Raymond Viard

# Calcul de Malliavin et développement asymptotique de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1994, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-48
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994___2_A10_0>

# Calcul de Malliavin et développement asymptotique de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov

**Raymond Viard**

IRMAR, UNIVERSITE DE RENNES I, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES.

Résumé : On considère, une famille paramétrée de chaînes de Markov de paramètre $\varepsilon$, d - dimensionnelles admettant une probabilité invariante $\eta^\varepsilon$, telle que $\eta^\varepsilon$ converge en loi vers la masse de Dirac en 0 lorsque $\varepsilon$ tend vers 0. On donne au moyen du calcul de Malliavin, des conditions permettant un développement asymptotique de la densité $f^\varepsilon$ de la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ de la forme :

$$f^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-\frac{I(y)}{2\varepsilon^2}} \{c_0(y) + \varepsilon c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N c_N(y) + \varepsilon^{N+1} R(\varepsilon, y)\}.$$

Mots clés : Calcul de Malliavin,Chaîne de Markov, Grandes Déviations, équations aux différences aléatoire.

**Malliavin calculus and asymptotic expanding for the density of a Markov chain invariant probability**

Abstract : We consider a parametrize family of $\mathbb{R}^d-$valued Markov chains with parameter $\varepsilon$, with with an invariant probability $\eta^\varepsilon$. Suppose that $\eta^\varepsilon$ converges in distribution to the Dirac mesure if $\varepsilon$ tend to 0. Using Malliavin calculus, we give sufficient conditions to obtain an asymptotic expanding for the density $f^\varepsilon$ of the invariant probability $\eta^\varepsilon$, manely :

$$f^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d} e^{-\frac{I(y)}{2\varepsilon^2}} \{c_0(y) + \varepsilon c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N c_N(y) + \varepsilon^{N+1} R(\varepsilon, y)\}.$$

Key words : Malliavin Calculus, Markov Chain, Large deviations, stochastic differences equations.

# 1. Introduction

## 1.1. Notations et résultats généraux

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On considère sur cet espace, une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^\beta$, de même loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance la matrice identité sur $\mathbb{R}^\beta$, notée $\lambda = \mathcal{N}(0, I_\beta)$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta \to \mathbb{R}^d$ mesurable. On considère la famille de chaînes de Markov $\left((X_n^\varepsilon)_{n\geq 0}\right)_{\varepsilon>0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$(1) \qquad \begin{cases} X_0^\varepsilon = x \text{ ,où } x \in \mathbb{R}^d \\ \text{et, pour } n \geq 1 \\ X_n^\varepsilon = \varphi(X_{n-1}^\varepsilon, \varepsilon Z_n) = \varphi_n(x, \varepsilon Z_1, \cdots, \varepsilon Z_n) \end{cases}$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{R}^\beta$ on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, z_1) := \varphi(x, z_1) \\ \text{et, pour } n \geq 2 \\ \varphi_n(x, z_1, \cdots, z_n) := \varphi(\varphi_{n-1}(z_1, \cdots, z_{n-1}), z_n), \end{cases}$$

on notera $(X_n^\varepsilon)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov partant de 0.

**Définition 1.1.** *Nous dirons que la famille de variable aléatoire $(Y^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, suit un principe de grande déviation (voir par exemple M.I.Freidlin et*

*A.D.Wentzell [4] ou D.W.Stroock [16] ou encore Y.Kifer [7]) de fonction d'action (ou fonction d'énergie) I si la fonction I vérifie les 2 propriétés suivantes :*

1. *$I$ ($I : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$) est une fonction semi-continue inférieurement, telle que pour tout $a \geq 0$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : I(x) \leq a\}$ est compact dans $\mathbb{R}^d$.*
2. *$I$ est telle que:*
   (a) *Si $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ alors :*
   $$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P[Y^\varepsilon \in O] \geq -inf\{I(x) : x \in O\}.$$
   (b) *Si $F$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$ alors :*
   $$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P[Y^\varepsilon \in F] \leq -inf\{I(x) : x \in F\}$$

**Remarque :**

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, lorsque $\varphi$ est continue, la famille $(X_n^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1}$ suit un principe de grande déviation en $\varepsilon$, de fonction d'action $I_n/2$ définie, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, par :

$$(2) \qquad I_n(y) = \inf_{(z_1,\cdots,z_n)\in \mathbb{R}^{\beta\times n}} \{\sum_{i=1}^n ||z_i||^2 : \varphi_n(0, z_1, \cdots, z_n) = y\}$$

Notons, lorsqu'elle existe, $\eta^\varepsilon$ la probabilité invariante associée à la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous donnons, au moyen du calcul de Malliavin et par des passages à la limite en loi, des conditions impliquant que la probabilité $\eta^\varepsilon$ possède une densité $f^\varepsilon$ que l'on peut développer en $\varepsilon$ jusqu'à l'ordre N en un point $y_0$ du support de $\eta^\varepsilon$ pour $\varepsilon$ suffisamment proche de zéro.

On considère les hypothèses suivantes :

$(H.1.(k))$ On suppose que $\varphi(0,0) = 0$.

$$\begin{cases} \varphi \text{ est de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta, \\ \sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)|| = \delta < 1 \\ \text{et } \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leq p+q \leq k, \text{ on ait} \\ \\ \sup_{x,z} ||D^{p+q}_{x^p z^q}\varphi(x,z)|| < +\infty. \end{cases}$$

(C) Sous l'hypothèse $(H_1(1))$ on suppose que $D_x\varphi$ est inversible sur $I\!R^d \times I\!R^\beta$ et qu'on a $\sup_{x,z} ||(D_x\varphi(x,z))^{-1}|| < +\infty$, on posera $b = \sup_{x,z} ||(D_x\varphi(x,z))^{-1}||$ et $\gamma := 1/b$.

Soient $y_0$ un point de $I\!R^d$ et $n_0$ un entier

$(H.2)$ si pour $n \geq n_0$ $I_n(y_0)$ est fini alors il existe un unique point $(z_1^n, \cdots, z_n^n)$ de $I\!R^{\beta \times n}$ vérifiant

$\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n) = y$ et $I_n(y) = \sum_{i=1}^{n} ||z_i^n||_\beta^2$.

$(H.3)$ sous l'hypothèse $(H.2)$ pour tout $n \geq n_0$ il existe un réel $c_0$ strictement positif tel que

$$|detU_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)| \geq c_0$$

**Remarque :** Pour tout $z_1, \cdots, z_n \in I\!R^\beta$ et tout $x \in I\!R^d$ on définit la matrice $d \times d$ de type positif $U_n(x, z_1, \cdots, z_n)$ par:

$$\begin{aligned} U_n(x, z_1, \cdots, z_n) &= D_{z_1,\cdots,z_n}\varphi_n(x, z_1, \cdots, z_n)(D_{z_1,\cdots,z_n}\varphi_n(x, z_1, \cdots, z_n))^T \\ &= D_z\varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \cdots, z_{n-1}), z_n)(D_z\varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \cdots, z_{n-1}), z_n))^T \\ &\quad + D_x\varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \cdots, z_{n-1}), z_n)U_{n-1}(x, z_1, \cdots, z_{n-1}) \\ &\quad .(D_x\varphi(\varphi_{n-1}(x, z_1, \cdots, z_{n-1}), z_n)^T \end{aligned}$$

(3)

**Remarque :** On notera

$$D\varphi_n(x, z_1, \cdots, z_n) := D_{z_1,\cdots,z_n}\varphi_n(x, z_1, \cdots, z_n).$$

Si $(H.1.(1))$, est vérifée ainsi que (C), on pose :

(4) $C(x,z) := (D_x\varphi(x,z))^{-1}.D_z\varphi(x,z) \times (D_z\varphi(x,z))^T.(D_x\varphi(x,z))^{-1,T}$,

$(A^T$ : transposée de $A)$.

Si, de plus $(H.2)$ est vérifiée on pose, pour tout $1 \leq i \leq n$ :

(5) $$C_i^n(x,z) = C(x, z + z_i^n).$$

$(B.1)$ soit $y_0 \in I\!R^d$, d'énergie $I(y_0) < r$, soit $n_1 \in I\!N$, supposons qu'il existe un entier $n_0 > n_1$ et une constante strictement positive $c_1$, dépendants de $y_0$, tels que :

$$\alpha_\varepsilon := \sup_{n \geq N_0} \sup_{0 \leq i \leq n - N_1} \sup_{x \in I\!R^d, y \in I\!R^d - \{0\}} \lambda(\{z \in I\!R^\beta : y^T.C_i^n(x, \varepsilon z).y \leq c_1||y||^2\}) < 1.$$

(6)

En posant $z_0^n := 0$ pour tout $n \geq n_0$.

$(B.2)$ Il existe une constante $c_2$ strictement positive telle que, pour tout $x$ et tout $y$ de $I\!R^d$ :

$$y^T.U_1(x,0).y \geq c_2||y||^2.$$

**Remarques :**

1. L' hypothèse ($H$.1.(1)) entraîne l'existence, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, une probabilité invariante (voir l'annexe) notée $\eta^\varepsilon$.

2. L'hypothèse ($H$.1.(1)) entraîne l'unicité de la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ pour la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, en considérant $X_n^\varepsilon(x) - X_n^\varepsilon$ (où $X_n^\varepsilon(x)$ est la chaîne de Markov, associée à (1), partant de $x$ dans $\mathbb{R}^d$), on obtient, avec $\sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)|| < 1$ que $X_n^\varepsilon(x)$ converge aussi en loi, quand $n \to +\infty$, vers $X_\infty^\varepsilon$. D'où le résultat.

3. 0 est attracteur global pour le système dynamique $\varphi_n(.,0,0,\cdots,0)$ associé à la famille de chaîne de Markov $(X^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. En effet, sous l'hypothèse $\sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)|| = \delta < 1$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $||\varphi_n(x,0,\cdots,0)|| \leq \delta^n ||x||$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x,0,\cdots,0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

4. $I(x)$ est limite décroissante des $I_n(x)$, donc si $I(x) < r$ alors il existe un entier $n_0(x)$ a partir duquel pour tout $n \geq n_0(x)$ on ait $I_n < r$.

En posant $I(x) = \inf_{n\geq 1} I_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Les remarques 1, 2 et 3 nous permettent d'énoncer un lemme analogue au théorème 4.3, chap 4, de M.I.Freidlin et A.D.Wendzell [4].

**Lemme 1.2.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble régulier de frontière $\partial A(= \overline{A} - A)$ compacte . Nous avons :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \log \eta^\varepsilon(A) = -\inf\{I(x), x \in A\}. \tag{7}$$

*$A$ est un ensemble régulier si* $\inf\{I(x), x \in \overline{A}\} = \inf\{I(x), x \in int(A)\}$ *, où $int(A)$ désigne l'intérieur de $A$.*

**Théorème 1.3.** *Sous les hypothèses ($H$.1.(2)), ($B$.1), et ($C$) si $\alpha_\varepsilon < \gamma^{4d}$ alors la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ possède une densité $f^\varepsilon$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

*Preuve :* voir le corollaire 7.5..

**Remarque :** Comme dans [3] ou [5] on peut obtenir des conditions entraînant l'existence, pour la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$, d'une densité $f^\varepsilon$ de classe $C^p$.

**Théorème 1.4.** *Sous les hypothèses* $(H.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(B.1)$, $(C)$ *et si il existe un réel* $\epsilon_N > 0$ *tel que pour tout* $0 < \epsilon < \epsilon_N$ $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dq_0(N+2)}$ *(où* $q_0$ *est défini dans la proposition 3.1. ), alors :*

*a) la probabilité invariante* $\eta_\varepsilon$ *admet une densité notée* $f_\varepsilon$,

*b) et* $f_\varepsilon$ *admet un développement asymptotique en* $\varepsilon$, *en tout point* $y \in I\!R^d$ *d'énergie* $I(y) < r$ *(r est défini dans la proposition 3.1.), jusqu'à l'ordre N de la forme :*

$$(8) \qquad f_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}.e^{-\frac{I(y)}{2\epsilon^2}}.(c_0(y) + \varepsilon.c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N.c_N(y) + \varepsilon^{N+1}.R_{N+1}(\varepsilon, y))$$

*,avec* $R_{N+1}(\varepsilon, y)$ *borné en* $\varepsilon$. □

*Preuve :* voir le théorème 6.3. ainsi que les corollaires 7.5. et 7.6..

**Proposition 1.5.** *Les hypothèses* $(H.1.(1))$, $(H.2)$ *et* $(C)$ *ainsi que la condition* $(B.2)$ *entraînent d'une part les hypothèses* $(H.3)$ *et* $(B.1)$, *d'autre part pour tout* $p > 1$ *il existe un réel* $\epsilon_p > 0$ *tel que pour tout* $0 < \epsilon < \epsilon_p$ *on ait* $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dp}$ *(où* $\alpha_\epsilon$ *est défini dans l'hypothèse* $(B.1)$*).*

*Preuve :* 1) La condition $(B.2)$ implique l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in B(0, \eta)$ (où $B(0, \eta)$ désigne la boule ouverte de $I\!R^\beta$ de centre 0 et de rayon $\eta$) et tout $x, y \in I\!R^d$

$$y^T.U_1(x, z).y|| \geq c_2||y||^2/2.$$

D'autre part si $I(y) < r$ alors il existe un entier $n_0(y)$ tel que pour tout $n \geq n_0(y)$ $I_n(y) = \sum_{i=1}^{n} ||z_i^n||^2 < r$, donc il existe au plus $K(< [r/\eta^2]$, où $[.]$ désigne la partie entière d'un nombre réel) points $(z_i^n)$ à l'extérieure de $B(0, \eta)$. Dans le pire des cas, d'après l'expression de la matrice de Malliavin déterministe (cf l'égalité 3), on obtient pour tout $n \geq \sup(n_0(y), K)$

$$||U_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)|| \geq c_0 \text{ avec, } c_0 := \gamma^{K-1}c_2/2.$$

D'où l'hypothèse $(H.3)$.

2) D'après la proposition 2.2. pour tout $n \geq n_0$ il existe une unique constante $\lambda_n \in I\!R^d$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$ :

$$2.z_i^n = -\lambda_n^T.D_x\varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n)\cdots D_x\varphi(\varphi_{i+1}^n, z_{i+1}^n)D_z\varphi(0, z_i^n) = 0.$$

D'où $||z_i^n|| \leq ||\lambda_n||\delta^{n-i}K/2$ où $K := \sup_{x,z} ||D_z\varphi(x, z)|| < +\infty$, de plus la remarque fondamentale 25 nous dit que $||\lambda_n|| \leq 2\sqrt{r/c_0}$.

Ainsi il existe un entier $n_1 \in I\!N$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n - n_1$ $||z_i^n|| \leq \eta/2$ il suffit de prendre $n_1 > \log(\eta\sqrt{c_0}/2K\sqrt{r})/\log\delta$.

Sous les hypothèses $(H.2)$ et $(C)$ posons :

$$\alpha_\epsilon := \sup_{x\in I\!R^d} \sup_{y\in I\!R^d/\{0\}} \sup_{n\geq n_0} \sup_{1\leq i\leq n-n_1} \lambda(\{Z : y^T C_i^n(x, \epsilon Z + z_i^n)y \leq c_1||y||^2\}),$$

où $c_1 < \gamma^2 c/2$.

D'après ce qui pressède $\alpha_\epsilon \leq P[||\epsilon Z|| \geq \eta/2] \leq \exp(-\eta^2/8\epsilon^2)$. Donc $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dp}$ (voir le théorème 1.4.) dès que $\epsilon < \sqrt{\eta^2/16dp\ln(b)}$.

**Corollaire 1.6.** *Lorsque les hypothèses $(H.1.(2n+5))$, $(H.2)$, $(C)$ et $(B.2)$ sont vérifiées alors pour $\epsilon$ suffisamment proche de 0 :*

*a) la probabilité invariante $\eta^\epsilon$ possède une densité notée $f^\epsilon$,*

*b) de plus $f^\epsilon$ admet un développement asymptotique en $\epsilon$, en tout point $y \in I\!R^d$ d'énergie $I(y) < r$ (avec $r$ défini dan la proposition 3.1.), jusqu'à l'ordre $N$ de la forme :*

$$(9) \qquad f_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}.e^{-\frac{I(y)}{2\epsilon^2}}.(c_0(y) + \varepsilon.c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N.c_N(y) + \varepsilon^{N+1}.R_{N+1}(\varepsilon, y))$$

*,avec $R_{N+1}(\varepsilon, y)$ borné en $\varepsilon$.* $\square$

## 1.2. Applications :

### 1.2.1. Equations aux différences aléatoires :

On considère le cas particulier de (1) suivant.

$$\varphi(x, z) = A(z)x + B(z),$$

avec $A : I\!R^\beta \to M(d)$, $B : I\!R^\beta \to I\!R^d$ et $A$, $B$ mesurables.

[$M(d)$ désigne l'espace des matrices $d \times d$ à coefficients réels].

(1) s'écrit alors , pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$(10) \qquad \begin{cases} X_0^\varepsilon = 0 \\ \text{et, pour } n \geq 1 \\ X_n^\varepsilon = A(\varepsilon Z_n)X_{n-1}^\varepsilon + B(\varepsilon Z_n) \end{cases}$$

(10) est une "équation aux différences aléatoires" et il s'agit du cas où il y a indépendance : la suite de variables aléatoires, à valeurs dans $M(d) \times I\!R^d$,

$(A(\varepsilon Z_n), B(\varepsilon Z_n))_{n\geq 1}$ est formée, pour chaque $\varepsilon > 0$, de termes indépendants (et de même loi). ( pour une étude plus détaillée de (10), voir A.K.Grintsevicius [6] et W.Versaat [14]; voir E.Le Page [9] par exemple dans le cas général).

Considérons les hypothèses suivantes : $(H'.1.(k))$ On suppose que $B(0) = 0$.

$$\begin{cases} A, B \text{ sont de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}^\beta \text{ avec,} \\ \sup\limits_z ||A(z)|| = \delta < 1 \\ \text{et } \forall p \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leq p \leq k, \text{ on ait} \\ \\ \sup\limits_z ||D^p_{z^p} A(z)|| < +\infty \\ \sup\limits_{x,z} ||D^p_{z^p} A(z).x + D^p_{z^p} B(z)|| < +\infty. \end{cases}$$

La condition $(C)$ devient ici :

$(C)$ $A(z)$ est inversible en tout point $z$ de $\mathbb{R}^\beta$. Et on a :

$\sup\limits_z ||A(z)^{-1}|| = b < +\infty$. On notera aussi $\gamma := 1/b \leq \delta < 1$.

$$C(x,z) := A(z)^{-1}(D_z A(z).x + D_z B(z))(D_z A(z).x + D_z B(z))^T A(z)^{-1,T}.$$

$(B'.2)$ On a : $D_z A(0) = 0$ et $D_z B(0).D_z^T B(0) \neq 0$.

On a alors le corollaire suivant :

**Corollaire 1.7.** *Sous les hypothèses $(H'.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(B'.2)$, et $(C)$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ a une densité $f^\varepsilon$ admettant un développement asymptotique en $\varepsilon$, en un point $y$ d'énergie $I(y) < r$ , jusqu'à l'ordre $N$ de la forme suivante:*

$$(11) \quad f^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}.e^{-\frac{I(y)}{2\varepsilon^2}}.(c_0(y) + \varepsilon.c_1(y) + \cdots + \varepsilon^N.c_N(y) + \varepsilon^{N+1}.R_{N+1}(\varepsilon, y)),$$

*avec $R_{N+1}(\varepsilon, y)$ borné en $\varepsilon$.*

### 1.2.2. Application à certains processus de sauts.

On se donne une famille de processus Markovien de sauts $(Y_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, admettant une probabilité invariante $\eta^\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, solution d'une équation stochastique de la forme :

$$(12) \qquad \begin{cases} Y_0^\varepsilon = x \\ \text{et, pour } t > 0, \\ Y_t^\varepsilon = x + (c(Y_-^\varepsilon) * \mu^\varepsilon)_t \end{cases}$$

avec $c : I\!R^d \times I\!R^\beta \to I\!R^d$, et avec $(\mu^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ famille de mesures de Poisson sur $I\!R^+ \times I\!R^\beta$ de compensateur $\nu^\varepsilon(dt \times dz) = \varepsilon dt \times \lambda(\frac{dz}{\varepsilon})$ où,

$$\lambda(dz) = (\sqrt{2\pi})^d e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} dz.$$

Si on lui associe l'application :

$$\varphi(x, z) = x + c(x, z)$$

on alors le corollaire suivant :

**Corollaire 1.8.** *Sous les hypothèses $(H.1(2N+5))$, $(H.2)$, $(B.1)$, et $(C)$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0, $\eta^\varepsilon$ possède une densité $f^\varepsilon$ admettant un développement asymptotique en $\varepsilon$, en un point $y_0$ d'énergie $I(y_0) < r$ , jusqu'à l'ordre $N$ de la forme suivante:*

$$f^\varepsilon(y_0) = \frac{1}{\varepsilon^d}.e^{-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2}}.(c_0 + \varepsilon.c_1 + \cdots + \varepsilon^N.c_N + \varepsilon^{N+1}.R_{N+1}(\varepsilon)), \tag{13}$$

*avec $R_{N+1}(\varepsilon)$ borné en $\varepsilon$*

*Preuve :*

On associe au processus de sauts $Y^\varepsilon$ la chaîne de Markov $X^\varepsilon$ solution de (1) et tel que pour tout $n \in I\!N^*$ on ait $X_n^\varepsilon = Y_{T_n^\varepsilon}^\varepsilon$, où $T_n^\varepsilon$ est le n-ième temps de saut de $\mu^\varepsilon$. Il est alors facile de voir que $\eta^\varepsilon$ est aussi la probabilité invariante de la chaîne de Markov $X^\varepsilon$. D'où le résultat demandé. ∎

## 1.3. Rappels sur le calcul de Malliavin:

Pour commencer rappelons deux résultats classiques qui sont à la base de l'étude de la régularité de la densité des lois étudiées par la calcul de Malliavin (Voir ; 1) ii) s'obtient au moyen de la transformation de Fourier, 2) et 1) i) par la théorie des distributions).

**Lemme 1.9.** *Soit $\Phi = (\Phi^i)_{i \le d}$ une variable $d-$ dimensionnelle. On a d'une part :*

1. *si $n \ge 1$ et s'il existe $C_n > 0$ tel que, pour toute $f \in C_b^n(I\!R^d)$, tout multi-indice $\alpha$ tel que $|\alpha| \le n$, on ait :*

   $$|I\!E[D_{x^\alpha}^\alpha f(\Phi)]| \le C_n.||f||_\infty, \tag{14}$$

   *alors:*

*(i) si $n = 1$, la loi de $\Phi$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesque de $\mathbb{R}^d$,*

*(ii) si $n \geq d+1$, la loi de $\Phi$ a une densité de classe $C^{n-d-1}$.*

*D'autre part on a :*

2. *si $n \geq 1$ et si, pour tout multi-indice $\alpha$ tel que $|\alpha| \leq n$, il existe une variable aléatoire réelle $\Psi_\alpha \in \mathbb{L}^{d+\varepsilon}(P)$ pour un $\varepsilon > 0$, telle que, pour toute $f \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$, on ait :*

$$\mathbb{E}[D^\alpha_{x^\alpha} f(\Phi)] = \mathbb{E}[f(\Phi).\Psi_\alpha], \tag{15}$$

*alors la loi de $\Phi$ a une densité de classe $C^{n-1}$.*

□

On note, pour $i \geq 1$ et $n \geq 1$, $\mathcal{R}_i(n)$ la classe des variables aléatoires réelles $\Phi$ de la forme $\Phi = F(Z_1, \cdots, Z_n)$ avec $F : \mathbb{R}^{\beta \times n} \to \mathbb{R}$ de classe $C_b^i$(: ensemble des fonctions de classes $C_i$ bornée ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $i$ ). On définit également $\mathcal{R}_i$ par $\mathcal{R}_i = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}_i(n)$.

$\mathcal{R}_i$ est stable par $C_p^i$( l'ensemble des fonctions de classes $C^i$ à croissance polynômiale ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $i$ ). Sous l'hypothèse $(H_1(2))$, $X_n^{\varepsilon,j}$, j-ième composante de $X_n^\varepsilon$, est un élément de $\mathcal{R}_2$ (pour tout $j = 1, \cdots, d$). On définit l'opérateur $L$ par la formule :

$$L(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \triangle_{z_i} F(Z_1, \cdots, Z_n) + (D_{z_i} F(Z_1, \cdots, Z_n))^T, \tag{16}$$

où $\Phi = F(Z_1, \cdots, Z_n)$ ($\triangle_{z_i} F$ désigne le Laplacien de l'application $Z_i \to F(Z_1, \cdots, Z_n)$).

On définit de même sur $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1$ l'opérateur bilinéaire associé :

$$\Gamma(\Phi, \Psi) = \sum_{i=1}^{n} D_{z_i} F(Z_1, \cdots, Z_n)(D_{z_i} G(Z_1, \cdots, Z_n))^T, \tag{17}$$

où $\Phi = F(Z_1, \cdots, Z_n)$ et $\Psi = G(Z_1, \cdots, Z_n)$. $\Gamma$ est appelé "l'opérateur carré du champ" associé à $L$. On a alors, si L est l'opérateur linéaire introduit précédement (sur $\mathcal{R}_2$) et si $\Gamma$ est son opérateur carré du champ, la formule d'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } \Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (\mathcal{R}_2)^d, \Psi \in \mathcal{R}_1 \text{ et } f \in C_p^1(\mathbb{R}^d), \text{ on a,} \\ \text{pour } j = 1, \cdots, d : \\ \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi).\Gamma(\Phi^i, \Phi^j)).\Psi] = -\mathbb{E}[f(\Phi).\{2\Psi.L\Phi^j + \Gamma(\Psi, \Phi^j)\}] \end{cases} \tag{18}$$

En notant, pour $\Phi = (\Phi^i)_{i \leq d} \in (\mathcal{R}_2)^d$, $U(\Phi) = (\Gamma(\Phi^i, \Phi^j))_{i,j \leq d} = \Gamma(\Phi, \Phi)$, on obient alors le résultat suivant :

**Proposition 1.10.** *Si* $\Phi = (\Phi^i)_{i\leq d} \in (\mathcal{R}_2)^d$, $\Theta_n \in \mathcal{R}_1(n)$ *et* $f \in C^1_p(\mathbb{R}^d)$, *on a, pour* $i = 1, \cdots, d$ *et* $l$ *entier* $\geq 0$ *:*

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\mathbb{E}[\frac{\partial f}{\partial x^i}(\Phi).(det(U(\Phi)))^{l+2}.\Theta_n] \\ &= \mathbb{E}[f(\Phi).(det(U(\Phi)))^l.H^i(U(\Phi), L(\Phi), \Gamma(U(\Phi), \Phi), \Gamma(\Theta_n, \Phi))]. \end{aligned}$$

*Avec* $H^i : M(d) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{T}_3(d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $C^\infty_p$. *(det(M) désigne le déterminant de la matrice carré M et* $\mathcal{T}_3(d)$ *l'ensemble des tableaux à trois indices* $T = (t_{i,j,k})_{i,j,k\leq d}$. *M(d) désigne l'ensemble des matrices* $d \times d$ *à coefficients réels*

Notons, pour tout $\varepsilon \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$R^n_1(\varepsilon) = \int_0^1 D\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z^n_1, \cdots, \varepsilon t Z_n + z^n_n)(Z_1, \cdots, Z_n)dt.$$

**Remarque :**

1. Pour $\varepsilon = 0$, la matrice de Malliavin $\Gamma(R^n_1(0), R^n_1(0))$ est déterministe et vaut :

   $$(20) \qquad \Gamma(R^n_1(0), R^n_1(0)) = \Gamma((R^n_1(0))^i, (R^n_1(0))^j) = U_n(0, z^n_1, \cdots, z^n_n)$$

   On la notera $U_n$, avec $U_n(0, z^n_1, \cdots, z^n_n)$ définie page 4 .De plus, sous l'hypothèse $(B1)$ avec $I(y_0) < r$, pour $n$ suffisamment grand cette matrice est inversible.

2. Pour $\varepsilon > 0$ la matrice de Malliavin vaut :

   $$\Gamma(R^n_1(\varepsilon), R^n_1(\varepsilon)) = U_n(0, \varepsilon Z_1 + z^n_1, \varepsilon Z_2 + z^n_2, \cdots, Z_n + z^n_n).$$

   On la notera $U_n(\varepsilon)$. De plus, si l'on note, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

   $$U^{n,\varepsilon}_i := U_i(o, \varepsilon Z_1 + z^n_1, \varepsilon Z_2 + z^n_2, \cdots, \varepsilon Z_i + z^n_i)$$

   en particulier $U^{n,\varepsilon}_n = U_n(\varepsilon)$ et l'on a :

   $$(21) \qquad \begin{aligned} U^{n,\varepsilon}_i &= D_z\varphi(\varphi^{n,\varepsilon}_{i-1}, \varepsilon Z_i + z^n_i)(D_z\varphi(\varphi^{n,\varepsilon}_{i-1}, \varepsilon Z_i + z^n_i))^T \\ &+ D_x\varphi(\varphi^{n,\varepsilon}_{i-1}, \varepsilon Z_i + z^n_i)U^n_{i-1}(x, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})(D_x\varphi(\varphi^{n,\varepsilon}_{i-1}, \varepsilon Z_i + z^n_i)^T \end{aligned}$$

   , avec $\varphi^{n,\varepsilon}_i = \varphi_i(o, \varepsilon Z_1 + z^n_1, \varepsilon Z_2 + z^n_2, \cdots, \varepsilon Z_i + z^n_i)$, pour $i \geq 1$ et $\varphi^{n,\varepsilon}_0 = 0$ pour $i = 0$.

## 2. Présentation du problème :

A partir de maintenant nous considérons la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n\geq 0}$ partant de 0. Nous allons, avant de développer formellement la densité $f^\varepsilon$ au point $y_0$, dans un premier temps faire apparaitre les termes $1/\varepsilon^d$ et $\exp(-I_n(y_0)/2\varepsilon^2)$. Rappelons, tout d'abord, que si $\eta^\varepsilon$ admet une densité $f^\varepsilon$ nous avons alors sous l'hypothèse $(H.1.(1))$ l'égalité suivante (voir le lemme A1. de l'annexe) :

$$
\begin{aligned}
f^\varepsilon(y_0) &= \lim_{\nu\to 0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g_\nu(X_n^\varepsilon - y_0)] \\
&= \lim_{\nu\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} g_\nu(x-y_0).\eta^\varepsilon(dx)
\end{aligned} \tag{22}
$$

où $(g_\nu)_{\nu\geq 0}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ ( l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$) convergent vers la masse de Dirac en zéro au sens des distributions.

**Remarques :**

1) On peut aussi considérer la chaîne de Markov $(X_n^\epsilon(x))_{n\geq 0}$ partant de $x \in \mathbb{R}^d$.

2) Dans l'annexe on montre, sous l'hypothèse $(H.1.(1))$, en utilisant le théorème de Inonescu-Tulcea-Marinescu, outre l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante l'égalité suivante (voir le lemme A.1) :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n^\epsilon)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\eta^\epsilon(dx),$$

ceci pour toute fonction $f$ appartenant à $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$.

Soit $g$ une fonction appartenant à $\mathcal{C}_K^\infty$ allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, posons

$g_\nu(x) = \nu^d g(x/\nu)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout réel $\nu > 0$. Alors la famille de fonctions $(g_\nu)_{\nu>0}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}_K^\infty$ et vérifie $\lim_{\nu\to 0} g_\nu = \delta_0$ au sens des distributions.

Recentrons la chaîne de Markov $(X_n^\varepsilon)_{n\geq 0}$ autour du point extrémal de l'hypothèse $(H.2)$.

**Proposition 2.1.** *Pour toute fonction $g$ mesurable on a l'égalité suivante :*

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] = e^{-\frac{I_n(y_0)}{2\epsilon^2}}.\mathbb{E}[g(\frac{\varphi_n(0,\varepsilon Z_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon Z_n + z_n^n) - y_0}{\varepsilon}).\exp(-\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^n Z_i^T.z_i^n)]$$

*Démonstration :* En effet, $\mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] =$

$$\int_{\mathbb{R}^{\beta\times n}} g(\frac{\varphi_n(0,\varepsilon z_1,\cdots,\varepsilon z_n)-y_0}{\varepsilon}).\exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n ||z_i||^2).dz_1\cdots dz_n$$

En posant pour tout $1\leq i\leq n$, $z_i' = z_i - \frac{z_i^n}{\varepsilon}$ on obtient :

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{\beta\times n}} g(\frac{\varphi_n(0,\varepsilon z_1'+z_1^n,\cdots,\varepsilon z_n'+z_n^n)-y_0}{\varepsilon}).\exp(-\frac{1}{2\epsilon^2}\sum_{i=1}^n ||z_i' + \frac{z_i^n}{\varepsilon}||^2).dz_1'\cdots dz_n'$$

ainsi,

$$\mathbb{E}[g(\tfrac{X_n^\varepsilon - y_0}{\varepsilon})] = e^{-\frac{I_n(y_0)}{2\epsilon^2}}\int_{\mathbb{R}^{\beta\times n}} g(\frac{\varphi_n(0,\varepsilon z_1'+z_1^n,\cdots,\varepsilon z_n'+z_n^n)-y_0}{\varepsilon})$$

$$\exp(-\sum_{i=1}^n(\frac{||z_i'||^2}{2}+\frac{z_i'^T.z_i^n}{\varepsilon})).dz_1'\cdots dz_n').$$

D'où le résultat. ∎

Lors de cette transformation de Girsanov, il apparait une terme de dérive en $1/\varepsilon$ que nous devons transformer pour pouvoir le contrôler lorsque l'on fait tendre $\varepsilon$ vers 0.

**Proposition 2.2.** *Si l'on suppose que $I_{n_0}(y_0) < r$. Alors, sous les hypothèses $(H.1.(1))$,*

*$(H.2)$ et $(H.3)$, pour tout $n\geq n_0$, il existe une constante $\lambda_n\in\mathbb{R}^d$, fonction du point extremal $(z_1^n,\cdots,z_n^n)$, telle que :*

$$\sum_{i=1}^n Z_i^T.z_i^n = -\frac{1}{2}\lambda_n^T.D\varphi_n(0,z_1^n,\cdots,z_n^n)(Z_1,\cdots,Z_n), \tag{23}$$

*où* $D\varphi_n(0,z_1^n,\cdots,z_n^n)(Z_1,\cdots,Z_n) =$

$$D_z\varphi(\varphi_{n-1}^n,z_n^n)(Z_n)+\cdots+D_x\varphi(\varphi_{n-1}^n,z_n^n)\cdots D_x\varphi(\varphi_2^n,z_2^n)D_z\varphi(0,z_1^n),$$

*si l'on note, pour tout entier $1\leq i\leq n$ $\varphi_i^n := \varphi_i(0,z_1^n,\cdots,z_i^n)$.*

*Démonstration :* Le calcul du point extremal $(z_1^n,\cdots,z_n^n)$ est un problème d'extrema liés. On est amené à minimiser le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}_n((z_1,\cdots,z_n),\lambda_0,\lambda_n) = \lambda_0\sum_{i=1}^n ||z_n||^2 + \lambda_n^T.(\varphi_n(0,z_1,\cdots,z_n)-y_0). \tag{24}$$

Comme, pour $n \geq n_0$, $det[(D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n))^T D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)]$ est différent de 0, on peut poser $\lambda_0 = 1$, de plus $\lambda_n$ est unique. (voir l'hypothèse $(H.3)$).

Pour que $(z_1^n, \cdots, z_n^n)$ soit un point extremal on a pour tout $1 \leq i \leq n$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial z_i}((z_1^n, \cdots, z_n^n), 1, \lambda_n) = 0$$

C'est à dire,

$$\begin{aligned}
&2.z_n^n + \lambda_n^T.D_z\varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n) && = 0. \\
&. \\
&. \\
&. \\
&2.z_1^n + \lambda_n^T.D_x\varphi(\varphi_{n-1}^n, z_n^n)\cdots D_x\varphi(\varphi_2^n, z_2^n) D_z\varphi(0, z_1^n) && = 0.
\end{aligned}$$

D'où, le résultat. ∎

**Remarque fondamentale :** D'après la démonstration précédente, pour $n \geq n_0$, on a:

$$4\sum_{i=1}^{n} ||z_i^n||^2 = (\lambda_n)^T (D\varphi_n(O, z_1^n, \cdots, z_n^n))^T D_n\varphi(O, z_1^n, \cdots, z_n^n)\lambda_n.$$

On en déduit, d'après les hypothèses $(B)$, $(C)$ et l'expression de $D\varphi_n$ en fonction de $D_x\varphi$ et de $D_z\varphi$ :

$$r > I_n(y_0) = \sum_{i=1}^{n} ||z_i||^2 \geq \frac{c\gamma^2}{4} ||\lambda_n||^2, \tag{25}$$

Lorsque $I_n(y_0) < r$.

On montre ainsi que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ est bornée en norme dans $\mathbb{R}^d$. On peut donc trouver une sous suite $(\theta_0(n))_{n \geq 0}$ telle que $\lambda_{\theta_0(n)}$ converge dans $\mathbb{R}^d$ lorsque n tend vers l'infini.

**Proposition 2.3.** *Pour $n \geq N(y_0)$, sous les hypohèses précédentes on a l'égalité suivante :*

$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[g_\nu(X_n^\varepsilon - y_0)] = \frac{1}{\varepsilon^d} \exp(-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2})$$
$$\lim_{\nu \to 0} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[g_\nu(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0) \exp(\frac{-1}{2\varepsilon^2}\lambda_n^T.(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n))]$$

*où, $\varphi_n^{n,\varepsilon} = \varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_n + z_n^n)$.*

*Démonstration :* Pour approcher la fonction $\delta_0$, on peut prendre une suite de fonctions $(g_\nu)_{\nu > 0}$ telle que $g_\nu$ soit $\mathcal{C}_b^\infty$ à support dans $B(0, r_\nu) \subset \mathbb{R}^d$, avec $r_\nu$ tendant vers 0 lorsque $\nu$ tend vers 0. Ainsi, en considérant l'ensemble $A$ des $\omega$ de $\Omega$ vérifiant $||\varphi_n^{n,\varepsilon}(\omega) - y_0|| \leq r_\nu$ (de probabilité 1), le terme ajouté est de l'ordre $\exp(-r_\nu.||\lambda_n||/\varepsilon^2)$, il disparait lorsque $n$ tend vers l'infini puis $\nu$ vers 0. ∎

**Proposition 2.4.** *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, si $y_0$ est un point du support de $\eta^\varepsilon$, nous avons :*

$$(26)\quad \lim_{\nu\to 0}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[g_\nu(\varphi_n^{n,\epsilon} - y_0)e^{\lambda_n^T R_2^n(\epsilon)/2}] = \lim_{\nu\to 0}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\epsilon^d}\mathbb{E}[g_\nu(\frac{\varphi_n^{n,\epsilon} - y_0}{\epsilon})e^{\lambda_n^T R_2^n(\epsilon)/2}],$$

*en posant* $R_2^n(\epsilon) := (\varphi_n^{n,\epsilon} - y_0 - \epsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n))/\epsilon^2$.

*Démonstration :* immédiate. ■

Nous pouvons maintenant effectuer un développement limité en $\varepsilon$ jusqu'à l'ordre $N$, avec un reste intégral, du terme:

$$\mathbb{E}[g(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon}).\exp(\frac{-1}{2\varepsilon^2}\lambda_n^T.(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n))].$$

Nous aurons besoin pour cela de quelques notations.

**Notations 2.5.** *On pose $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ un multi-indice de $\mathbb{R}^d$.*

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ *et* $D_{x^\alpha}^\alpha g(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}} g(x_1, \cdots, x_d)$, *où $g$ est une fonction de classe $C^{|\alpha|}$ allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.*

**2.6.** *On note pour tout $l$ (avec $1 \le l \le n$) et tout $\varepsilon \ge 0$ :*

$$(27)\quad \begin{cases} D_l^0(n,\varepsilon) := \varphi_l(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_k + z_l^n), \\ D_l^1(n,\varepsilon) := D\varphi_l(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_l + z_l^n)(Z_1, \cdots, Z_l) \\ . \\ . \\ . \\ \text{et, pour } k \ge 2 : \\ D_l^k(n,\varepsilon) := D^k\varphi_l(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_l + z_l^n)(Z_1, \cdots, Z_l)^k \end{cases}$$

**2.7.** *Pour $\varepsilon \ge 0$, et tout $l$ (avec $1 \le l \le n$) on note :*

$$(28)\quad \begin{cases} R_0^n(\varepsilon, l) := D_l^0(n,\varepsilon), \\ \text{et, pour } k \ge 1 : \\ R_k^n(\varepsilon, l) := \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D_l^k(n, \varepsilon t)dt. \end{cases}$$

**2.8.** *Avec, en particulier pour $l = n$ :*

$$(29)\begin{cases} R_0^n(\varepsilon) := \varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_n + z_n^n), \\ R_1^n(\varepsilon) := \int_0^1 D\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n)dt \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{et, pour } k \geq 2 : \\ R_k^n(\varepsilon) := \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D^k\varphi_n(0, \varepsilon t Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon t Z_n + z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n)^k dt, \end{cases}$$

*et pour $\varepsilon = 0$ :*

$$(30) \qquad \begin{cases} R_0^n := y_0 \\ \cdots \\ R_1^n := D\varphi_n(0, Z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n) \\ \text{et, pour } k \geq 2 : \\ R_k^n := \frac{1}{k!} D^k\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n)^k. \end{cases}$$

*Pour $k \geq 1$ les variables $R_k^n$ sont des formes k-linéaires en $(Z_1, \cdots, Z_n)$ donc de classe $C^\infty$ en ces variables, de plus $R_1^n$ est une variable aléatoire Gaussienne.*

**2.9.** *Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, et $l$ $(1 \leq l \leq n)$ on définit les ensembles suivants:*

$$(31)\begin{cases} \mathcal{C}_0^{k,\varepsilon}(n,l) := \left\{ \Gamma((R_1^n(\varepsilon,l))^{i_0}, (R_1^n(\varepsilon,l))^{i_1}); (R_2^n(\varepsilon,l))^{i_2}, \cdots, (R_k^n(\varepsilon,l))^{i_k}, \right. \\ \left. \text{avec } i_1, i_k \in \{1, \cdots, d\} \right\}. \\ \mathcal{C}_1^{k,\varepsilon}(n,l) := \left\{ L(R_1^i(\varepsilon,l)), \Gamma((R_1^n(\varepsilon,l))^j, \Psi), \ \Psi \in \mathcal{C}_0^{k,\varepsilon}(n,l), \ i,j \in \{1, \cdots, d\} \right\} \\ \bigcup \mathcal{C}_0^{k,\varepsilon}(n). \\ \text{et, pour } p \geq 2 : \\ \mathcal{C}_p^{k,\varepsilon}(n,l) := \left\{ L(R_1^i(\varepsilon)), \Gamma((R_1^n(\varepsilon,l))^j, \Psi), \ \Psi \in \mathcal{C}_{p-1}^{k,\varepsilon}(n,l), \ i,j \in \{1, \cdots, d\} \right\} \\ \bigcup \mathcal{C}_{p-1}^{k,\varepsilon}(n,l). \end{cases}$$

**2.10.** *Si $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n,l)$ est bien définie, on note $W_l^{\varepsilon,n}(k,j)$ la variable multidimensionnelle dont les composantes sont toutes les variables aléatoires réelles qui constituent $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n,l)$.*

**2.11.** *Lorsque $l = n$ on note $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n)$ l'espace corespondant et $W_n^\varepsilon(k,j)$ la variable multidimensionnelle (à valeurs dans un espace de dimension indépendante de $n$, notée $d(k,j)$) dont les composantes sont des éléments de $\mathcal{C}_j^{k,\varepsilon}(n)$.*

**2.12.** *Enfin, les $P_{\alpha,j}^k$, pour $j \leq k$, seront des fonctions polynômiales, en les variables $W_n^\varepsilon(r,0)$ et $\lambda_n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

**Remarques :**

1) Sous les hypothèses $(H.1.(N+1))$ et $(H.2)$ on a, pour tout $n \geq 1$ :

$$\varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_n + z_n^n) = y_0 + \varepsilon R_1^n + \cdots + \varepsilon^N R_N^n + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^n(\varepsilon).$$

2) Par construction $\mathcal{C}_i^{k,\epsilon}(n) \subseteq \mathcal{C}_j^{k,\epsilon}(n)$ dés que $i \leq j$.

**Proposition 2.13.** *Sous l' hypothèse $(H_1(N+3))$ on a, pour toute fonction $g$ appartenant à $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ :*

$$\mathbb{E}\Big[g(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon}).\exp[\frac{-1}{2\varepsilon^2}\lambda_n^T.(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n))]\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[g(R_1^n(\varepsilon).\exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n(\varepsilon)}{2})\Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[g(R_1^n).\exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\Big] + \varepsilon\mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\Big\{g(R_1^n)P_0^1(W_n(3,0), \lambda_n)$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n)P_{\alpha,1}^1(W_n(2,0), \lambda_n)\Big\}\Big] + \cdots + \tag{32}$$

$$\frac{\varepsilon^N}{N!}\mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\Big\{\sum_{k=0}^{[\frac{N+1}{2}]}\sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n)P_{\alpha,k}^N(W_n(N+2-k,0), \lambda_n)$$

$$+ \sum_{k=[\frac{N+1}{2}]+1}^{N}\sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n)P_{\alpha,k}^N(W_n(k+1,0), \lambda_n)\Big\}\Big] + \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!}R^{N+1}(n, \varepsilon),$$

*où, $R^{N+1}(n,\varepsilon)$ est le reste intégral du développement limité et vaut :*

$$R^{N+1}(n,\varepsilon) =$$
$$\int_0^1 (1-t)^N \mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^{n,\varepsilon t}}{2})\Big\{\sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]+1}\sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n,\varepsilon t})P_{\alpha,k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(N+3-k,0), \lambda_n)$$

$$+ \sum_{k=[\frac{N}{2}]+2}^{N+1}\sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n,\varepsilon t})P_{\alpha,k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(k+1,0), \lambda_n)\Big\}\Big]dt \tag{33}$$

*Démonstration :* On effectue un développement limité, avec reste intégral, en $\varepsilon$, jusqu'à l'ordre $N$ de la quantité :

$$g(\frac{\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0}{\varepsilon}).\exp[\frac{-1}{2\varepsilon^2}\lambda_n^T.(\varphi_n^{n,\varepsilon} - y_0 - \varepsilon D\varphi_n(0, z_1^n, \cdots, z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n))].$$

Puis, on passe à l'espérance en permutant les deux intégrales au niveau du reste. ∎

Pour pouvoir justifier le passage à la limite en $n$ puis en $\nu$, nous avons besoin de contrôler les termes intervenant dans le développement limité et dans le reste intégral.

# 3. contrôle

Commençons par contrôler le terme exponentiel.

**Proposition 3.1.** *Sous les hypothèses* $(H.1.(3))$, $(H.2)$, $(H.3)$, *et* $(C)$ *avec* $I(y_0) < r$ *(où* $r = \dfrac{c\gamma^2}{\beta^2(K')^2(1+K')^4}$, *où* $K' = \dfrac{K}{1-\delta}$ *avec*

$$K = \sup_{x,z}\left(||D_z\varphi(x,z)||, ||D^2_{z^2}\varphi(x,z)||, ||D^2_{x^2}\varphi(x,z)||, ||D^2_{x,z}\varphi(x,z)||\right) < \infty,$$

*et* $\delta = \sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)|| < 1$) *alors il existe un entier* $n(y_0) \geq n_0$, *dépendant de* $y_0$, *et un réel* $p_0 > 1$ *tel que:*

$$\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1}\ \sup_{n\geq n(y_0)} \mathbb{E}[\exp(-\frac{p_0}{2}\lambda_n^T.R_2^n(\varepsilon))] < \infty \tag{34}$$

*Nous noterons* $q_0$ *le réel vérifiant* $1/q_0 + 1/p_0 = 1$.

*Démonstration :* On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(-\tfrac{p_0}{2}\lambda_n^T.R_2^n(\varepsilon))] &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbb{E}[(\frac{p_0}{2}\lambda_n^T.R_2^n(\varepsilon))^k] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{p_0||\lambda_n||}{2})^k\mathbb{E}[||R_2^n(\varepsilon)||^k]\end{aligned}$$

Il nous reste à majorer convenablement $\mathbb{E}[||R_2^n(\varepsilon)||^k]$.

Lorsque $\varepsilon \geq 0$ :

$$R_2^n(\varepsilon) = \int_0^1 (1-t)D^2\varphi_n(0, \varepsilon tZ_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon tZ_n + z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n)^2 dt.$$

d'où,

$$||R_2^n(\varepsilon)||_{\mathbb{L}^k} \leq \frac{1}{2}.\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} ||D^2\varphi_n(0, \varepsilon Z_1 + z_1^n, \cdots, \varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_1, \cdots, Z_n)^2||_{\mathbb{L}^k}.$$

Comme,

$$D_n^2(n,\varepsilon) = D^2\varphi_n(0,\varepsilon Z_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_1,\cdots,Z_n)^2 = D_{z^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)^2$$

$$+D_{x^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_n + z_n^n)(D\varphi_{n-1}(0,\varepsilon Z_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1,\cdots,Z_{n-1}))^2$$

$$+2D_{x,z}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)\ D\varphi_{n-1}(0,\varepsilon Z_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1,\cdots,Z_{n-1})$$

$$+D_x\varphi(\varphi_{n-1}^n,z_n^n)D^2\varphi_{n-1}(o,\varepsilon Z_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1,\cdots,Z_{n-1})^2.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire sur les normes, on est ramené à majorer les quatre termes de droite de l'égalité ci-dessus.

Etudions tout d'abord la quantité

$$D_{n-1}^1(n,\varepsilon) = D\varphi_{n-1}(0,\varepsilon Z_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_1,\cdots,Z_{n-1})$$

$$= D_z\varphi(\varphi_{n-2}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)(Z_{n-1}) + D_x\varphi(\varphi_{n-2}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_{n-1} + z_{n-1}^n)D_{n-2}^1(n,\varepsilon),$$

on a alors :

$$\mathbb{E}[||D_{n-1}^1(n,\varepsilon)||^k]^{\frac{1}{k}} \leq K||Z_{n-1}||_{\mathbb{L}^k} + \delta||D_{n-2}^1(n,\varepsilon)||,$$

les variables aléatoires $Z_i$ sont identiquement distribuées on en déduit, par récurrence sur $n$ :

$$\mathbb{E}[||D_{n-1}^1(n,\varepsilon)||^k]^{\frac{1}{k}} \leq \frac{K}{1-\delta}||Z_1||_{\mathbb{L}^k}.$$

D'où,

$$||D_{x^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_n + z_n^n)(D_{n-1}^1(n,\varepsilon))^2||_{\mathbb{L}^k} \leq K.\frac{K^2}{(1-\delta)^2}||Z_1||_{\mathbb{L}^k}^2$$

et

$$||D_{x,z}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)D_{n-1}^1(n,\varepsilon)||_{\mathbb{L}^k}|| \leq K||Z_1||_{\mathbb{L}^k}\frac{K}{1-\delta}||Z_1||_{\mathbb{L}^k}.$$

Enfin, $||D_{z^2}^2\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\epsilon},\epsilon Z_n + z_n^n)(Z_n)^2|| \leq K||(Z_1)^2||_{\mathbb{L}^k}$ avec $||(Z_1)^2||_{\mathbb{L}^k} := \mathbb{E}[\ ||Z_1||^{2k}]^{\frac{1}{k}}$.

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire pour les normes $\mathbb{L}^k$, on obtient :

$$\begin{aligned} ||D_n^2(n,\varepsilon)||_{\mathbb{L}^k} &\leq K||(Z_1)^2||_{\mathbb{L}^k} + \tfrac{K^3}{(1-\delta)^2}||Z_1||_{\mathbb{L}^k}^2 \\ &+\tfrac{2K^2}{1-\delta}||Z_n||_{\mathbb{L}^k}||Z_1||_{\mathbb{L}^k} + \delta||D_{n-1}^2(n,\varepsilon)||_{\mathbb{L}^k}, \\ &\leq K(1+\tfrac{2K}{1-\delta}+\tfrac{K^2}{(1-\delta)^2})||(Z_1)^2||_{\mathbb{L}^k} + \delta||D_{n-1}^2(n,\varepsilon)||_{\mathbb{L}^k}. \end{aligned}$$

D'où, par récurrence sur $n$ :

$$||D_n^2(n,\varepsilon)||_{\mathbb{L}^k} \leq K'(1+K')^2\mathbb{E}[||Z_1||^{2k}]^{\frac{1}{k}},$$

en posant $K' = \dfrac{K}{1-\delta}$.

Calculons $\mathbb{E}[||Z_1||^{2k}]^{\frac{1}{k}}$ avec $Z_1 = (Z_1^1, \cdots, Z_1^\beta)$, où les $Z_1^i$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||Z_1||^{2k}]^{\frac{1}{k}} &= \mathbb{E}[(||Z_1^1||^2 + \cdots + ||Z_1^\beta||^2)^k]^{\frac{1}{k}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\beta} \mathbb{E}[||Z_1^i||^{2k}]^{\frac{1}{k}} = \beta \mathbb{E}[||Z_1^1||^{2k}]^{\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

Le moment d'ordre $2k$ d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ valant $\dfrac{(2k)!}{2^k k!}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(-\tfrac{p_0}{2}\lambda_n^T.R_2^n(\varepsilon))] &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{p_0||\lambda_n||}{4}.K'(1+K')^2\beta)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{p_0||\lambda_n||}{8}.K'(1+K')^2\beta)^k C_{2k}^k.\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k C_{2k}^k = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$, pour $|x| < \frac{1}{4}$.

On doit donc avoir, $p_0||\lambda_n||.K'(1+K')^2\beta < 2$.

Donc pour que $p_0 > 1$, il suffit que pour $n \geq n_0$, $||\lambda_n||^2 < (\dfrac{2}{\beta K'(1+K')^2})^2$.

D'autre part en supposant que $I(y_0) < r$ on peut trouver un entier $n(y_0) \geq n_0$, dépendant de $y_0$ tel que pour tout entier $n \geq N(y_0)$ on ait aussi $I_n(y_0) < r$. On a alors, d'après la remarque fondamentale de l'introduction (voir l'inégalité (25)), pour tout $n \geq n(y_0)$ :

$$||\lambda_n||^2 \frac{c\gamma^2}{4} \leq I_n(y_0) < r$$

Donc pour avoir $p_0 > 1$, il suffit de choisir :

$$r = \frac{c\gamma^2}{\beta^2 (K')^2 (1+K')^4}. \tag{35}$$

Finalement, en prenant $n \geq n(y_0) \geq n_0$ et $I(y_0) < r$ on obtient l'existence d'un réel $p_0 > 1$ tel que :

$$\sup_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{n \geq n(y_0)} \mathbb{E}[\exp(-\frac{p_0}{2}\lambda_n^T.R_2^n(\varepsilon))] < \infty.$$

■

**Proposition 3.2.** *Sous l'hypothèse* $(H.1.(2N+4))$ *on a le résultat suivant : Pour* $0 \leq \epsilon \leq 1$ *:*

1. *Pour tout* $1 \leq k \leq N+3$, *et tout* $1 \leq p < \infty$ :

(36) $$\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1}\sup_{n\geq 0} ||R_k^n(\varepsilon)||_{L^p} < \infty$$

2. *Pour tout* $k$ $(1 \leq k \leq N+3)$, $r$ $(0 \leq r+k \leq 2N+4$ *et* $0 \leq r \leq k)$, *et tout* $p$ $(1 \leq p < \infty)$

(37) $$\sup_{n\geq 0} ||W_n(k,r)||_{L^p} < \infty$$

3. *Pour tout* $k$ $(1 \leq k \leq N+3)$, $r$ $(0 \leq r+k \leq 2N+4$ *et* $0 \leq r \leq k)$, *et tout* $p$ $(1 \leq p < \infty)$ :

(38) $$\sup_{0\leq\epsilon\leq 1}\sup_{n\geq 0} ||W_n^\varepsilon(k,r)||_{L^p} < \infty$$

*Démonstration :*

1. Montrons que 1) est vraie.

- Pour $k = 1$ :

$$R_1^n(\varepsilon) = \int_0^1 D_n^1(n,\varepsilon t)dt = \int_0^1 D\varphi_n(0,\varepsilon tZ_1 + z_1^n,\cdots,\varepsilon tZ_n + z_n^n)(Z_1,\cdots,Z_n)dt.$$

D'où:

$$||R_1^n(\varepsilon)||_{L^p} \leq \frac{K}{1-\delta}||Z_1||_{L^p} < \infty,$$

puisque la variable $Z_1$ a des moments de tous ordres.

-Pour $k \geq 1$ : supposons que $\sup_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}\sup_{n\geq 1} ||R_k^n(\varepsilon)||_{L^p} < \infty$ jusqu'au rang k. Comme

$$R_{k+1}^n(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D_n^{k+1}(n,\varepsilon t)dt$$

avec,

$$D_n^{k+1}(n,\varepsilon t) = D_{z^{k+1}}^{k+1}\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon t},\varepsilon tZ_n + z_n^n)(Z_n)^{k+1} + D_x\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon t},\varepsilon tZ_n + z_n^n)D_{n-1}^{k+1}(n,\varepsilon t)$$

$$+P_k\Big(\big(D_{x^s z^u}^{s+u}\varphi(\varphi_{n-1}^{n,\varepsilon t},\varepsilon tZ_n + z_n^n)(Z_n)^t.D_{n-1}^s(n,\varepsilon)\big)_{\{(s,u)\in N^2 : u\leq k, 2\leq s+u\leq k\}}\Big),$$

où $P_k$ est un polynôme en les variables ci-dessus de degré au plus $k$. D'où, par hypothèse de récurrence sur les variables $(D_n^l(n,\varepsilon))_{l\leq k}$ on a:

$$||D_n^{k+1}(n,\varepsilon)||_{L^p} \leq (K(k,p) + \delta||D_{n-1}^{k+1}(n,\varepsilon)||_{L^p})$$

où $K(k,p)$ est une constante dépendant uniquement de $k$ et de $p$. Ainsi, on obtient $||D_n^{k+1}(n,\varepsilon)||_{L^p} \leq \dfrac{K(k,p)}{(1-\delta)} < +\infty$, d'où

$$||R_{k+1}^n(\varepsilon)|| \leq \frac{K(k,p)}{(1-\delta)(k+1)!} < +\infty.$$

2. Etudions maintenant les processus dérivés $W_n(k,r)$ issus de $R_k^n$. Comme $R_k^n$ est une forme k-linéaire en les variables $(Z_1, \cdots, Z_n)$, les variables aléatoires $W_n(k,r)$ sont bien définies sous l'hypothèse $(H.1.(k))$.

D'après 1) on a :

$$\sup_n ||W_n(k,0)||_{L_p} < +\infty, \text{ pour tout } p \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq N+3.$$

Supposons que l'on ait pour $r \geq 0$, pour tout $k$ et pour tout $p \geq 1$ :

$$\sup_n ||W_n(k,r)||_{L_p} < +\infty.$$

Montrons cette propriètè pour $r+1$. On raisonne comme précédemment et l'on obtient, en faisant une récurrence sur $k$, la relation de récurrence suivante :

$$||W_n(k,r+1)||_{L^p} \leq K(k,r+1,p) + \delta||W_{n-1}^n(k,r+1)||_{L^p}.$$

Où $K(k,r+1,p)$ est une constante dépendant de processus déjà contrôlé. Ce qui nous donne :

$$\sup_n ||W_n(k,r)||_{L^p} < +\infty.$$

3. il nous reste, enfin, à contrôler les processus dérivés $W_n^\varepsilon(k,r)$ issus des variables $R_k^n(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. Sous l'hypothèse $(H.1.(2N+4))$ ces processus sont bien définis avec $1 \leq k \leq N+3$, $0 \leq r+k \leq 2N+4$, et $0 \leq r \leq k$. Comme $\varepsilon$ est borné on est ramené à l'étude de variables semblables à celles étudiées dans 1) et 2)∎

# 4. Convergence en loi

**Lemme 4.1.** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^d)$, muni de la norme uniforme (notée $||.||_\infty$) est tendue si et seulement si :*

1. *pour tout $\eta > 0$, il existe un réel $a$ tel que, pour tout $n \geq 1$ :*

$$P[||X_n(0)||_\infty > a] \leq \eta.$$

2. *pour tout $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta$ avec $0 < \delta < 1$, tel que :*

$$p[\sup_{0 \leq t,t' \leq 1, |t-t'| \leq \delta} ||X_n(t) - X_n(t')||_\infty \geq \varepsilon] \leq \eta,$$

*ceci pour tout $n \geq 1$.*

∎

**Remarque :** Sous les hypothèses $(H.1.(2))$, $(H.2)$, et $(H.3)$ en supposant que $I(y_0) < r$. On amontré l'existence d'une sous suite $(\lambda_{\theta_0(n)})_{n\geq 1}$ , on notera $\lambda_\infty \in$ sa limite.

**Proposition 4.2.** *Sous les hypothèses $(H.1.(2N+5))$, $(H.2)$, et $(H.3)$, , il existe une suite d'entiers $(\theta(n))_{n\geq 1}$ telle que :*

1. *La suite $(\lambda_{\theta(n)})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}^d$.*
2. *La suite de processus $(W^\epsilon_{\theta(n)}(N+2,N+2))_{n\geq 1}$ (de paramètre $\epsilon$ à valeurs dans $C^0([0,1],\mathbb{R}^{d(N+2,N+2)},||.||_\infty)$ converge en loi vers un processus, à valeurs dans $C^0([0,1],\mathbb{R}^{d(N+2,N+2)},||.||_\infty)$, que l'on notera $(W^\epsilon_\infty(N+2,N+2))$ ■*

*Démonstration :* Pour montrer cette proposition, il nous suffit, d'après la remarque précédente, de prouver, en utilisant le lemme ( 4.1.) que la suite

$(W^\epsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2))_{n\geq 1}$ est tendue.

1. D'après la proposition 3.2., on a :

$$\sup_{0\leq\epsilon\leq 1}\sup_{n\geq 1}||W^\epsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||_{\mathbb{L}^1} < \infty.$$

Comme,

$$\sup_n P[||W^\epsilon_{\theta_0(n)}(N+3,N+1)|| \geq a] \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[||W^\epsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||]$$

on en déduit le (1) du lemme 4.1., en prenant $a$ suffisament grand.

2. D'après le théorème des accroissements finis nous avons, pour tout $s,t \in [0,1]$

$$\sup_{n\geq 1}||W^s_{\theta_0(n)}(N+2,N+2) - W^t_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||_{\mathbb{L}^1}$$

$$\leq \sup_{n,\varepsilon}||\frac{\partial}{\partial t}W^\varepsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||_{\mathbb{L}^1}|t-s|.$$

Si $\sup_{n,\varepsilon}||\frac{\partial}{\partial t}W^\varepsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||_{\mathbb{L}^1} < +\infty$ alors la deuxième partie du lemme sera démontrée.

Or, sous l'hypothèse $(H.1.(2N+5))$ le processus $\frac{\partial}{\partial t}W^\varepsilon_{\theta_0(n)}(N+3,N+1)$ est bien défini, en utilisant un raisonnement par récurrence analogue à celui de la preuve de la proposition (3.2.) nous obtenons :

$$||\frac{\partial}{\partial t}W^\varepsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||_{\mathbb{L}^1} \leq K(N+2,N+2,1) + \delta||\frac{\partial}{\partial t}W^\varepsilon_{\theta_0(n)}(N+2,N+2)||_{\mathbb{L}^1}$$

ainsi :

$$\sup_{n,\varepsilon} ||\frac{\partial}{\partial t} W^{\varepsilon}_{\theta_0(n)}(N+2, N+2)||_{\mathbb{L}^1} < +\infty,$$

d'où le résultat.

**Lemme 4.3.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé soit $\Psi$ une variable aléatoire P-intégrable, soit $\phi$ une variable aléatoire d-dimensionnelle, vérifiant pour toute fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ bornée et à dérivé bornée, pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$ :*

$$\left|\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(\phi)\Psi]\right| \leq c||g||_\infty$$

*Posons $\overline{P} = \Psi P$ (elle est bien définie puisque $\Psi$ est P-intégrable) et appelons $\overline{\mu}_\phi$ la mesure image sur $\mathbb{R}^d$ de $\overline{P}$ par $\phi$. Alors $\lim\limits_{g \to \delta_0} \mathbb{E}[g(\phi)\Psi]$ (limite au sens des distributions) a un sens c'est à dire que $\overline{\mu}_\phi$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

*Démonstration :* On a:

$$\mathbb{E}[g(\varphi)\Psi] = \mathbb{E}_{\overline{P}}[g(\phi)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\overline{\mu}_\phi(dx).$$

Il reste a montrer que la mesure $\overline{\mu}_\phi$ possède une densité par rapport à la mesure de Lebesque. Appelons $\hat{\mu}_\phi$ la transformée de Fourier de $\overline{\mu}_\phi$ :

$$\hat{\mu}_\phi(u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i < u, x >)\overline{\mu}_\phi(dx),$$

$u \in \mathbb{R}^d$. Alors, pour $f_u(x) = \exp(-i < u, x >)$, pour $j \in \{1, \cdots, d\}$ en utilisant l'égalité du lemme on obtient :

$$|u^i||\hat{\mu}_\phi(u)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} |\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_j} f_u(x)\overline{\mu}_\phi(dx)| \leq \frac{K}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}},$$

$K$ est une constante positive qui change de ligne en ligne.

Or, comme

$$|\hat{\mu}_\phi(u)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} |\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mu}_\phi(dx)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathbb{E}(|\Psi|) \leq \frac{K}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} < +\infty.$$

On en déduit

$$|\hat{\mu}_\phi(u)| \leq \frac{K}{1 + |u^1| + \cdots + |u^d|} \leq \frac{K}{1 + |u|}$$

ainsi, $\hat{\mu}_\phi$ est dans $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^d)$ donc sa transformé de Fourier inverse existe et est exactement la densité de $\phi$ par rapport à la mesure $\Psi dP$. ∎

**Lemme 4.4.** *Soient $(A_n)_{n\geq 1}, (B_n)_{n\geq 1}, (C_n)_{n\geq 1}$ trois suites de variables aléatoires à valeurs réelles, soient $P_0 > 1$ et $\eta > 0$ deux réels tels que l'on ait :*

1. $\sup_{n\geq 1} ||A_n||_{\mathbb{L}^{p_0}} < +\infty$.
2. $\sup_{n\geq 1} ||B_n||_{\mathbb{L}^{q_0+\eta}} < +\infty$, *avec* $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{q_0} = 1$.
3. $\sup_{n\geq 1} ||C_n||_{\mathbb{L}^{p}} < +\infty$, *pour tout* $p \geq 1$.

*Alors la suite de variables $(A_n.B_n.C_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.*

*Si de plus la suite $(A_n.B_n.C_n)_{n\geq 1}$ converge en loi sa limite est dans $\mathbb{L}^1$* ∎

*Preuve :* Pour montrer l'uniforme intégrabilité de la suite $(A_n.B_n.C_n)_{n\geq 1}$ il nous suffit de montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sup_{n\geq 1} ||A_n.B_n.C_n||_{\mathbb{L}^{1+\epsilon}} < +\infty.$$

L'inégalité de Holder nous donne :

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[|A_n.B_n.C_n|^{1+\varepsilon}] \leq \mathbb{E}[|A_n|^{P_0}]^{\frac{1}{p}}.\mathbb{E}[|B_nC_n|^{q(1+\varepsilon)}]^{\frac{1}{q}}$$

avec $1 < 1+\varepsilon < p_0$, $1 < p = p_0/(1+\varepsilon)$ et $1/p + 1/q = 1$, ce qui est possible en prenant $\varepsilon$ assez petit. Comme $\sup_{n\geq 1} ||A_n||_{\mathbb{L}^{p_0}} < +\infty$ il ne nous reste plus qu'a contrôler $\mathbb{E}[|B_nC_n|^{q(1+\varepsilon)}]$ avec $q = p_0/(p_0 - 1 - \varepsilon)$.

En réutilisant l'inégalité de Holder on obtient :

$$\mathbb{E}[|B_nC_n|^{q(1+\varepsilon)}] \leq \mathbb{E}[|B_n|^{q_0+\eta}]^{\frac{1}{p_1}}.\mathbb{E}[|C_n|^{q(1+\varepsilon)q_1}]^{\frac{1}{q_1}}$$

avec $0 < \varepsilon < \eta(\dfrac{p_0 - 1}{p_0^2})$ on a $1 < p_1 < \frac{q_0+\eta}{q(1+\varepsilon)}$ et on pose $q_1 = \dfrac{p_1}{p_1 - 1}$.

D'où l'uniforme intégrabilité de la suite $(A_n.B_n.C_n)_{n\geq 1}$, en utilisant les propriètés de $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$.

D'autre part, si cette suite à une limite on voit clairement qu'elle appartient à $\mathbb{L}^1$. ∎

A partir de maintenant nous allons scinder l'étude du développement asymptotique en deux parties. Nous étudierons séparemment le developpement limité proprement dit, et le reste.

# 5. Etude du développement limité :

On intègre par parties les termes du développement limité, afin de faire disparaitre les dérivées de la fonction $g_m \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, puis on passe à la limite en $n$. On a alors :

**Proposition 5.1.** *Sous les hypothèses $(H.1.(N+2))$, $(H.2)$ et $(H.3)$, avec $n \geq n_0$ et $I(y_0) < r$, on a*

*pour tout $k$ $(1 \leq k \leq N)$ :*

*a)*

1. *pour tout $k_1$ $(1 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}])$*

$$\mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\Big\{\sum_{|\alpha|=k_1} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha,k_1}^k(W_n(k+2-k_1,0),\lambda_n)\Big\}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2}) g(R_1^n)\frac{1}{det(U_n)^{2k_1}}\Big\{\sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha,k_1,k_1}^k(W_n(k+2-k_1,k_1),\lambda_n)\Big\}\Big] \tag{39}$$

2. *pour tout $k_2$ $([\frac{k+1}{2}]+1 \leq k_2 \leq k)$*

$$\mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\Big\{\sum_{|\alpha|=k_2} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^n) P_{\alpha,k_1}^k(W_n(k_1+1,0),\lambda_n)\Big\}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2}) g(R_1^n)\frac{1}{det(U_n)^{2k_2}}\Big\{\sum_{|\alpha|=k_2} H_{\alpha,k_2,k_2}^k(W_n(k_2+1,k_2),\lambda_n)\Big\}\Big] \tag{40}$$

*où les $H_{\alpha,k_i,k_i}^k$ sont, pour $i = 1,2$ , d'après la proposition (1.5), des fonctions polynomiales.*

*De plus, en prenant se resteignant à la sous suite $(\theta(n))_{n\geq 1}$ définie dans la proposition ( 4.2.) on a :*

*b)*

1. *pour tout* $k_1$ $(1 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}])$

$$\mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2})\Big\{\sum_{|\alpha|=k_1} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^\infty)P_{\alpha,k_1}^k(W_\infty(k+2-k_1,0),\lambda_\infty)\Big\}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\exp(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2})g_m(R_1^\infty)\frac{1}{det(U_\infty)^{2k_1}}\Big\{\sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha,k_1,k_1}^k(W_\infty(k+2-k_1,k_1),\lambda_\infty)\Big\}\Big]$$
(41)

2. *pour tout* $k_2$ $([\frac{k+1}{2}]+1 \leq k_2 \leq k)$

$$\mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2})\Big\{\sum_{|\alpha|=k_2} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^\infty)P_{\alpha,k_1}^k(W_\infty(k_2+1,0),\lambda_\infty)\Big\}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\exp(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2})g(R_1^\infty)\frac{1}{det(U_\infty)^{2k_2}}\Big\{\sum_{|\alpha|=k_2} H_{\alpha,k_2,k_2}^k(W_\infty(k_2+1,k_2),\lambda_\infty)\Big\}\Big]$$
(42)

*Démonstration :*

a) L'hypothèse $(H.3)$ nous permet, en utilisant la proposition 1.10. au plus $N$ fois, d'intégrer par parties les expressions de gauche des équations (39) et (40), d'où le résulat .

b) Nous traiterons le cas où $k_1$ $(0 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}])$, il en va de même pour $k_2$ $([\frac{k+1}{2}]+1 \leq k_2 \leq k)$. Notons pour $n \geq N(y_0)$ :

$$A_n := \exp(-\frac{<\lambda_n, R_2^n>}{2})$$

$$B_n(k_1) := \frac{1}{det(U_n)^{2k_1}}$$

$$C_n(k_1) := \sum_{|\alpha|=k_1} D_{x^\alpha}^\alpha g_m(R_1^n)P_{\alpha,k_1}^N(W_n(k+2-k_1,0),\lambda_n)$$

$$C_n'(k_1) := \sum_{|\alpha|=k_1} H_{\alpha,k_1,k_1}^k(W_n(k+2-k_1,k_1),\lambda_n)$$

$A_{\theta(n)}(k_1), B_{\theta(n)}(k_1), C_{\theta(n)}(k_1)$ et $C'_{\theta(n)}(k_1)$ sont des fonctions continues en des variables $W_{\theta(n)}(N+3,N+2)$ et $\lambda_{\theta(n)}$ qui convergent respectivement en loi (voir la proposition ( 4.2.)) et dans $\mathbb{R}^d$.

De plus, pour tout $k_1$, les propositions ( 3.2.) et ( 3.1.) ainsi que la remarque concernant $\lambda_n$ page 14 nous permettent de montrer que :

$$\sup_{n\geq 1} ||A_n(k_1)||_{\mathbb{L}^{p_0}} < +\infty$$

$$\sup_{n\geq 1} ||B_n(k_1)||_{\mathbb{L}^{q_0+\eta}} < +\infty$$

(d'après l'hypothèse $(H.3)$)

$$\sup_{n\geq 1} ||C_n(k_1)||_{\mathbb{L}^{p}} < +\infty$$

$$\sup_{n\geq 1} ||C'_n(k_1)||_{\mathbb{L}^{p}} < +\infty$$

avec $p_0 > 1$ (défini dans la proposition 3.1.), $q_0 = p_0/(p_0-1)$ et pour tout $p \geq 1$.

Le lemme ( 4.4.) nous montre que les suites $(A_n.C_n)_{n\geq 1}$ et $(A_n.B_n.C'_n)_{n\geq 1}$ sont uniformément bornées, ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_{\theta(n)}.C_{\theta(n)}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_{\theta(n)}.B_{\theta(n)}.C'_{\theta(n)}]$$

de plus, la variable $A_\infty.B_\infty.C'_\infty \in \mathbb{L}^1$ ∎

Pour conclure il nous reste à vers tendre $\nu$ vers 0.

**Proposition 5.2.** *sous les hypothèses $(H.1.(N+2))$, $(H_2)$ et $(H.3)$ (avec $I(y_0) < r$) avec la sous suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ on a, pour tout $k$ $(0 \leq k \leq N)$ :*

1. *Pour $k_1$ $(0 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}])$*

$$\lim_{\nu\to 0} \mathbb{E}\Big[\exp(-\tfrac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2})g_\nu(R_1^\infty)\tfrac{1}{det(U_\infty)^{2k_1}} \Big\{ \textstyle\sum_{|\alpha|=k_1} H^k_{\alpha,k_1,k_1}(W_\infty(k+2-k_1,k_1),\lambda_\infty)\Big\}\Big] \tag{43}$$

   *a un sens.*

2. *Pour $k_2$ $([\frac{k+1}{2}]+1 \leq k_2 \leq k)$*

$$\lim_{\nu\to 0} \mathbb{E}\Big[\exp(-\tfrac{\lambda_\infty^T.R_2^\infty}{2})g_\nu(R_1^\infty)\tfrac{1}{det(U_\infty)^{2k_2}} \Big\{ \textstyle\sum_{|\alpha|=k_2} H^k_{\alpha,k_2,k_2}(W_\infty(k_2+1,k_2),\lambda_\infty)\Big\}\Big] \tag{44}$$

   *a un sens* ∎

*Démonstration :*

Etudions le cas où $k_1$ ($0 \leq k_1 \leq [\frac{k+1}{2}]$), il en va de même pour $k_2$ ($[\frac{k+1}{2}] + 1 \leq k_2 \leq k$). Notons pour $n \geq N(y_0)$

$$\Psi^n_{k_1} = \exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\frac{1}{det(U_n)^{2k_1}}\Big\{\sum_{|\alpha|=k_1} H^k_{\alpha,k_1,k_1}(W_n(k+2-k_1,k_1),\lambda_n)\Big\}$$

D'après la proposition ( 5.1.) la suite $(\Psi^{\theta(n)}_{k_1})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable appartenant à $\mathbb{L}^1$, notée $\Psi^\infty_{k_1}$.

La limite $\lim_{\nu\to 0}\mathbb{E}[g_\nu(R_1^\infty)\Psi^\infty_{k_1}]$ a un sens si, d'après le lemme ( 4.3.), pour toute fonctions $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ bornée à dérivée bornée, pour tout $j \in \{1,\cdots,d\}$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Big|\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty)\Psi^\infty_{k_1}]\Big| \leq c(k_1)||g||_\infty.$$

Or,

$$\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty)\Psi^\infty_{k_1}] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^{\theta(n)})\Psi^{\theta(n)}_{k_1}]$$

Sous l'hypothèse $(H.1.(N+2))$, pour $n \geq n_0$ on peut effectuer une intégration par parties (voir la proposition ( 1.10.)) qui nous donne :

$$\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^n)\Psi^n_{k_1}] = \mathbb{E}[g(R_1^n)\Psi^n_{(k_1,j)}],$$

où

$$\Psi^n_{(k_1,j)} = \exp(-\frac{\lambda_n^T.R_2^n}{2})\frac{1}{det(U_n)^{2(k_1+1)}}\Big\{\sum_{|\alpha|=k_1} H^k_{\alpha,k_1,k_1,j}(W_n(k+2-k_1,k_1+1),\lambda_n)\Big\}.$$

On pose, comme dans la proposition 5.1., pour $n \geq N(y_0)$ :

$$A_n(k_1) = \exp(-\frac{<\lambda_n, R_2^n>}{2})$$

$$B_n(k-1,j) = \frac{1}{det(U_n)^{2(k_1+1)}}$$

$$C_n(k_1,j) = \sum_{|\alpha|=k_1} H^k_{\alpha,k_1,k_1,j}(W_n(k+2-k_1,k_1+1),\lambda_n).$$

On a alors :

$$\sup_{n\geq 1}||A_n(k_1)||_{\mathbb{L}^{p_0}} < +\infty$$

$$\sup_{n\geq 1}||B_n(k_1)||_{\mathbb{L}^{q_0+\eta}} < +\infty$$

$$\sup_{n\geq 1}||C_n(k_1)||_{\mathbb{L}^p} < +\infty \text{ pour tout } p \geq 1.$$

En appliquant le lemme ( 4.4.) on montre d'une part que

$$\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty)\Psi_{k_1}^\infty] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[g(R_1^{\theta(n)})\Psi_{(k_1,j)}^{\theta(n)}],$$

d'autre part, si l'on note $\Psi_{(k_1,j)}^\infty$ la limite de la suite $(\Psi_{(k_1,j)}^{\theta(n)})_{n\geq 1}$ (qui existe d'après la proposition 4.2.) alors $\Psi_{(k_1,j)}^\infty \in \mathbb{L}^1$ et l'on a

$$\left|\mathbb{E}[\frac{\partial g}{\partial x_j}(R_1^\infty)\Psi_{k_1}^\infty]\right| \leq c(k_1)||g||_\infty.$$

D'où le résultat par le lemme 4.3.. ∎

Ainsi l'égalité ( 32) page 17 devient, formellement, sous les hypothèses déjà citées, après passage à la limite en $n$ puis en $\nu$ :

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(y_0) &= \tfrac{1}{\varepsilon^d}\exp(-\tfrac{I(y_0)}{2\varepsilon^2})\lim_{g\to\delta_0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big[g(R_1^{n,\varepsilon}).\exp(\tfrac{<\lambda_n,R_2^{n,\varepsilon}>}{2})\Big] \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon^d}\exp(-\tfrac{I(y_0)}{2\varepsilon^2})(c_0(y_0)+\varepsilon c_1(y_0)+\cdots+\varepsilon^N c_N(y_0)+\tfrac{\varepsilon^{N+1}}{N!}\lim_{g\to\delta_0}\lim_{n\to\infty}R^N(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Nous introduisons à ce niveau deux hypothèses supplémentaires :

$(H.4)$ La probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

$(H.5)(p)$ sous les hypothèses $(H.1.(1))$ et $(H.2)$, nous supposons l'existence d'un réel $\epsilon_p > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in ]0,\epsilon_p[$ la limite en loi de la suite de matrices de Malliavin $(U_{\theta(n)}(\varepsilon))_{n\geq 0}$ (la suite $(\theta(n))_{n\geq 0}$ étant celle de la proposition 4.2.), notée $U_\infty(\varepsilon)$, vérifie la propriète suivante :

$$(\det(U_\infty(\varepsilon)))^{-1} \in \mathbb{L}^p.$$

Etudions maintenant le comportement limite de $R^{N+1}(\varepsilon)$ sous l'hypothèse

$(H.5)(2q_0(N+2)+\eta)$, avec $\eta > 0$ aussi petit que l'on veut, et $q_0$ défini dans la proposition 3.1..

**Remarque :** Si la constante $\alpha_\epsilon$ intervenant dans la condition $(B.1)$ vérifie, pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_p$, l'inégalité $\alpha_\epsilon < \gamma^{4dq_0(N+2)}$ (où $\gamma$ est défini dans l'hypothèse $(C)$) alors les hypothèses $(H.4)$ et $(H.5)(2q_0(N+2)+\eta)$ (pour au moins un $\eta > 0$) sont vérifiées. Pour plus de précision voir respectivement les corollaires 7.5. et 7.6..

# 6. Convergence du reste :

**Proposition 6.1.** *Sous les hypothèses (H.1.(N + 3)), (H.2), (H.3) avec $I(y_0) < r$ pour toute fonction $g$ de $C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.*

*a) Nous pouvons permuter dans le reste $R^{N+1}(n, \varepsilon)$ l'intégrale en $t$ et la limite en $n$.*

*b) posons alors :*

$$R^{N+1}(\infty, \varepsilon) = \int_0^1 (1-t)^N \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\exp(-\frac{\lambda_{\theta(n)}^T . R_2^{\theta(n),\varepsilon t}}{2}).T^{N+1}(\theta(n), \varepsilon t)]dt.$$

*Où,*

$$(45) \quad \begin{cases} T^{N+1}(n, \varepsilon t) & = \Big\{ \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}+1]} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n,\varepsilon t}) P_{\alpha,k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(N+2-k, 0), \lambda_n) \\ & + \sum_{k=[\frac{N}{2}]+2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{n,\varepsilon t}) P_{\alpha,k}^{N+1}(W_n^{\varepsilon t}(k+1, 0), \lambda_n) \Big\} \end{cases}$$

*avec la suite $(\theta(n))_{n\geq 1}$ définie dans la proposition 4.2. et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ avec toutes ses dérivés bornées.*

*Démonstration :*

a) Commençons par justifier la permutation entre la limite en $n$ et l'intégrale en $t$.

Le terme exponentiel est, d'après la proposition 3.1., uniformément borné en $\varepsilon t$ et en $n$ dans $\mathbb{L}^{p_0}$, avec $p_0 > 1$. La fonction $g$ étant de classe $C^\infty$ avec toutes ses dérivées bornées, les termes de la forme $D_{x^\alpha}^\alpha g(R_1^{\infty,\varepsilon t})$ sont donc eux aussi uniformément bornés en $\varepsilon t$ et en $n$. Enfin, les variables $W_n^{\varepsilon t}(j, 0)$ (avec $0 \leq j \leq N+2$) (respectivement $\lambda_n$) étant majoré uniformément en $\varepsilon t$ et en $n$ dans tout les espaces $\mathbb{L}^p$ (respectivement en norme dans $\mathbb{R}^d$) (pour plus de précision voir la proposition 3.2. page 20) on en déduit que les fonctions polynomiales $P_{\alpha,k}^N$ sont uniformément bornées en $\varepsilon t$ et $n$. Ainsi le reste $R^N(n, \varepsilon)$ est majoré par une constante indépendante de $\varepsilon$ et $n$. Cette majoration du reste nous permet de permuter l'intégrale en $t$ et la limite en $n$.

b) Posons :

$$A_n(\varepsilon t) = \exp(-\frac{\lambda_{\theta(n)}^T . R_2^{\theta(n),\varepsilon t}}{2})$$
$$C_n(\varepsilon t) = T^{n+1}(n, \varepsilon t)$$

D'après a) on a :

$$\sup_{n\geq 1} ||A_n(\varepsilon t)||_{\mathbb{L}_{p_0}} < +\infty$$

et

$$\sup_{n\geq 1} ||C_n(\varepsilon t)||_{\mathbb{L}_p} < +\infty.$$

En utilisant la proposition 4.2. ainsi que le lemme 4.4., on voit que $R^{N+1}(\infty,\varepsilon)$ a un sens. ∎

**Remarque :** On obtient, pour $n \geq N(y_0)$, en posant $Q_n(\varepsilon) = \det(U_n(\varepsilon))$ :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\tfrac{\partial}{\partial x_i} f(R_0^n(\varepsilon)Q_n^2(\varepsilon)F(W_n^\varepsilon(k,l),\lambda_n)\exp(-\tfrac{\lambda_n^T.R_2^{n,\varepsilon}}{2})] \\ (46) \qquad & \\ &= \mathbb{E}[f(R_0^n(\varepsilon))H^i(W_n^\varepsilon(k,l+1),\lambda_n)\exp(-\tfrac{\lambda_n^T.R_2^{n,\varepsilon}}{2})] \end{aligned}$$

pour $i = 1,\cdots,d$ $2 \leq k \leq r$ et $0 \leq l \leq r$, sous $(H.1.(r+1))$, avec $f$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.10. et $F$ étant $\mathcal{C}_p^\infty$ en les variables $W_n^\varepsilon(k,l)$ et $\lambda_n$.

Les propositions 3.2. et 4.2., nous permettent, en prenant la sous suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$, de faire tendre $n$ vers $+\infty$ dans( 46). On prendra $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$ et $F \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^{d(k,l)} \times \mathbb{R}^d)$, on obtient si $Q_\infty(\varepsilon) = \det(U_n(\varepsilon))$ :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\tfrac{\partial}{\partial x_i} f(R_0^\infty(\varepsilon))Q_\infty^2(\varepsilon)F(W_\infty^\varepsilon(k,l),\lambda_\infty)e^{(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^{\infty,\varepsilon}}{2})}] \\ (47) \qquad & \\ &= \mathbb{E}[f(R_0^\infty(\varepsilon))H^i(W_\infty^\varepsilon(k,l+1),\lambda_\infty)e^{(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^{\infty,\varepsilon}}{2})}], \end{aligned}$$

où $H^i \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^{d(k,l+1)} \times \mathbb{R}^d)$.

En utilisant le lemme 4.3. on va montrer le résultat suivant :

**Proposition 6.2.** *Sous les hyphothèses* $(H.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(H.3)$, *avec* $I(y_0) < r$, *avec les hypothèses supplémentaires* $(H.4)$ *et* $(H.5)(2q_0(N+2)+\eta)$ *et en restreignant à la sous suite* $(\theta(n))_{n\geq 1}$ *définie dans la proposition 4.2. on peut permuter l'intégrale en t et la limite en* $\nu$, *de plus la limite lorsque* $\nu$ *tend vers* 0 *a un sens c'est à dire plus précisément :*

$$\lim_{\nu\to 0} R^N(\infty,\varepsilon) \quad \textit{existe et vaut}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to 0} R^N(\infty,\varepsilon) \;&= \int_0^1 (1-t)^N \lim_{\nu\to 0} \mathbb{E}\Big[exp(-\frac{\lambda_\infty^T.R_2^{\infty,\varepsilon t}}{2}) \\ (48) \qquad &\Big\{ \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g_\nu(R_1^{\infty,\varepsilon t}) P_{\alpha,k}^{N+1}(W_\infty^{\varepsilon t}(N+2-k,0),\lambda_\infty) \\ &+ \sum_{k=[\frac{N}{2}]+2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} D_{x^\alpha}^\alpha g_\nu(R_1^{\infty,\varepsilon t}) P_{\alpha,k}^{N+1}(W_\infty^{\varepsilon t}(k+1,0),\lambda_\infty)\Big\}\Big]dt \end{aligned}$$

*Démonstration :*

1. De ( 47) et de l'expression explicite de $H^i$ donnée dans la proposition 1.10. en prenant

$$F_r(W^\varepsilon_\infty(k,l),\lambda_\infty) = F(W^\varepsilon_\infty(k,l),\lambda_\infty).\Psi(r.Q_\infty(\varepsilon)).Q_\infty(\varepsilon)^{-\beta-2}$$

a la place de $F.$, avec $\Psi \in \mathcal{C}_b^\infty(I\!R)$ telle que $0 \le \Psi \le 1$, $\Psi(u) = 0$ si $|u| \le \frac{1}{2}$ et $\Psi(u) = 1$ si $|u| \ge 1$, on en déduit :

$$\text{(49)}\qquad \begin{aligned} & I\!E[\tfrac{\partial}{\partial x_i} f(R_0^{\infty,\varepsilon}).e^{\frac{-\lambda^T_\infty.R^{\infty,\varepsilon}}{2}}.Q_\infty(\varepsilon)^{-\beta}.F(W^\varepsilon_\infty(k,l),\lambda_\infty)] \\ & = I\!E[f(R_0^{\infty,\varepsilon}).e^{\frac{-\lambda^T_\infty.R^{\infty,\varepsilon}}{2}}.Q_\infty(\varepsilon)^{-\beta-2}.H^i_{F,\beta}(W^\varepsilon_\infty(k,l+1),\lambda_\infty)] \end{aligned}$$

pour $2 \le k \le N+3$, $0 \le l \le N+1$, $0 \le \beta \le 2N$, $f \in \mathcal{C}_b^\infty(I\!R^d)$ et $F \in \mathcal{C}_p^\infty(I\!R^{d(k,l)} \times I\!R^d)$, avec $H^i_{F,\beta} \in \mathcal{C}_p^\infty(I\!R^{d(k,l+1)} \times I\!R^d)$.

Pour prouver l'égalité ( 49) on se limite à la sous suite définie dans la proposition 4.2., on fait tendre $n$ vers $+\infty$ (l'hypothèse $(H.5)(2(N+2)+\eta)$ ainsi que la proposition 3.2. nous permettent de montrer, en utilisant le lemme 4.4., que la suite des espérances convergent), enfin pour conclure on passe à la limite en $r$. (pour plus de précision voir la preuve du lemme (4.14) de K.Bitcheler, J.B.Gravereaux et J.Jacod [2] qui ne repose que sur la formule ( 49))

2. Permutation entre la limite en $n$ et l'intégrale en $t$ :

en appliquant (49), au plus $N+2$ fois sur le reste d'ordre $N+1$. On obtient :

$$R^{n+1}(\infty,\varepsilon) = \int_0^1 (1-t)^N I\!E[\exp(-\frac{\lambda^T_\infty.R_2^{\infty,\varepsilon t}}{2}).G_m(R_1^{\infty,\varepsilon t})F^{N+1}(\varepsilon t)]dt$$

avec,

$$\left\{ \begin{aligned} & F^{N+1}(\varepsilon) = \Big\{ \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]+1} \sum_{|\alpha|=k} (Q_\infty(\varepsilon))^{-2(k+1)} H^\alpha_{\alpha,k}(W^\varepsilon_\infty(N+2-k,k+1),\lambda_\infty) \\ & + \sum_{k=[\frac{N}{2}]+2}^{N+1} \sum_{|\alpha|=k} (Q_\infty(\varepsilon))^{-2(k+1)} H^\alpha_{\alpha,k}(W^\varepsilon_\infty(k+1,k+1),\lambda_\infty)\Big\} \end{aligned} \right.$$

Où $G_m$ est une fonction allant de $I\!R^d$ dans $I\!R$, telle que $\partial G_m/\partial x_1 = g_m$ (où $(g_m)_{m\ge 0}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact tendant vers la masse de Dirac en zéro) et tel que ces fonctions soient bornées par une constante $K$ indépendante de $m$.

Il nous reste a majorer uniformément la limite $R^{N+1}(\infty,\varepsilon)$, en $\varepsilon t$ et $m$. Nous avons :

$$|R^{N+1}(\infty,\varepsilon)| \le K.\int_0^1 (1-t)^N I\!E[|e^{(-\frac{\lambda^T_\infty.R_2^{\infty,\varepsilon t}}{2})}.F^{N+1}(\varepsilon t)|]dt$$

Le lemme 4.4. nous permet, grâce à l'hypothèse $(H_4(2q_0(N+2)+\eta)$ et à la proposition 3.2., de montrer que :

$$\sup_{0\leq\epsilon\leq 1} ||F^{N+1}(\epsilon t)||_{L^{q_0}} < +\infty.$$

Cette majoration nous permet de permuter la limite et l'intégrale.

3. L'existence de $\lim_{m\to\infty} R^{N+1}(\infty,\epsilon)$ :

   d'après ce qui précède on a l'égalité ( 48). Pour conclure on fait un raisonnement analogue à celui de la proposition 5.2.

■

**Théorème 6.3.** *Sous les hypothèses* $(H.1.(2N+5))$, $(H.2)$, $(H.3)$, $(C)$ *avec* $I(y_0) < r$, *et les hypothèses supplémentaires* $(H.4)$ *et* $(H.5)(2q_0(N+2)+\eta)$ *on a l'égalité suivante*

$$f^\varepsilon(y_0) = \frac{1}{\varepsilon^d}\exp(-\frac{I(y_0)}{2\varepsilon^2})(c_0(y_0)+\varepsilon c_1(y_0)+\cdots+c_N(y_0)\varepsilon^N+\varepsilon^{N+1}.R_{N+1}(\varepsilon,y_0)),$$

*avec* $|R_{N+1}(\varepsilon,y_0)|$ *borné en* $\varepsilon$ *(où* $0<\epsilon<\epsilon_p$*)* ■

*Démonstration :* L'hypothèse $(H.4)$ nous dit que la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ possède une densité $f^\varepsilon$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Cette densité donne un sens aux termes du développement asymptotique lorsque l'on fait tendre $n$ vers $+\infty$. On conclut en utilisant les propositions 5.2. et 6.2..

# 7. Etude de l'intégrabilité de $(detU^\varepsilon_\infty)^{-q}$ et applications

## 7.1. Introduction et résultat général

Soient $n_0$ un entier assez grand, $i$ un entier compris entre 1 et $n$ et $\varepsilon$ un nombre strictement positif. La suite $(U_i^{n,\varepsilon})_{n\geq n_0}$ est à valeurs dans $M(d)_s$ et vérifie, une équation aux différences aléatoire de la forme suivante, voir 21 :

$$(50)\qquad \begin{cases} U_0^{n,\varepsilon}=0 \\ \text{et, pour } 1\leq i\leq n \\ U_i^{n,\varepsilon} = D_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_i)U_{i-1}^{n,\varepsilon}(D_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_i))^T + B_i^{n,\varepsilon}(X_{i-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_i) \\ \text{avec } D_i^n : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^\beta\to M(d) \\ \text{et } B_i^n : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^\beta\to M(d)_s. \end{cases}$$

On suppose de plus que pour $1 \leq i \leq n$ :

(51) $$X_i^{n,\varepsilon} = \varphi_i^n(\varepsilon Z_1, \cdots, \varepsilon Z_i)$$

et $X_0^{n,\varepsilon} = 0$, où $\varphi_i^n$ est une fonction mesurable en les variables $(Z_1, \cdots, Z_i)$, ces variables sont indépendantes et de même loi $\lambda$.

Posons :

(52) $$A^{(j,k)(l,m)}(x,z) = (D_i^n)^{(j,l)}(x,z).(D_i^n)^{(k,m)}(x,z).$$

On a alors, pour tout $1 \leq i \leq n$ :

(53) $$U_i^{n,\varepsilon} = A_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i).U_{i-1}^{n,\varepsilon} + B_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i),$$

en notant $A.U = D.U.D^T$.

On pose également :

(54) $$C_i^n(x,z) = \begin{cases} (A_i^n(x,z))^{-1}.B_i^n(x,z) \\ \text{si } det(D_i^n(x,z)) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et on considére si $d > 1$ les conditions $I$, $II$, $III$, et $IV$ suivantes.

$I$

(55) $$\begin{cases} \text{(i) on a :} \\ \sup_{n \geq n_0} \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta} ||B_i^n(x,z)|| < \infty \\ \text{(ii) } \sup_{n \geq n_0} \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta} ||D_i^n(x,z)|| = \delta < 1 \end{cases}$$

$II$ Il existe des constantes $c_\varepsilon$, $c$ et un entier $n_1$ appartenant respectivement à $]0,1[$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\{1, 2, \cdots, n_0\}$ tels que pour presque tout $x$ de $\mathbb{R}^d$ et pour tout $y$ de $S_{d-1}$ il existe des ouverts :

(56) $$E_i^{n,\varepsilon}(x,y) \subset \{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T.C_i^n(x, \varepsilon z).y \geq c||y||^2\}$$

avec $n \geq n_0$, $1 \leq i \leq n - n_1$ et :

(57) $$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \inf_{y \in S_{d-1}} \lambda(E_i^{n,\varepsilon}(x,y)) \geq c_\varepsilon.$$

$III$ Il existe $\xi \in ]0,1[$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et pour $\lambda-$presque tout $z \in \mathbb{R}^\beta$ on ait :

(58) $$\inf_{n \geq n_0} \inf_{1 \leq i \leq n} ||D_i^n(x,z)(y)|| \geq \xi ||y||.$$

$IV_q$ Les constantes de $I$, $II$, et $III$ sont telles que : $\dfrac{1 - c_\varepsilon}{\xi^{2dq}} < 1$.

En sachant déjà, grâce à la proposition (4.2), qu'il existe une sous suite $(\theta^{\varepsilon}(n))_{n\geq 1}$ telle que $U_n^{\varepsilon}$ converge en loi lorsque $n$ tend vers l'infini. On a alors, lorque $d > 1$, le résultat suivant :

**Théorème 7.1.** *Si l'on suppose $I, II, III$, et $IV_q$ sont vérifiées, alors* $(det(U_\infty^{\varepsilon}))^{-q} \in \mathbb{L}^1(P)$.

**Remarques :**

1. Si $d = 1$, l'étude est plus facile. $E_i^{n,\varepsilon}(x)$ remplace les ensembles $E_i^{n,\varepsilon}(x,y)$ et $III$ devient :
$$\inf_{n\geq n_0} \inf_{1\leq i\leq n} ||D_i^n(x,z)|| \geq \xi,$$
pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda$ presque tout $z \in \mathbb{R}^\beta$.

2. La condition $III$ entraîne que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda$ presque tout $z \in \mathbb{R}^\beta$ :
$$\inf_{n\geq n_0} \inf_{1\leq i\leq n} |det(D_i^n(x,z))| \geq \xi^d.$$
(Considérer $(D_i^n(x,z))^T.D_i^n(x,z))$ et utiliser le fait que, pour une matrice symétrique réelle $U$, $y^T.U.y \geq K||y||^2$ pour tout $y$ de $\mathbb{R}^d$ entraîne que $det(U) \geq K^d$.)

Le paragraphe suivant est consacré à la démonstration de ce théorème.

## 7.2. Preuve du théorème (7.1)

### 7.2.1. Notations et compléments.

Posons $D_i^{n,\varepsilon} = D_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$, $B_i^{n,\varepsilon} = B_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$, $C_i^{n,\varepsilon} = C_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$,

et $A_i^{n,\varepsilon} = A_i^n(X_{i-1}^{n,\varepsilon}, \varepsilon Z_i)$.

On a :

$$\text{(59)} \qquad \left[\begin{array}{l} U_0^{n,\varepsilon} = 0 \\ \text{et, pour } 1 \leq i \leq n \\ U_i^{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{i-1} A_i^{n,\varepsilon} \cdots A_{i-k}^{n,\varepsilon}.C_{i-k}^{n,\varepsilon} \end{array}\right.$$

(On a : $U_i^{n,\varepsilon} = A_i^{n,\varepsilon}.[U_{i-1}^{n,\varepsilon} + C_i^{n,\varepsilon}]$ pour $1 \leq i \leq n$, d'où le résultat par récurrence sur $i$).

Posons, pour $1 < i < n$, $k = 0, 1, \cdots, i-1$ et $y \in \mathbb{R}^d$ :

$$\text{(60)} \qquad Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y) = (D_{i-k}^{n,\varepsilon})^T \cdots (D_i^{n,\varepsilon})^T.y.$$

On a alors pour tout $1 < i < n$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$ :

$$(61) \qquad y^T.U_i^{n,\varepsilon}.y = \sum_{k=0}^{i-1}(Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y))^T.C_{i-k}^{n,\varepsilon}.Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y) \text{ et aussi :}$$

$$(62) \qquad y^T.U_i^{n,\varepsilon}.y = \sum_{j=0}^{k-1}(Y_{i,j}^{n,\varepsilon}(y))^T.C_{i-j}^{n,\varepsilon}.Y_{i,j}^{n,\varepsilon}(y) + (Y_{i,k-1}^{n,\varepsilon}(y))^T.U_{i-1}^{n,\varepsilon}.Y_{i,k-1}^{n,\varepsilon}(y)$$

(pour obtenir la dernière égalité on applique $k$ fois l'égalité $U_i^{n,\varepsilon} = A_i^{n,\varepsilon}.[U_{i-1}^{n,\varepsilon} + C_i^{n,\varepsilon}]$).

On considère les applications $T_i^{n,\varepsilon}$ de $\Omega \times \mathbb{R}^d$ dans $\overline{\mathbb{N}}$ suivantes :

$$(63)\begin{cases} T_0^{n,\varepsilon}(\omega, y) = +\infty \\ \text{et, pour } 1 \leq i \leq n, \\ T_i^{n,\varepsilon}(\omega, y) = \inf\{k = 0, \cdots, i-1 : Z_{i-k}(\omega) \in E_{i-k}^{n,\varepsilon}(X_{i-k-1}^{n,\varepsilon}(\omega), Y_{i,k}^{n,\varepsilon}(y)(\omega))\} \\ (= +\infty \text{ si } \{-\} =). \end{cases}$$

(Les ensembles $E_i^{n,\varepsilon}$ ont été introduits dans la condition $II$).

On a alors pour $1 \leq r \leq n$ :

$$(64) \qquad T_n^{n,\varepsilon}(\omega, y) = r \text{ équivaut à } \begin{cases} T_{n-1}^{n,\varepsilon}(\omega, Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(y)(\omega)) = r-1 \\ Z_n \notin E_n^{n,\varepsilon}(X_{n-1}^{n,\varepsilon}(\omega), Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(y)(\omega)) \end{cases}$$

(car $U_n^{n,\varepsilon} = A_n^{n,\varepsilon}.[U_{n-1}^{n,\varepsilon} + C_n^{n,\varepsilon}]$).

D'autre part on a :

$$(65) \qquad T_n^{n,\varepsilon}(\omega, y) = r \text{ implique } T_{n-r}^{n,\varepsilon}(\omega, Y_{n,r}^{n,\varepsilon}(\omega)) = 0$$

Rappelons maintenant un résultat classique (Lemme 7,29, page 92 de K.Bitcheler, J.B.Gravereaux et J.Jacod [2] ).

**Proposition 7.2.** *Si $U$ est une matrice $d \times d$ symétrique définie positive, alors on a :*

$$(66) \qquad \frac{\Gamma(q)^d}{(det(U))^q} \leq \int_{\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.dy.$$

*($||.||$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\Gamma$ désigne la fonction gamma usuelle).*

On va utiliser cette proposition et les fonctions $\varphi_u$ suivantes pour obtenir l'intégrabilté de $(det(U_\infty^\varepsilon))^{-q}$).

Pour $u > 0$ et $U \in M(d)_s$, ensemble des matrices symétriques de type positif (non nécessairement inversibles) on pose :

$$(67) \qquad \varphi_u(U) = \int_{\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.f(\frac{y^T.U.y}{u.||y||^2})dy \; (< +\infty)$$

$$(68) \qquad \text{où } f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(x-\frac{1}{2}) \text{ si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour chaque $u > 0$, $\varphi_u$ est continue et bornée (par $\int ||y||^{d(2q-1)}.e^{-u||y||^2}dy$). On aura donc convergence de $\mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{n,\varepsilon})]$ vers $\mathbb{E}[\varphi_u(U_\infty^{\varepsilon})]$ lorsque $n \to +\infty$.

### 7.2.2. Etude des $\mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{n,\varepsilon})]$.

On cherche à majorer uniformément en $n \in \mathbb{N}^*$ les quantités positives $\mathbb{E}[\varphi_u(U_n^{n,\varepsilon})]$. pour cela on commence par poser, pour $u > 0$ :

$$(69) \qquad \Psi_u(U) = \int_{\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{y^T.U.y \geq u||y||^2\}}(y)dy.$$

On a alors, pour tout $u > 0$ et pour toute $U \in M(d)_s$ :

$$(70) \qquad \varphi_u(U) \leq \Psi_{\frac{u}{2}}(U).$$

Il suffit donc de considérer les quantités positives $\mathbb{E}[\Psi_u(U_n^{n,\varepsilon})]$. Notant :

$$(71) \qquad H^{n,\varepsilon}(u) = \{(\omega, y) \in \Omega \times (\mathbb{R}^d - \{0\}) : yT.U_n^{n,\varepsilon}(\omega).y \geq \frac{u}{2}||y||^2\},$$

on a l'inclusion évidente suivante pour tout $n \geq 1$ :

$$(72) \qquad H^{n,\varepsilon}(u) \subset (\bigcup_{k=0}^{n-1} \{T_n^{n,\varepsilon} = k\}) \bigcup (H^{n,\varepsilon}(u) \bigcap \{T_n^{n,\varepsilon} = +\infty\}.$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\Psi_u(U_n^{n,\varepsilon})] & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\varepsilon}=k\}}(\omega,y).dy.P(d\omega) \\ & + \int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\varepsilon}=+\infty\}\cap H^{n,\varepsilon}(u)}(\omega,y).dy.P(d\omega). \end{cases}$$

(73)

On va étudier les termes de droite dans la proposition suivante.

**Proposition 7.3.** **a)** *L'application* $(\omega, y) \to ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\varepsilon}=k\}}(\omega, y)$ *est, pour tout* $n \geq n_0$ *et tout* $k = 0, 1, \cdots, n-1$, $P \times \Lambda-$*intégrable* ($\Lambda$ *désigne la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$) *et on a*

*i) pour* $0 \leq k \leq n_1$ *:*

$$(74) \qquad \int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\varepsilon}=k\}}(\omega,y).dy.P(d\omega) \leq L.(\frac{1}{\xi^{2dqk}})$$

*avec* $L = \dfrac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq}c^{dq}} < +\infty.$

*ii) pour $n_1+1 \leq k \leq n-1$ :*

$$\int\int_{\Omega\times \mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\epsilon}=k\}}(\omega,y).dy.P(d\omega) \leq L.\frac{1}{\xi^{2dqn_1}}.(\frac{1-c_\varepsilon}{\xi^{2dq}})^{k-n_1}$$
(75)

*avec* $L' = \dfrac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq(n_1+1)}c^{dq}} < +\infty.$

**b)** *Pour tout $u>0$ on a :*

$$\int\int_{\Omega\times \mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\epsilon}=+\infty\}\bigcap H^{n,\epsilon}(u)}(\omega,y).dy.P(d\omega) \leq K(\tfrac{u}{2}).\tfrac{1}{\xi^{2dqn_1}}.(\tfrac{1-c_\varepsilon}{\xi^{2dq}})^{n-n_1} \quad (76)$$

*avec*

$$K(u) = \int_{\mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-u||y||^2}.dy = \frac{\Gamma(dq)}{u^{dq}}.$$

*Démonstration :*

a) Posons $I_k = \displaystyle\int\int_{\Omega\times \mathbb{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{T_n^{n,\epsilon}=k\}}(\omega,y).dy.P(d\omega).$

1) Montrons d'abord le a) pour $I_0$.

$$\{T_n^{n,\varepsilon}(\omega,y)=0\} = \{Z_n(\omega) \in E_n^{n,\varepsilon}[X_{n-1}^{n,\varepsilon}(\omega), Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(\omega)(y)]\}.$$

On a : $y^T.U_n^{n,\varepsilon}(\omega).y \geq (Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(\omega)(y))^T.C_n^n(X_{n-1}^{n,\varepsilon}(\omega),\varepsilon Z_n(\omega)).Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(\omega)(y).$

Par la suite, en faisant le changement de variable $y \to w = Y_{n,0}^{n,\varepsilon}(\omega)(y)$ pour $\omega$ fixé dans un ensemble de probabilité 1 ($y \to w(\omega)$ est une transformation linéaire bijective de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ pour $P$-p-s tout $\omega$), on obtient, par la condition $III$ après intégration par rapport à $P$ :

($||y||$ est majoré par $\dfrac{1}{\xi}||w||$ et $|det(D_n^n(X_{n-1}^{n,\varepsilon},\varepsilon Z_n)|$ est minoré par $\xi^d$).

$$I_0 \leq (\frac{1}{\xi})^{2dq}\int\int_{\Omega\times \mathbb{R}^d} ||w||^{d(2q-1)}.e^{-w^T.C_n^{n,\epsilon}.w}.1_{\{Z_n\in E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon},w))\}}(\omega,y).dw.P(d\omega)$$

Or l'intégale de droite s'écrit encore :

$$\int\int_{\Omega\times \mathbb{R}^d} ||w||^{d(2q-1)}(\int_{E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon},w)} e^{-w^T.C_n^n(X_{n-1}^{n,\epsilon},\varepsilon z).w}.\lambda(dz)).dw.P(d\omega)$$

(car $Z_n$ a pour loi $\lambda$) d'où le résultat pour $k=0$.

(On pose $w=r.v$ avec $r>0$ et $v\in S_{d-1}$ on utilise le fait que

$$\int_0^{+\infty} r^{d(2q-1)}.e^{-r^2.v^T.c(x,\varepsilon z).v}.dr = \frac{\Gamma(dq)}{(v^T.c(x,\varepsilon z).v)^{dq}}$$

puis la condition $II$).

On trouve donc :

$$I_0 \leq \frac{\Gamma(dq)}{\xi^{2dq} c^{dq}}$$

2) Montrons a) pour $1 \leq k \leq n_1$ :

on a :

$$I_k = \int \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U_n^{n,\epsilon}.y}.1_{\{T_n^{n,\epsilon}=k\}}(\omega, y).dy.P(d\omega)$$

par le même chagement de variable $y \to w = Y_{n,0}(\omega)(y)$ on obtient :

$$I_k \leq \int \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} ||w||^{d(2q-1)}.e^{-w^T.U_{n-1}^{n,\epsilon}.w}.1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\} \cap \{Z_n \notin E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon},w)\}}.dw.P(d\omega)$$

(on a minoré $y^T.U_n^{n,\epsilon}.y$ par $w^T.U_{n-1}^{n,\epsilon}.w$).

On en déduit que le terme de gauche est majoré par :

$$\frac{1}{\xi^{2dq}} \int \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} ||w||^{d(2q-1)}.e^{-w^T.U_{n-1}^{n,\epsilon}.w}.1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\}}.dw.P(d\omega).$$

En effet les variables aléatoires $U_{n-1}^{n,\epsilon}$ et $1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\}}$ sont $\sigma(Z_1, \cdots, Z_{n-1})$-mesurables, ce qui donne le résultat en conditionnant $e^{-w^T.U_{n-1}^{n,\epsilon}.w}1_{\{T_{n-1}^{n,\epsilon}=k-1\} \cap \{Z_n \notin E_n^{n,\epsilon}(X_{n-1}^{n,\epsilon},w)\}}$ par rapport à $\sigma(Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ pour $w$ fixé et en utilisant la condition $II$. D'où le résultat après $k$ changements de variables.

3) Montrons a) pour $n_1 + 1 \leq k \leq n$ : on a :

$$I_k = \int \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T U_n^{n,\epsilon} y} 1_{\{T_n^{n,\epsilon}=k\}}(\omega, y).dy.P(d\omega).$$

D'après la partie 2) de la démonstration, en effectuant $n_1$ changement de variables on obtient :

$$I_k \leq \frac{1}{\xi^{2dqn_1}} \int \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} ||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T U_{n-n_1}^{n,\epsilon} y}.1_{\{T_{n-n_1}^{n,\epsilon}=k-n_1\}}(\omega, y).dy.P(d\omega).$$

Puis, par le même changement de variable $y \to w = Y_{n-n_1,0}^{n,\epsilon}(\omega)(y)$ on obtient :

$$I_k \leq \frac{1}{\xi^{2dqn_1}} \int \int_{\Omega \times \mathbf{R}^d} ||w||^{d(2q-1)}.e^{-w^T U_{n-n_1-1}^{n,\epsilon} w}.$$

$$1_{\{T_{n-n_1-1}^{n,\epsilon}=k-n_1-1\} \bigcap \{Z_{n-n_1} \notin E_{n-n_1}^{n,\epsilon}(X_{n-n_1-1}^{n,\epsilon},w)\}} dw.P(d\omega)$$

(on a minoré $y^T U_{n-n_1}^{n\epsilon} y$ par $w^T U_{n-n_1-1}^{n\epsilon} w$).

On en déduit comme précédemment que le terme de gauche est majoré par :

$$\frac{1-c_\epsilon}{\xi^{2dq(n_1+1)}}\int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^d}||w||^{d(2q-1)}.e^{-w^TU^{n,\epsilon}_{n-n_1-1}w}.1_{\{T^{n,\epsilon}_{n-n_1-1}=k-n_1-1\}}.dw.P(d\omega),$$

en utilisant la condition $II$ $\lambda(E^{n,\epsilon}_{n-n_1-1})\geq c_\epsilon$. D'où le a) ii) en itérant.

4) Montrons enfin le b) pour tout $n\geq n_0$ : Dans un premier temps on montre que :

$$\int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^d}||y||^{d(2q-1)}.e^{-\frac{u}{2}||y||^2}.1_{\{T^{n,\epsilon}_n=+\infty\}}(\omega,y).dy.P(d\omega)\leq$$

$$(\frac{1}{\xi^{2dq}})\int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^d}||y||^{d(2q-1)}.e^{-\frac{u}{2}||y||^2}.1_{\{T^{n,\epsilon}_{n-1}=+\infty\}}dyP(d\omega).$$

(On a posé $T^{n,\epsilon}_0=+\infty$).

Pour prouver cette inégalité on effectue le même changement de variable que dans 1) : $y\rightarrow w=Y^{n,\epsilon}_{n,0}(\omega)(y)$ ; on minore $||y||$ par $||w||$ en utilisant la condition $I$ et on conditionne par rapport à $\sigma(Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n-1})$.

Puis on itère le procédé en utilisant les parties 1) et 2). D'où le b).

■

On en déduit immédiatement de la proposition que l'on a, pour tout $n\geq n_0$ et tout $u>0$ :

$$(77)\ \mathbb{E}[\varphi_u(U^{n,\epsilon}_n)]\leq K(n_1)+L'.\sum_{k=n_1+1}^{n-1}(\frac{1-c_\epsilon}{\xi^{2dq}})^{k-n_1}+K(\frac{u}{2}).\frac{1}{\xi^{2dqn_1}}.(\frac{1-c_\epsilon}{\xi^{2dq}})^{n-n_1},$$

en posant $K(n_1)=L.(\sum_{k=0}^{n_1}1/\xi^{2dqk})$.

### 7.2.3. Passages à la limite (en $n\rightarrow+\infty$ puis en $u\rightarrow 0$)

On sait déjà que : $\lim_{n\rightarrow+\infty}\mathbb{E}[\varphi_u(U^{n,\epsilon}_n)]=\mathbb{E}[\varphi_u(U^\epsilon_\infty)]$.

Sous la condition $IV_q$, on obtient , en faisant tendre $n$ vers $+\infty$

$$(78)\qquad \mathbb{E}[\varphi_u(U^\epsilon_\infty)]\leq K(n_1)+L'(\sum_{k=n_1+1}^{+\infty}(\frac{1-c_\epsilon}{\xi^{2dq}})^k)<+\infty.$$

Comme l'expression de droite est indépendante de $u$, on en déduit, puisque pour toute matrice $d\times d$ symétrique définie positive $U$ on a : $\lim_{u\rightarrow 0}\varphi_u(U)=\varphi(U)$ avec

$$(79)\qquad \varphi(U)=\int_{\mathbb{R}^d}||y||^{d(2q-1)}.e^{-y^T.U.y}.1_{\{y^T.U.y>0\}}dy,$$

que

(80) $$\mathbb{E}[\varphi(U_\infty^\varepsilon)] \leq L(\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1-c_\varepsilon}{\xi^{2dq}})^k) < +\infty.$$

Or on a

$$\mathbb{R}^d \times \{\omega : det(U_\infty^\varepsilon) \neq 0\} \subseteq \{(\omega, y) : y^T.U_\infty^\varepsilon.y > 0\}.$$

On obtient donc que :

$$\mathbb{E}[det(U_\infty^\varepsilon)^{-q}] = \mathbb{E}[det(U_\infty^\varepsilon)^{-q} 1_{det(U_\infty^\varepsilon)\neq 0}] \leq \frac{1}{\Gamma(q)^d}\mathbb{E}[\varphi(U_\infty^\varepsilon)] < +\infty$$

D'où le théorème ∎

## 7.3. Applications du théorème 7.1

Commençons par montrer le corollaire suivant :

**Corollaire 7.4.** *Sous les hypothèses $(H.1.(2))$, $(H.2)$, $(B.1)$ et $(C)$ avec $I(y_0) < r$ et $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dq}$ on a :*

$$(det(U_\infty(\varepsilon))^{-q} \in \mathbb{L}^1(P),$$

*où $U_\infty(\varepsilon)$ est définie dans la proposition 4.2., ne se limitant à la sous suite $(U_{\theta(n)}(\varepsilon))_{n\geq 0}$.*

*Preuve :* On pose $D_i^n(x,z) = D_x\varphi(x, z+z_i^n)$, $B_i^n(x,z) = D_z\varphi(x, z+z_i^n)(D_z\varphi(x, z+z_i^n)$ et $C_i^n(x,z) = C(x, z+z_i^n)$, où $(z_1^n, \cdots, z_n^n)$ est le point extrémal associé à l'énergie $I_n$ au point $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $I$ est donc vérifié.

D'aute part on a $III$ avec $\xi = \gamma$. (car $(C)$ est équivalent à : pour tous $(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\beta$ et tout $y \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, on a : $||D_x\varphi(x,z)(y)|| \geq \gamma||y||$).

On a, sous l'hypothèse $(B.1)$ :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d-\{0\}} \lambda(\{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T C(x, \varepsilon z + z_i^n)y \geq c||y||^2\}) \geq 1-\alpha_\varepsilon,$$

pour tout $n \geq n_0$ et $1 \leq i \leq n - n_1$.

Ce qui entraîne $II$ avec $c_\varepsilon = 1 - \alpha_\varepsilon$ et

$$E_i^n(x,y) = \{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T C(x, \varepsilon z + z_i^n)y \geq c||y||^2\}.$$

La condition $IV_q$ devient ici : $\dfrac{\alpha_\varepsilon}{\gamma^{2dq}} < 1$. □

**Corollaire 7.5.** *Sous les hypothèses $(H.1.(2))$, $(B.1)$, $(C)$ avec $\alpha_\epsilon < \gamma^{4d}$ l'hypothèse $(H_4)$ est vérifiée.*

*Démonstration :* Tout d' abord l'hypothèse $(H.1.(1))$ permet de montrer, pour chaque $0 < \varepsilon \leq 1$, existence et unicité de la probabilité invairante $\eta^{\varepsilon}$ (voir le lemme A1.de l'annexe).

Nous procédons comme dans l'article A.Coquio et J.B.Gravereaux [3]. Nous sommes donc ramené à montrer, sous la loi $\tilde{P}^{\varepsilon} = P \times \eta^{\varepsilon}$ :

$$(\varepsilon^2 det \tilde{V}_n^{\varepsilon})^{-2} \in \mathbb{L}^1(\tilde{P}^{\varepsilon})$$

avec, pour tout entier $n$ $\tilde{V}_n^{\varepsilon}(x, \omega) := U_n(x, \varepsilon Z_1(\omega), \cdots, \varepsilon Z_n(\omega))$.

D'après A.Coquio et J.B.Gravereaux [3] ou J.B.Gravereaux [5], la propriété çi-dessus est vérifiée, pour chaque $\varepsilon > 0$ sous les hypothèses $(H_1(2))$, $(B_\epsilon)$ et $(C)$ dés que $\alpha'_\epsilon < \gamma^{4d}$ où $\alpha'_\epsilon$ est défini dans l'hypothése $(B_\varepsilon)$ suivante :

$(B_\epsilon)$ Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\alpha'_\varepsilon := \sup_{x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d - \{0\}} \lambda(\{z \in \mathbb{R}^\beta : y^T.C(x, \varepsilon z).y \leq c||y||^2\}) < 1.$$

Or, l'hypothèse $(B.1)$ entraîne clairement $\alpha_\epsilon \leq \alpha'_\epsilon$. ∎

Enfin, le théorème (7.1) nous permet de montrer ce dernier corollaire.

**Corollaire 7.6.** *Sous les hypothèses $(H_1(1))$, $(H_2)$, $(B.1)$, $(C)$ avec $I(y_0) < r$ et un réel $\epsilon_N > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in ]0, \epsilon_N[$ $\alpha_\epsilon < \gamma^{2dq_0(2N+5)}$ alors l'hypothèse $(H.5(2q_0(N+2)+\eta))$ est vérifiée.*

*Démonstration :* Nous appliquons le corollaire en prenant $q = 2q_0(N+2) + \eta$ ∎

# A existence de la probabilité invariante :

Montrons, par deux méthodes, sous l'hypothèse $(H_1(1))$, l'existence d'au moins une probabilité invariante $\eta^{\varepsilon}$, pour chaque $\varepsilon \in ]0, 1]$, associée à la chaîne de Markov $(X_n^{\varepsilon}(x))_{n \geq 1}$.

## A1. Méthode utilisant des conditions de Foster :

D'après le théorème 2 de R.L.Tweedie [13], si la chaîne est "faiblement fellérienne" (c'est à dire si $f \in \mathcal{C}_b$ entraîne $f \in \mathcal{C}_b$, désigant la probabilité de transition de la chaîne) et si on a les "conditions de Foster" $(F_1)$ et $(F_3)$ suivantes, avec $A$ compact, alors la chaîne admet au moins une probabilité invariante.

$(F_1)$ Il existe un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^d$, une fonction mesurable positive $g$ et un $\mu > 0$ tels que : pour tout $x \in A^c$ on ait $\int_{A^c}(x, dy)g(y) \leq g(x) - \mu$.

$(F_3)$ $\sup_{x\in A}(\int_{A^c}(x, dy)g(y)) < +\infty$.

Sous l'hypothèse $(H_1(1))$ posons :

$$K = \sup_{x,z} ||D_z\varphi(x,z)|| < +\infty, \ \delta = \sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)|| < 1.$$

Soit enfin $M = K \int_{\mathbb{R}^\beta} ||z||\lambda(dz) < +\infty$.

$(H_1(1))$ entraîne $(F_1)$ et $(F_3)$ avec $g(y) = ||y||$ et avec $A$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $a$ si $a > \dfrac{M}{1-\delta}$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{A^c} \Pi^\varepsilon(x, dy)g(y) &= \int_{\{z:||\varphi(x,\varepsilon z)||>a\}} ||\varphi(x,\varepsilon z)||\lambda(dz) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^\beta} ||\varphi(x,\varepsilon z)||\lambda(dz) \\
&\leq \delta||x|| + \int_{\mathbb{R}^\beta} ||\varphi(0,\varepsilon z)||\lambda(dz) \\
&\leq \delta||x|| + K\int_{\mathbb{R}^\beta} ||z||\lambda(dz) \text{ ( car } \varphi(0,0) = 0) \\
&\leq ||x|| - \mu
\end{aligned}$$

si $a = \dfrac{M+\mu}{1-\delta}$ avec $||x|| > a$ et $\int_{A^c} \Pi^\varepsilon(x, dy)g(y) \leq M + \delta a$ si $||x|| \leq a$.

**Remarque :**

Les résultats de R.L.Tweedie [13] permettent également de montrer que $(H_1(1))$ entraîne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||x||^q \eta^\varepsilon(dx) < +\infty,$$

ceci pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$ et pour tout $q \geq 1$.

## A2. Méthode utilisant le théorème de Ionescu- Tulcea-Marinescu :

On note, pour $\beta > 0$,

$$B_\beta = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : ||f||_\beta < +\infty\}$$

où

$$||f||_\beta = \sup\{\frac{||f(x)||}{1+||x||^{1+\beta}} : x \in \mathbb{R}^d\}.$$

$(B_\beta, ||.||_\beta)$ est un espace de Banach.

On pose également, pour $\beta > 0$,

$$L_\beta = \{f \in B_\beta : m(f) < +\infty\}$$

où

$$m(f) = \sup\{\frac{||f(x) - f(y)||}{||x-y||} : x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y\}.$$

On pose, pour $f \in L_\beta$, $|f|_\beta = ||f||_\beta + m(f)$. $(L_\beta, |.|_\beta)$ est un espace de Banach.

En prenant $\beta = 1$, on voit facilement que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, si $f \in B_1$, alors $\Pi^\varepsilon f \in B_1$ et comme

$$\Pi^\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(x, \varepsilon z))\lambda(dz)$$

on a :

$$\begin{aligned} ||\Pi^\varepsilon f||_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^\beta} \frac{||f(\varphi(x,\varepsilon z))||}{1+||x||^2}\lambda(dz) \\ &\leq ||f||_1 \int_{\mathbb{R}^\beta} \frac{1+||\varphi(x,\varepsilon z)||^2}{1+||x||^2}\lambda(dz) \end{aligned}$$

par le théorème des accroissements finis on obtient :

$$||\Pi^\varepsilon f||_1 \leq ||f||_1(1+M'),$$

avec $M' = 2K^2 \int_{\mathbb{R}^\beta} ||z||^2 \lambda(dz)$.

D'autre part, si $f \in L_1$, on obtient $\Pi^\varepsilon f \in L_1$ et

$$|\Pi^\varepsilon f|_1 \leq (1+M')||f||_1 + \delta m(f) = \varphi|f|_1 + (1+M'-\delta)||f||_1,$$

avec $\delta = \sup_{x,z} ||D_x\varphi(x,z)||$.

On en déduit facilement qu'on peut appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu à $B_1, L_1$ et $\Pi^\varepsilon$; voir J.P.Leguesdron [8] pour une approche plus détaillée avec des conditions similaires. On obtient par cette méthode de décomposition spectrale de l'opérateur $\Pi^\varepsilon$ sur $L_1$ l'existence et l'unicité de la probabilité invariante $\eta^\varepsilon$ ainsi que l'existence de $\rho \in ]0,1[$ et de $K > 0$ tels que :

$$|\Pi^{\varepsilon,n} f - \eta^\varepsilon(f)|_1 \leq K\rho^n,$$

pour tout $n$ et tout $f \in L_1$.

**Remarque :**

On obtient simultanément, pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$ fixé :

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||x|| \eta^\varepsilon(dx) < +\infty.$$

En considérant $\beta > 1$, $B_{\beta-1}$ et $L_{\beta-1}$ à la place de $B_1$ et $L_1$ on voit que $(H_1(1))$ entraîne $\int_{\mathbb{R}^d} ||x||^{\beta+1} \eta^\varepsilon(dx) < +\infty$, pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$.

Cette méthode nous permet également d'obtenir le résultat suivant :

**Lemme A1.** *Pour toute fonction $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions $C^\infty$ à support compact) on a l'égalité suivante :*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[f(X_n^\varepsilon(0))] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \eta^\varepsilon(dx).$$

*Preuve :* Soit $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, si l'on définit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ comme étant $F = (f, 0, \cdots, 0)$, alors $F \in L_1$. On a donc

$$|\Pi^{\varepsilon,n} F - \eta^\varepsilon(F)|_1 \leq K.\rho^n.$$

Donc si l'on définit

$$L'_1 = \{f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) : ||f|| < +\infty \text{ et } m(f) < +\infty\}$$

où

$$||f|| = \sup\{\frac{|f(x)|}{1 + ||x||^2}; x \in \mathbb{R}^d\}$$

et

$$m(f) = \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||}; x, y \in \mathbb{R}^d, x \neq y\},$$

on a, si $f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset L'_1$ :

$$||\Pi^{\varepsilon,n} f - \eta^\varepsilon(f)|_1 \leq K.\rho^n.$$

Enfin, comme

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n^\varepsilon(0))] - \textstyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\eta^\varepsilon(dx)| &= |(\Pi^{\varepsilon,n} f)(0) - \eta^\varepsilon(f)| \\ &\leq |(\Pi^{\varepsilon,n} f) - \eta^\varepsilon(f)|_{L'_1} \\ &\leq K.\rho^n \end{aligned}$$

d'où le résultat.

# References

[1] G.Ben-Arous, Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus,*Ann. Sci. E.N.S*,**21**, n° 2, 307–331, (1988).

[2] K.Bitcheler, J.B.Gravereaux et J.Jacod, *Malliavin Calculus for Process with Jumps*, Gordon and Breach Publishers LTD, (1987).

[3] A.Coquio et J.B.Gravereaux, Calcul de Malliavin et régularité de la densité d'une probabilité invariante d'une chaîne de Markov,*Ann. Inst. Henri Poincaré*, **28**, n° 4, 431–478, (1992).

[4] M.I.Freidlin et A.D.Wentzell, *Random Pertubations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, (1984).

[5] J.B.Gravereaux, Calcul de Malliavin et probabilité invariante d'une chaîne de Markov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **24**, n° 2, 159–188, (1988).

[6] A.K.Grintsevicius, On the Continuity of Sum of Dependent Variables Connected with Independent Walks on Lines, *Theory Prob. Appl.*, **19**, 163–168, (1974).

[7] Y.Kifer, A Discrete-time version of the Wenzell-Freidlin Theory,*Ann. Prob.*, **18**, n° 4, 1676–1692, (1990).

[8] J.P.Leguesdron, Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec chocs élastiques en zéro, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **24**, n° 2, 159–188, (1988).

[9] E.Le Page, Théoremes de renouvellement pour des produits de matrices aléatoires. Equations aux différences aléatoires, *Séminaires de Probabilités,* Rennes-I, (1983).

[10] P.Malliavin, Stochastic Calculus of Variations and Hypoelliptic Operators, *Proc. Int. 1. Conf. on Stoch. Diff. Equa. Kyoto*, 195–263, (1976).

[11] F.Norman,*Markov processes and learning models*, Academic Press. New York. 1972.

[12] L.Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, (1966).

[13] R.L.Tweedie, Invariant measures for Markov chains with on irreductibility asumptions,*J. Appl. Probab.* Special vol. 25A. Applied Probability. Trust, 1988.

[14] W.Vervaat, On a Stochastic Difference Equation and Representation of Non-Negative Infinitely Divisible Random Variables,*Adv. Appl. Prob.*, **11**, 750–783, (1979).

[15] M.Zakai, The Malliavin Calculus,*Acta Applicandae Math.*, **3-2**, 175–207, (1985).

[16] D.W.Stroock, *An introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer-Verlag, (1984).