*, Traduction Française Christian Bourgois Editeur, 1989
LEGRAND,M. (1993) Débat scientifique en cours de Mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-IREM* n¯10, pp 123-159
LUKASIEWICZ,J.(1934) Contribution à l'histoire de la logique des propositions in LARGEAULT,J.(1972) *Logique mathématique Textes*
NOIRFALISE,R. (1991) La logique des A.R.L., *Bulletin de liaison IREM de Clermont-ferrand* n¯43/44, pp 47-55
ORUS BAGUENA Pilar (1992) *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux
POLITZER,G.(1981) Differences in interpretation of implication, *American Journal of Psychology* n¯ 94, pp 461-477, cité in RICHARD (1990)
POLITZER,G.(1991) L'informativité des énoncés: contraintes sur le jugement et le raisonnement. *Intellectica* n¯11, pp 111-147
QUINE,W.V.O (1950) *Methods of logic*, Holt, Rinehart & Winston; Traduction française Armand Colin, 1972
RADFORD,L.(1985) *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitements logiques, contributions à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée*. Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.
RICHARD,J.F. (1990) *Les activités mentales: comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Armand Colin: Paris
RUSSELL,B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in RUSSELL, Ecrits de logique philosophique. PUF: Paris 1989
WASON,P.C. & JOHNSON-LAIRD,P.N. (1977) A theoretical analysis of insight into a reasoning task, in JOHNSON-LAIRD,P.N. & WASON,P.C. (Eds) *Thinking: readings in cognitive science*, Open university 143-157, cité in RICHARD (1990)
WITTGENSTEIN,L.(1921) *Tractacus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française, Gallimard, 1961.

Le labyrinthe

(Extraits de la Brochure EVAPM2/91)



<u>Voici un labyrinthe</u>

Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, <u>sans jamais être passée deux fois par la même porte.</u>

Les pièces sont nommées A, B, C.... comme il est indiqué sur la figure.

Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase "X est passé par C" est une phrase VRAIE.
En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des 6 phrases suivantes, dire si elle VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

- **Phrase n°1 : "X est passé par P"**
- **Phrase n°2 : "X est passé par N"**
- **Phrase n°3: "X est passé par M"**
- **Phrase n°4 : "Si X est passé par O, alors X est passé par F"**
- **Phrase n°5 : "Si X est passé par K, alors X est passé par L"**
- **Phrase n°6 : "Si X est passé par L, alors X est passé par K"**