Jean-Marc Derrien

Sur l'existence de cohomologues réguliers pour les cocycles intégrables

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A4_0>

Sur l'existence de cohomologues réguliers pour les cocycles intégrables

Jean-Marc Derrien [1]

1 Mars 1995

1 Introduction

Nous donnons dans ce papier des preuves détaillées de théorèmes présentés dans une note de A.V. Kočergin ([Ko]). A notre connaissance, celles-ci n'ont pas été publiées dans leur intégralité.

Dans la situation d'un système dynamique ergodique défini sur un espace métrique compact, ces théorèmes assurent l'existence de cohomologues continus et strictement positifs à tout cocycle intégrable d'intégrale strictement positive. De plus, lorsque le cocycle intégrable est défini sur une variété C^∞ compacte, ils donnent l'existence d'un cohomologue différentiable partout et C^∞ sauf peut-être en un point choisi arbitrairement parmi ceux dont chaque voisinage est de mesure strictement positive.

Sous les mêmes hypothèses de régularité et d'ergodicité, l'existence de cohomologues continus à tout cocycle intégrable est démontrée également dans [K] et dans [Ru].

Il nous a paru utile de détailler la démarche suivie par A.V. Kočergin dans [Ko] car le caractère condensé de la rédaction de son article en rend la compréhension difficile et car les résultats sont importants et les méthodes d'une grande élégance (avec en particulier le résultat clé énoncé dans le théorème 3.4).

Enfin, le cas de non ergodicité du système dynamique considéré est discuté dans un dernier paragraphe.

L'intérêt de ces résultats d'existence apparaît, en particulier, dans l'étude de la convergence presque sûre des moyennes

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r} T^{q_i(n)} f_i\,, \quad N \geq 1\,, \tag{1}$$

pour un système dynamique probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, des fonctions mesurables f_i qui admettent des moments d'ordres correctement choisis et des polynômes q_i qui prennent des valeurs entières aux points entiers.

En effet, lorsque $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système distal, le théorème d'équirépartition de Weyl joue un rôle décisif dans cette étude ([F2],[L1],[L2]).

Pour appliquer ce théorème d'équirépartition et démontrer la convergence presque sûre des moyennes (1) pour un nombre arbitraire de polynômes q_i de degré 1 et pour les extensions isométriques par un groupe abélien, compact et métrisable, de translations ergodiques, $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$, sur un groupe compact, connexe et métrisable, E. Lesigne utilise, dans [L2], l'existence d'un cohomologue continu à tout cocycle défini sur $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ et à valeurs dans le groupe $\mathcal{S}^1$ des complexes de module un, existence qui se déduit des résultats de A.V. Kočergin.

[1] Université de Tours — Laboratoire de Mathématiques et Applications. Parc de Grandmont. 37200 Tours.

Dans [Ru], D.J. Rudolph explique l'intérêt de ces résultats de régularisation par cohomologie pour la construction d'exemples et de contre-exemples en théorie ergodique.

Signalons, enfin, que les résultats de A.V. Kočergin admettent des applications dans l'étude de la transience des cocycles intégrables ([D]).

L'auteur a le plaisir de remercier ici J.-P. Conze, Y. Derriennic, E. Lesigne et D.J. Rudolph pour leurs questions et leurs remarques.

2 Notions sur les $\mathbb{Z}$-cocycles

Les définitions introduites ci-dessous sont classiques. Nous les rappelons ici dans le but d'établir un lien avec les articles sur le sujet. Cependant, par commodité pour la lecture, nous n'utiliserons pas ces définitions de façon systématique.

Dans la suite, $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ désigne un système dynamique probabilisé pour lequel la transformation T est supposée inversible d'inverse mesurable.

De plus, on considère dans ce paragraphe un groupe localement compact G, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_G$ et d'une mesure de Haar dg, dont la loi est notée multiplicativement.

Définition *On appelle* $(\mathbb{Z}, G)$-cocycle*, une application mesurable définie sur* $(X, \mathcal{A})$ *et à valeurs dans* G.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on parle de $\mathbb{Z}$-cocycle, voire de cocycle.

Il est important de remarquer que, si l'on pose, pour tout élément x de X,

$$\varphi^{(n)}(x) := \begin{cases} \varphi(T^{n-1}x)\ldots\varphi(Tx)\varphi(x) & \text{pour } n \geq 1 \\ 1 & \text{pour } n = 0 \\ \varphi(T^n x)^{-1}\ldots\varphi(T^{-2}x)^{-1}\varphi(T^{-1}x)^{-1} & \text{pour } n \leq -1 \end{cases} ,$$

alors l'application:

$$\begin{array}{rcl} X \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ (x, n) & \longmapsto & \varphi^{(n)}(x) , \end{array}$$

vérifie l'équation dite "équation de cocycle":

$$\varphi^{(n+m)}(x) = \varphi^{(n)}(T^m x)\varphi^{(m)}(x) \quad n, m \in \mathbb{Z} , \quad x \in X .$$

Définition *Deux cocycles* φ_1 *et* φ_2 *sont dits* cohomologues *dès qu'il existe une application mesurable* Φ *définie sur* $(X, \mathcal{A})$ *et à valeurs dans* G *telle que*

$$\varphi_2(x) = \Phi(Tx)^{-1}\varphi_1(x)\Phi(x) \quad \textit{presque partout.}$$

La fonction Φ *est alors appelée fonction de transfert de* φ_1 *vers* φ_2.

Remarque 1 Deux $(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$-cocycles, cohomologues et intégrables, φ_1 et φ_2, vérifient

$$\mathbf{E}[\varphi_1|\mathcal{I}] = \mathbf{E}[\varphi_2|\mathcal{I}] , \quad \text{presque partout} ,$$

où $\mathcal{I}$ désigne la tribu des invariants du système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$.

En effet, si l'on note Φ la fonction de transfert asociée, il vient, pour tout $N \geq 1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_2(T^n x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_1(T^n x) + \frac{1}{N}\left(\Phi \circ T^N(x) - \Phi(x)\right) ,$$

pour presque tout x.

Or, la fonction $\frac{1}{N}\left(\Phi \circ T^N - \Phi\right)$ converge vers 0 en probabilité. Le théorème ergodique de convergence en moyenne permet donc de conclure.

L'intérêt de cette notion de cohomologie apparaît, en particulier, dans le théorème suivant.

Théorème *Lorsque deux cocycles φ_1 et φ_2 sont cohomologues, les produits gauches T_{φ_1} et T_{φ_2}, définis sur $(X \times G, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_G, \mu \otimes \mathrm{d}g)$ par*

$$T_{\varphi_i}: \begin{array}{l} X \times G \longrightarrow X \times G \\ (x,g) \longmapsto (Tx, \varphi_i(x)g) \end{array}, \quad i = 1,2\,,$$

sont isomorphes d'un point de vue métrique.

3 Rédaction détaillée des preuves des résultats de A.V. Kočergin

Dans la suite, on note $\mathcal{M} := (\mathcal{M}(X, \mathbb{R}), \mathrm{d})$ l'espace des fonctions mesurables définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, la distance d étant définie par:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f,0) &= \inf_{\varepsilon>0}(\arctan(\varepsilon + \mu[|f| \geq \varepsilon]))\,, \\ \mathrm{d}(f,g) &= \mathrm{d}(f-g,0)\,. \end{aligned}$$

On sait qu'alors $\mathcal{M}$ est complet.

Dans ce paragraphe et le suivant, le système dynamique probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est toujours supposé ergodique.

Plan du paragraphe:

Le théorème 3.1 assure l'existence d'un cohomologue dominé par une fonction donnée a priori.

Le théorème 3.4 est une modification du théorème 3.1 qui permet un contrôle des fonctions de transfert.

Les théorèmes 3.6, 3.7 et 3.8 assurent l'existence de cohomologues réguliers.

Théorème 3.1 *Soient f et g deux éléments de $L^1(X,\mu)$ tels que $\|f\|_1 < \|g\|_1$.*

Alors, il existe une fonction h dans $L^1(X,\mu)$ et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$|h| \leq |g| \quad \text{sur } X\,,$$

$$f = h + \Phi \circ T - \Phi \quad \text{presque partout}\,.$$

De plus, lorsque f est positive ou nulle, h peut également être choisie positive ou nulle.

Preuve: Sans perte de généralité, on supposera la fonction g à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Dans la suite, on montre qu'il existe une suite $\{\Psi_n\}_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables telle que, pour presque tout x dans X, on ait les quatre propriétés suivantes:

1. les réels $f(x)$ et $\Psi_n(x)$, $n \geq 0$, sont de même signe,

2. il existe un plus petit entier $N(x)$ pour lequel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N(x)-1} \Psi_n(x) \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = 0\,, \quad \text{pour } n \geq N(x)\,,$$

3. la série:

$$\sum_{n\geq 0} |\Psi_n(T^{-n}x)|\,,$$

est convergente et majorée par $g(x)$; ce qui revient à dire que, pour presque tout x, pour tout $n \geq 0$,

$$|\Psi_0(T^n x)| + \cdots + |\Psi_n(x)| \leq g(T^n x)\,,$$

4. il existe un plus petit entier $M(x) \geq 0$ tel que si $n \geq M(x)$ alors les réels $\Psi_n(T^{-k}x)$ sont nuls pour $0 \leq k \leq n$.

On peut alors conclure en sommant sur $n \geq 0$ l'égalité:

$$\Psi_n(x) - \Psi_n(T^{-n}x) = (\sum_{k=1}^{n} \Psi_n \circ T^{-k})(Tx) - (\sum_{k=1}^{n} \Psi_n \circ T^{-k})(x)\,,$$

et en posant $h(x) := \sum_{n\geq 0} \Psi_n(T^{-n}x)$ et $\Phi(x) := \sum_{n=0}^{M(x)} \sum_{k=1}^{n} \Psi_n(T^{-k}x)$. (Par convention, on a posé $\sum_{k=1}^{0} \Psi_0 \circ T^{-k} \equiv 0$.)

En particulier, si la fonction f est positive ou nulle, la fonction h construite ici est également positive ou nulle.

Etant donnée la condition 1. , seule la suite $\{|\Psi_n|\}_{n\geq 0}$ est à déterminer.

On construit cette suite par récurrence de telle sorte à optimiser les conditions 2. et 3..

Pour $|\Psi_0(x)|$, on choisit le plus grand réel qui satisfait à la fois:

$$|f(x)| \geq |\Psi_0(x)| \quad \text{et} \quad g(x) \geq |\Psi_0(x)|\,.$$

Si $|\Psi_0(x)|, |\Psi_1(x)|, \ldots, |\Psi_{n-1}(x)|$ sont supposés choisis pour presque tout x, $|\Psi_n(x)|$ désigne le plus grand réel à satisfaire les deux conditions suivantes:

$$|f(x)| \geq |\Psi_0(x)| + |\Psi_1(x)| + \cdots + |\Psi_n(x)|$$
$$\text{et}$$
$$g(T^n x) \geq |\Psi_0(T^n x)| + |\Psi_1(T^{n-1}x)| + \cdots + |\Psi_n(x)|.$$

Il est alors clair par construction que, si

$$|f(x)| = |\Psi_0(x)| + |\Psi_1(x)| + \cdots + |\Psi_{n_0(x)}(x)|\,,$$

pour un entier $n_0(x)$, alors $\Psi_n(x) = 0$ pour tout $n \geq n_0(x) + 1$.

Montrons qu'un tel entier existe pour presque tout x de X.

Pour tout $n \geq 0$, on pose:

$$s_n(x) := |\Psi_0(x)| + |\Psi_1(T^{-1}x)| + \cdots + |\Psi_n(T^{-n}x)|$$

et

$$A := \{x \in X \mid s_n(x) < g(x) \quad \text{pour tout } n \geq 0\}.$$

Alors, $\mu(A) > 0$. En effet, la suite $\{s_n(x)\}_{n \geq 0}$ est croissante et l'on a, d'après le théorème de convergence monotone et l'invariance de la probabilité μ sous l'action de T,

$$\begin{aligned}\int \lim_{n \to +\infty} s_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{n \to +\infty} \int |\Psi_0(x)| + \cdots + |\Psi_n(x)|\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \int |f(x)|\, \mathrm{d}\mu(x) < \int g(x)\, \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Ainsi, étant donnée les hypothèses d'ergodicité et d'inversibilité faites sur le système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, il existe deux fonctions n_0 et n_1 à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour presque tout x dans X, $T^{n_0(x)}x$ et $T^{-n_1(x)}x$ soient éléments de A.

En particulier:

$$g(T^{n_0(x)}x) > s_{n_0(x)}(T^{n_0(x)}x) = |\Psi_0(T^{n_0(x)}x)| + |\Psi_1(T^{n_0(x)-1}x)| + \cdots + |\Psi_{n_0(x)}(x)|\,,$$

ce qui montre, par construction, que le réel $|\Psi_{n_0(x)}(x)|$ est choisi de telle sorte que

$$|f(x)| = |\Psi_0(x)| + |\Psi_1(x)| + \cdots + |\Psi_{n_0(x)}(x)|\,.$$

Enfin, si $n \geq n_0(x) + n_1(x)$ et si $0 \leq k \leq n$ alors:

- lorsque $0 \leq k \leq n_1(x) - 1$, $n \geq n_0(x) + k + 1$ et, comme $T^{n_0(x)+k}(T^{-k}x)$ est élément de A, on a l'égalité $\Psi_n(T^{-k}x) = 0$,
- lorsque $n_1(x) \leq k \leq n$, $n \geq -n_1(x) + k + 1$, $-n_1(x) + k \geq 0$ et, comme $T^{-n_1(x)+k}(T^{-k}x)$ est élément de A, on a encore l'égalité $\Psi_n(T^{-k}x) = 0$;

ce qui prouve l'existence de l'application M de la condition 4.; application qui, par ailleurs, est mesurable. □

On déduit du théorème précédent deux corollaires qui seront utilisés dans la suite.

Corollaire 3.2 *Soient f et g deux éléments de $L^1(X,\mu)$ avec $\int f\, \mathrm{d}\mu = 0$ et $\|g\|_1 > 0$.*
Alors, il existe une fonction h dans $L^1(X,\mu)$ et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$|h| \leq |g| \quad \textit{sur } X\,,$$

$$f = h + \Phi \circ T - \Phi \quad \textit{presque partout}\,.$$

Preuve On suppose à nouveau la fonction g à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Avec cette hypothèse, comme $\int f\, \mathrm{d}\mu = 0$ et, donc, $\int f_+\, \mathrm{d}\mu = \int f_-\, \mathrm{d}\mu$, il vient:

$$\|f_+\|_1 < \left\| f_- + \frac{g}{4} \right\|_1 \,.$$

Ainsi, d'après le théorème précédent, il existe une fonction h_1 dans $\mathrm{L}^1(X,\mu)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et une fonction Φ_1 dans $\mathcal{M}$ qui vérifient:

$$h_1(x) \leq f_-(x) + \frac{g(x)}{4} \quad \text{pour presque tout } x \ ,$$

$$\text{et} \quad f = h_2 + \Phi_1 \circ T - \Phi_1 \quad \text{presque partout} \ ,$$

si l'on a posé $h_2 := h_1 - f_-$.

Ainsi, $h_2^+ \leq \frac{g}{4}$, presque partout, et $\int h_2 \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu = 0$, d'après la remarque 1. On en déduit que:

$$\int |h_2| \, \mathrm{d}\mu = 2 \int h_2^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{\|g\|_1}{2} < \|g\|_1 \ .$$

Il est facile de voir que l'on conclut alors en appliquant une nouvelle fois le théorème 3.1 à la fonction h_2, cohomologue à f, et à la fonction g. □

Corollaire 3.3 *Soient f_1 et f_2 deux éléments de $L^1(X,\mu)$ tels que $\int f_1 \, \mathrm{d}\mu = \int f_2 \, \mathrm{d}\mu$.*

Alors, à tout $\varepsilon > 0$ et à toute partie mesurable A de X de mesure strictement inférieure à un, on peut associer une fonction h dans $L^1(X,\mu)$ et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$\begin{aligned} &h = f_2 && \textit{sur } A \ , \\ &|h(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon && \textit{sur } X \ , \\ &f_1 = h + \Phi \circ T - \Phi && \textit{presque partout} . \end{aligned}$$

Preuve En appliquant le corollaire précédent aux fonctions $f := f_1 - f_2$ et $g := \varepsilon \mathbb{1}_{A^c}$, on montre l'existence de fonctions H dans $\mathrm{L}^1(X,\mu)$ et Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$|H(x)| \leq \varepsilon \mathbb{1}_{A^c}(x) \quad \text{pour presque tout } x \ ,$$

$$\text{et} \quad f_1 - f_2 = H + \Phi \circ T - \Phi \quad \text{presque partout} \ .$$

La fonction $h := H + f_2$ convient alors. □

Le théorème suivant permet de contrôler, en un certain sens, les fonctions de transfert Φ.

Théorème 3.4 *Soient f et g deux éléments de $L^1(X,\mu)$ tels que $\|f\|_1 < \|g\|_1$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $\hat{f}$ de $L^1(X,\mu)$ qui vérifie

1. $|\hat{f}(x)| \leq |f(x)|$ *presque partout,*
2. $\mathrm{d}\left(\hat{f}, 0\right) \leq \delta$,

il existe $\hat{h}$ et $\hat{\Phi}$, deux fonctions dans $\mathcal{M}$, telles que

- *(a)* $|\hat{h}| \leq |g|$ *sur X* ,
- *(b)* $\mathrm{d}(\hat{\Phi}, 0) \leq \varepsilon$,
- *(c)* $\hat{f} = \hat{h} + \hat{\Phi} \circ T - \hat{\Phi}$ *presque partout.*

Remarque 2 Il est facile de vérifier que, dans l'énoncé précédent, on peut remplacer

$$\mathrm{d}(\hat{f},0) \leq \delta \quad \text{par} \quad \mu\left[|\hat{f}| \geq \delta\right] \leq \delta$$

et

$$\mathrm{d}(\hat{\Phi},0) \leq \varepsilon \quad \text{par} \quad \mu\left[|\hat{\Phi}| \geq \varepsilon\right] \leq \varepsilon\ ;$$

ce que l'on fera dans la preuve du théorème.

Preuve On suppose une nouvelle fois la fonction g à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Effectuons, à partir du couple (f,g), la construction introduite lors de la démonstration du théorème précédent, dont on reprend les notations.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme l'application:

$$\begin{array}{rl} M: & X \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto M(x) \end{array},$$

est mesurable, on peut trouver un réel strictement positif M tel que, si $\Omega_1 := \{x \in X \mid M(x) \leq M\}$, on ait $\mu(\Omega_1) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons alors:

$$\delta := \min\left(\frac{2\varepsilon}{M(M+1)}, \frac{\varepsilon}{2M}\right),$$

et considérons une fonction mesurable $\hat{f}$ qui vérifie:

$$|\hat{f}(x)| \leq |f(x)| \quad \text{presque partout} \quad \text{et} \quad \mu(\Omega_2^c) \leq \delta$$

pour $\Omega_2 := \left[|\hat{f}| < \delta\right]$.

Comme $\left\|\hat{f}\right\|_1 < \|g\|_1$, on peut également effectuer la construction du théorème 3.1 à partir du couple $\left(\hat{f},g\right)$. On obtient ainsi deux fonctions mesurables $\hat{h}$ et $\hat{\Phi}$ telles que

$$\hat{f} = \hat{h} + \hat{\Phi}\circ T - \hat{\Phi} \quad \text{presque partout},$$

$$|\hat{h}| \leq g \quad \text{sur } X,$$

et, avec des notations évidentes,

$$\hat{\Phi}(x) = \sum_{n=0}^{\hat{M}(x)} \sum_{k=1}^{n} |\hat{\Psi}_n(T^{-k}x)|.$$

Ainsi, en particulier,

$$\begin{aligned} |\hat{\Phi}(x)| &\leq \sum_{n=0}^{\hat{M}(x)} \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}(T^{-k}x)| \\ &\leq \frac{\hat{M}(x)(\hat{M}(x)+1)}{2} \sup_{1\leq k\leq \hat{M}(x)} |\hat{f}(T^{-k}x)|. \end{aligned} \tag{2}$$

Le lemme suivant est la clé de la preuve du théorème. Il sera établi en fin de démonstration.

Lemme 3.5 *Si f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(X,\mu)$ et si, pour presque tout x , $|\hat{f}(x)| \leq |f(x)|$, alors $\hat{N} \leq N$ presque partout.*

On en déduit que, pour presque tout x, $\hat{M}(x)$ est inférieur ou égal à $M(x)$.
Ainsi, d'après l'inégalité (2), si x est élément de $\Omega_1 \cap T\Omega_2 \cap \ldots \cap T^M\Omega_2$ alors

$$\begin{aligned} |\hat{\Phi}(x)| &\leq \frac{M(M+1)}{2} \sup_{1\leq k\leq M} |\hat{f}(T^{-k}x)| \\ &< \frac{M(M+1)}{2}\delta \leq \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Et, comme

$$\mu\left(\Omega_1 \cap T\Omega_2 \cap \ldots \cap T^M\Omega_2\right) > 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} + M\delta\right) > 1 - \varepsilon \,,$$

il vient $\mu\left[|\hat{\Phi}| \geq \varepsilon\right] \leq \varepsilon$; ce qui montre le théorème.

Preuve du lemme 3.5
Il s'agit d'établir que si

$$f(x) = \Psi_0(x) + \Psi_1(x) + \cdots + \Psi_n(x) \quad \text{avec } n \geq 0 \,,$$

alors

$$\hat{f}(x) = \hat{\Psi}_0(x) + \hat{\Psi}_1(x) + \cdots + \hat{\Psi}_n(x) \,.$$

Posons

$$Y_{1,0} := \{x \in X \mid f(x) = \Psi_0(x)\}$$

et, pour tout $n \geq 0$, partitionnons l'espace X en trois sous-ensembles:

$$X_n := \{x \in X \mid \hat{f}(x) = \hat{\Psi}_0(x) + \hat{\Psi}_1(x) + \cdots + \hat{\Psi}_n(x)\} \,,$$

$$Y_{1,n+1} := \{x \in X_n^c \mid f(x) = \Psi_0(x) + \Psi_1(x) + \cdots + \Psi_{n+1}(x)\} \,,$$
$$Y_{2,n+1} := \{x \in X_n^c \mid f(x) \neq \Psi_0(x) + \Psi_1(x) + \cdots + \Psi_{n+1}(x)\} \,.$$

On va montrer par récurrence sur n que

1. $|\hat{\Psi}_0(T^px)| + |\hat{\Psi}_1(T^{p-1}x)| + \cdots + |\hat{\Psi}_p(x)| \leq |\Psi_0(T^px)| + |\Psi_1(T^{p-1}x)| + \cdots + |\Psi_p(x)|$, pour presque tout x de X et pour tout p dans $\{0,1,\ldots,n\}$.
2. Si x est élément de $Y_{1,n}$ avec $n \geq 0$ alors

$$\hat{f}(x) = \hat{\Psi}_0(x) + \hat{\Psi}_1(x) + \cdots + \hat{\Psi}_n(x) \,.$$

Il est clair que la propriété 2. suffit pour conclure.

<u>Pour n= 0:</u>

(a) $|\hat{\Psi}_0(x)| = \min\left(g(x), |\hat{f}(x)|\right) \leq \min\left(g(x), |f(x)|\right) = |\Psi_0(x)|$.

(b) Si $f(x) = \Psi_0(x)$ alors $g(x) \geq |f(x)| \geq |\hat{f}(x)|$ et donc $\hat{\Psi}_0(x) = \hat{f}(x)$.

<u>Supposons les propriétés 1. et 2. établies pour n et montrons-les pour $n+1$:</u>

On a $X = X_n + Y_{1,n+1} + Y_{2,n+1}$.

- Si x est élément de X_n alors $|\hat{\Psi}_{n+1}(x)| = 0 \leq |\Psi_{n+1}(x)|$.
  Ainsi, comme
  $$|\hat{\Psi}_0(T^{n+1}x)| + |\hat{\Psi}_1(T^n x)| + \cdots + |\hat{\Psi}_n(Tx)| \leq |\Psi_0(T^{n+1}x)| + |\Psi_1(T^n x)| + \cdots + |\Psi_n(Tx)| ,$$
  on en déduit l'inégalité 1. avec $p = n+1$.
- Si x est élément de $Y_{2,n+1}$ alors
  $$|\Psi_0(T^{n+1}x)|+|\Psi_1(T^n x)|+\cdots+|\Psi_{n+1}(x)| = g(T^{n+1}x) \geq |\hat{\Psi}_0(T^{n+1}x)|+|\hat{\Psi}_1(T^n x)|+\cdots+|\hat{\Psi}_{n+1}(x)| ,$$
  d'où l'inégalité 1. avec $p = n+1$.
- Si x est élément de $Y_{1,n+1}$, comme il n'appartient pas à X_n, on a
  $$\hat{f}(x) \neq \hat{\Psi}_0(x) + \cdots + \hat{\Psi}_p(x) \quad \text{pour tout } 0 \leq p \leq n,$$
  soit ,
  $$g(T^p x) = |\hat{\Psi}_0(T^p x)| + \cdots + |\hat{\Psi}_p(x)| \quad \text{pour tout } 0 \leq p \leq n.$$
  On en déduit à l'aide de l'hypothèse de récurrence 2. que
  $$f(x) \neq \Psi_0(x) + \cdots + \Psi_p(x) \quad \text{pour tout } 0 \leq p \leq n.$$
  et donc que
  $$g(T^p x) = |\Psi_0(T^p x)| + \cdots + |\Psi_p(x)| \quad \text{pour tout } 0 \leq p \leq n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\hat{\Psi}_0(x)| &= g(x) = |\Psi_0(x)| , \\
|\hat{\Psi}_p(x)| &= g(T^p x) - |\hat{\Psi}_0(T^p x)| - \cdots - |\hat{\Psi}_{p-1}(Tx)| \\
&\geq g(x) - |\Psi_0(T^p x)| - \cdots - |\Psi_{p-1}(Tx)| \\
&= |\Psi_p(x)| \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n .
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}): \quad |\hat{\Psi}_{n+1}(x)| &\leq |\hat{f}(x)| - |\hat{\Psi}_0(x)| - \cdots - |\hat{\Psi}_n(x)| \\
&\leq |f(x)| - |\Psi_0(x)| - \cdots - |\Psi_n(x)| = |\Psi_{n+1}(x)| .
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}): \quad |\Psi_{n+1}(x)| &\leq g(T^{n+1}x) - |\Psi_0(T^{n+1}x)| - \cdots - |\Psi_n(Tx)| \\
&\leq g(T^{n+1}x) - |\hat{\Psi}_0(T^{n+1}x)| - \cdots - |\hat{\Psi}_n(Tx)|
\end{aligned}$$

étant donnée l'hypothèse de récurrence 1..

(I) et (II) montrent que:

$$|\hat{f}(x)| - |\hat{\Psi}_0(x)| - \cdots - |\hat{\Psi}_n(x)| \leq g(T^{n+1}x) - |\hat{\Psi}_0(T^{n+1}x)| - \cdots - |\hat{\Psi}_n(Tx)| ;$$

ce qui prouve l'égalité:

$$\hat{f}(x) = \hat{\Psi}_0(x) + \cdots + \hat{\Psi}_n(x) + \hat{\Psi}_{n+1}(x)$$

par construction de $|\hat{\Psi}_{n+1}(x)|$.

La récurrence est achevée et le lemme 3.5 est démontré. □

On suppose à présent le système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ défini sur un espace métrique compact X ($\mathcal{A}$ désigne alors sa tribu borélienne et μ est une mesure de Radon). Dans cette situation, on peut montrer le

Théorème 3.6 *Toute fonction intégrable f est cohomologue à une fonction continue.*

De plus, si g désigne une fonction continue sur X avec $\int g \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$ et si A est une partie fermée de X avec $\mu(A) < 1$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue h et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$
\begin{array}{ll}
h = g & \textit{sur } A\,, \\[2ex]
|h(x) - g(x)| \leq \varepsilon & \textit{pour tout élément } x \textit{ de } X\,, \\[2ex]
f = h + \Phi \circ T - \Phi & \textit{presque partout}\,.
\end{array}
$$

On déduit de la précision apportée par la seconde partie du théorème précédent le

Théorème 3.7 *Toute fonction intégrable f d'intégrale strictement positive (en particulier, toute fonction intégrable strictement positive) est cohomologue à une fonction continue h strictement positive.*

De plus, on peut supposer que h est arbitrairement proche de n'importe quelle fonction g, fixée à l'avance, qui soit continue, strictement positive et qui vérifie $\int g \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu$. On peut également supposer que h et g coïncident sur une partie fermée A de X de mesure strictement inférieure à un.

Remarque 3 Les théorèmes 3.6 et 3.7 ci-dessus sont établis sans qu'aucune condition de continuité sur la transformation T ne soit imposée.

Preuve du théorème 3.6

Supposons dans un premier temps que $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

On déduit du corollaire 3.3, qu'il existe une fonction H_1 mesurable bornée et une fonction Φ_0 mesurable telles que

$$
\left\{
\begin{array}{l}
H_1 \text{ soit nulle sur } A \\[2ex]
\|H_1\|_\infty \leq \varepsilon_0 := \dfrac{\varepsilon}{2} \\[2ex]
f = H_1 + \Phi_0 \circ T - \Phi_0
\end{array}
\right. . \tag{3}
$$

On pose alors $\varepsilon'_0 := \mathrm{d}(\Phi_0, 0)$ et $\varepsilon_{-1} := 0$, et l'on se donne deux suites $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$
\sum_{i\geq 1} \varepsilon_i \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{i\geq 1} \varepsilon'_i < +\infty\,.
$$

Montrons par récurrence que l'on peut construire des suites de fonctions mesurables $(h_n)_{n\geq 0}$, $(H_n)_{n\geq 1}$ et $(\Phi_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout $n \geq 0$, on ait:

$$
f = h_0 + h_1 + \cdots + h_n + H_{n+1} + \left(\sum_{i=0}^{n} \Phi_i\right) \circ T - \left(\sum_{i=0}^{n} \Phi_i\right)
$$

avec

1. h_i continue, nulle sur A et $\|h_i\|_\infty \leq \varepsilon_{i-1}$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$,

2. H_{n+1} mesurable, nulle sur A et essentiellement bornée par ε_n,

3. $\mathrm{d}(\Phi_i, 0) \leq \varepsilon'_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

Comme $\mathcal{M}$ est complet, on déduit ainsi de la convergence de la série $\sum_{i\geq 0} \varepsilon'_i$ que la fonction continue $h := \sum_{n\geq 0} h_n$, nulle sur A et uniformément bornée par ε, est cohomologue à la fonction f avec pour fonction de transfert $\sum_{n\geq 0} \Phi_n$.

<u>Construction des suites de fonctions:</u>

Pour $n = 0$, il suffit de considérer le système (3) avec $h_0 := 0$.
Supposons les suites construites jusqu'à l'ordre $n - 1$.
La partie A de X étant fermée, l'espace $\mathcal{C}_{A^c}(X)$, des fonctions continues sur X nulles sur A, est dense dans $(\mathrm{L}^1_{A^c}(X, \mu), \|\cdot\|_1)$, l'espace des fonctions intégrables sur (X, μ) nulles sur A.
On peut donc trouver une suite $\left(k_m^{(n)}\right)_{m\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}_{A^c}(X)$ telle que

$$\sum_{m\geq 1} \left\|H_n - k_m^{(n)}\right\|_1 < \mu(A^c)\varepsilon_n .$$

Alors,

$$l(x) := \sum_{m\geq 1} |H_n(x) - k_m^{(n)}(x)|$$

est bien défini comme élément de $\mathrm{L}^1(X, \mu)$.
En outre, comme $\|H_n\|_\infty \leq \varepsilon_{n-1}$, on peut supposer que $\left\|k_m^{(n)}\right\|_\infty \leq \varepsilon_{n-1}$ pour tout $m \geq 1$.

D'autre part, l'inégalité $\|l\|_1 < \mu(A^c)\varepsilon_n$ et le théorème 3.4 assurent qu'il existe un réel strictement positif δ tel que si $\mathrm{d}(H_n, k_m^{(n)}) \leq \delta$ alors il existe deux éléments H_{n+1} et Φ_n de $\mathcal{M}$ tels que

1. $H_n = k_m^{(n)} + H_{n+1} + \Phi_n \circ T - \Phi_n$,

2. $|H_{n+1}(x)| \leq \varepsilon_n \mathbb{I}_{A^c}(x)$ pour presque tout x ,

3. $\mathrm{d}(\Phi_n, 0) \leq \varepsilon'_n$.

Or,

$$\lim_{m\to+\infty} \left\|H_n - k_m^{(n)}\right\|_1 = 0 .$$

Donc, pour m_0 assez grand, $\mathrm{d}(H_n, k_{m_0}^{(n)}) \leq \delta$.
Il est clair que $h_n := k_{m_0}^{(n)}$ convient.
Ceci prouve le théorème dans le cas où f est d'intégrale nulle. Le cas général envisagé dans l'énoncé s'en déduit aisément en appliquant ce qui précède à la différence $f - g$. □

Supposons maintenant que l'espace X soit une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, μ désignant à nouveau une mesure de Radon sur X. Dans cette situation et toujours sans hypothèse de régularité concernant la transformation T, on peut montrer le

Théorème 3.8 *Toute fonction f intégrable sur l'espace (X,μ) est cohomologue à une fonction différentiable, h, qui est également $\mathcal{C}^\infty$ sur X sauf peut-être en un point x_0 arbitrairement choisi parmi ceux dont chaque voisinage est de mesure strictement positive.*

On peut en outre imposer à la différentielle de h d'être nulle en x_0.

Preuve

Lorsque le système dynamique $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ est périodique (ie lorsqu'il existe x dans X avec $\mu(\{x\})>0$), il est facile de voir que toute fonction intégrable est presque partout égale à une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Dans la suite, on suppose le système dynamique $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ apériodique.

Dans cette situation, il existe une suite $(V_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts non négligeables de X deux à deux disjoints, ne possédant que x_0 comme point d'accumulation et qui vérifient $\rho_n := \mathrm{d}(x_0,V_n)>0$, pour tout $n\geq 1$. On peut supposer que la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Considérons également deux suites $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telles que:

$$\sum_{n\geq 0}\varepsilon_n < +\infty\ ,\quad \sum_{n\geq 0}\varepsilon'_n < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\rho_n}=0\ .$$

Sans perte de généralité, on suppose, dans la suite, que $\int f\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Alors, en adaptant la construction effectuée lors de la preuve du théorème précédent et en utilisant cette fois la densité dans $(\mathrm{L}^1_{\mathcal{O}}(X,\mu),\|\cdot\|_1)$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty_{\mathcal{O}}(X)$, des fonctions indéfiniment différentiables sur X à support contenu dans un ouvert $\mathcal{O}$, il est facile d'établir, par récurrence, l'existence de suites de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$, $(H_n)_{n\geq 2}$ et $(\Phi_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout $n\geq 1$, on ait:

$$f = h_1+\cdots+h_n+H_{n+1}+\left(\sum_{i=0}^n \Phi_i\right)\circ T-\left(\sum_{i=0}^n\Phi_i\right)$$

avec

1. h_i indéfiniment différentiable, à support contenu dans V_i et $\|h_i\|_\infty \leq \varepsilon_{i-1}$ pour $i=1,\ldots,n$,
2. H_{n+1} mesurable, nulle en dehors de V_{n+1} et essentiellement bornée par ε_n,
3. $\mathrm{d}(\Phi_i,0)\leq\varepsilon'_i$ pour $i=0,1,\ldots,n$.

Il faut remarquer en particulier que, à chaque étape de la récurrence, si l'on majore par $\mu(V_{n+1})\,\varepsilon_n$ l'expression:

$$\sum_{m\geq 1}\left\|H_n-k_m^{(n)}\right\|_1\ ,$$

où la suite $\left(k_m^{(n)}\right)_{m\geq 1}$ est à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty_{V_n}(X)$, on peut choisir la fonction H_{n+1} nulle en dehors de V_{n+1} et essentiellement bornée par ε_n.

Comme, pour tout entier $n\geq 1$, les ouverts V_n sont deux à deux disjoints et les fonctions h_n sont à support contenu dans V_n la fonction $h:=\sum_{n\geq 1}h_n$, définie car $\sum_{n\geq 0}\varepsilon_n<+\infty$, est indéfiniment différentiable sur $X\setminus\{x_0\}$.

De plus, si $\rho_{n-1} > \mathrm{d}(x, x_0) \geq \rho_n$, $n \geq 2$, il vient

$$|h(x) - h(x_0)| \leq \sup_{i \geq n} |h_i(x)| \leq \varepsilon_{n-1} = o(\rho_n) ,$$

ce qui prouve la différentiabilité de h en x_0 et la nullité de $\mathrm{D}h(x_0)$.

Il est maintenant aisé de conclure. □

Cas des fonctions intégrables à valeurs dans les produits $\mathbb{R}^n$ ou $(\mathcal{S}^1)^n$

En procédant composante par composante, on déduit des théorèmes 3.6, 3.7 et 3.8, des résultats analogues pour les fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

De plus, comme à toute fonction mesurable $\tilde{f} : X \to (\mathcal{S}^1)^n$, où $\mathcal{S}^1$ désigne le groupe des complexes de module un et n un entier ≥ 1, on peut associer n fonctions mesurables $f_i : X \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, de telle sorte que:

$$\tilde{f}(x) = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f_1(x)}, \ldots, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f_n(x)}\right) , \quad \text{pour tout } x \text{ dans } X ,$$

on déduit de l'affirmation précédente des résultats analogues aux théorèmes 3.6 et 3.8 pour les $\left(\mathbb{Z}, (\mathcal{S}^1)^n\right)$-cocycles.

En particulier, comme application de la seconde partie du théorème 3.6, on voit que, si X désigne également le groupe des complexes de module un sur lequel on considère n'importe quelle transformation T préservant la mesure de Lebesgue et ergodique, alors toute fonction mesurable, $\tilde{f} : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$, est cohomologue à une fonction continue admettant n'importe quel degré d fixé.

4 Remarques sur l'impossibilité d'obtenir certaines régularisations par cohomologie

Dans la situation où X est un espace métrique compact, la question de l'existence d'un cohomologue höldérien à toute fonction intégrable est naturelle.

Rappelons qu'une fonction h, définie sur X, est dite höldérienne si il existe $\alpha > 0$ et $C < +\infty$ tels que:

$$|h(x) - h(y)| \leq C d(x, y)^\alpha , \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } y \text{ dans } X .$$

Montrons que, en général, une fonction intégrable sur X n'est pas cohomologue à une fonction höldérienne.

Pour les systèmes dynamiques possédant une propriété du type Anosov, comme, par exemple, les shifts de Bernoulli et les automorphismes hyperboliques du tore, on a, pour toute fonction höldérienne h de moyenne nulle:

$$\text{la suite} \quad \left\| \frac{h + h \circ T + \ldots + h \circ T^{N-1}}{\sqrt{N}} \right\|_2 , \quad N \geq 1 , \quad \text{converge.}$$

Notons que cette condition de convergence, que l'on appelle condition $(\mathcal{C})$ dans la suite, est une étape clé si l'on veut établir un théorème limite central pour les fonctions höldériennes définies sur X (voir, par exemple, [B], [G,H] et [R]).

Cette condition $(\mathcal{C})$ donne une vitesse de convergence des moyennes de Cesaro associées à n'importe quelle fonction höldérienne h de moyenne nulle puisqu'il en résulte immédiatement que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n<N} h \circ T^n \right\|_2 = o\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right) .$$

On en déduit en particulier, par le même argument que celui utilisé dans la remarque 1, que si, pour un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ satisfaisant la condition $(\mathcal{C})$, toute fonction intégrable est cohomologue à une fonction höldérienne alors la convergence suivante:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N^{2/3}} \sum_{n<N} f \circ T^n = 0 ,$$

a lieu, dans $\mathrm{L}^2(X, \mu)$, pour tout élément f de $\mathrm{L}^2(X, \mu)$ de moyenne nulle.

Ceci est en contradiction avec la proposition suivante ([Kr]) dès que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est ergodique et apériodique.

Proposition 4.1 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé ergodique et apériodique.*
Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs qui tend vers 0.
Il existe un élément f de $L^2(X, \mu)$ de moyenne nulle, telle que la suite:

$$\frac{1}{N a_N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n , \quad N \geq 1 ,$$

ne converge pas vers 0 dans $L^2(X, \mu)$.

En ce qui concerne le problème de la différentiabilité, sous l'hypothèse que X est une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, montrons que, en général, une fonction intégrable sur X n'est pas cohomologue à une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

L'argument précédent montre que si l'on suppose à nouveau la condition $(\mathcal{C})$ satisfaite par un système dynamique ergodique et apériodique, $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, où X désigne cette fois une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, alors on ne peut assurer l'existence d'un cohomologue de classe $\mathcal{C}^1$ à toute fonction intégrable.

Un autre argument, dit des "petits dénominateurs" et du à Kolmogorov et Siegel, permet d'aboutir à la même conclusion pour les systèmes dynamiques à spectre discret que constituent les rotations T_α du tore de dimension un dont l'angle α est un irrationnel à quotients partiels bornés.

En effet, dans cette situation et à l'aide de la représentation en série de Fourier des fonctions de carré intégrable, on peut montrer que toute fonction, h, définie sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et à valeurs réelles, continûment différentiable et de moyenne nulle, est de la forme $\Phi \circ T_\alpha - \Phi$ pour une fonction Φ de carré intégrable (vérifier que la relation:

$$\Phi(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{(\mathrm{e}^{2i\pi k\alpha} - 1)} \mathrm{e}^{2i\pi kx} , \quad x \in [0, 1] ,$$

définie un élément de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, si $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de la fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ et si α est à quotients partiels bornés).

Or, il existe, sur le tore, des fonctions réelles, intégrables et de moyenne nulle, qui ne s'écrivent pas sous la forme $\Phi \circ T_\alpha - \Phi$ (voir, par exemple, [F1]); ce qui permet de conclure.

5 Cas de non ergodicité du système dynamique considéré

Présentons à présent quelques remarques concernant la situation d'un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ non ergodique.

Dans la suite, la notation, $\mathcal{I}$, désignera la tribu des invariants de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$.

1. Dans la situation d'un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ non ergodique, les théorèmes 3.1 et 3.4 et les corollaires 3.2 et 3.3 admettent des généralisations naturelles. En particulier, on a les trois résultats suivants.

Théorème 5.1 *Soient f et g deux éléments de $L^1(X,\mu)$ tels que $\mathbf{E}[|f||\mathcal{I}] < \mathbf{E}[|g||\mathcal{I}]$ presque partout.*
Alors, il existe une fonction h dans $L^1(X,\mu)$ et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$|h| \leq |g| \quad \textit{sur } X ,$$

$$f = h + \Phi \circ T - \Phi \quad \textit{presque partout} .$$

De plus, lorsque f est positive ou nulle, h peut également être choisie positive ou nulle.

Preuve On reprend la démonstration du théorème 3.1 et l'on cherche à nouveau à justifier l'existence d'une suite de fonctions $\{\Psi_n\}_{n\geq 0}$ qui vérifie les conditions 1. à 4. permettant de conclure.

Pour que le procédé de construction mis en oeuvre dans la preuve du théorème 3.1 soit effectif, il suffit d'associer, à presque tout x de X, un entier $n_0(x) \geq 0$ tel que $T^{n_0(x)}(x)$ appartienne à:

$$A := \{x \in X \mid s(x) < |g|(x)\} ,$$

où $s(x)$ désigne la limite de la suite:

$$s_n(x) := |\Psi_0(x)| + |\Psi_1(T^{-1}x)| + \cdots + |\Psi_n(T^{-n}x)| , \quad n \geq 0 ,$$

croissante et majorée par $g(x)$.

Or, le théorème de convergence monotone pour les espérances conditionnelles et la nature même de la tribu $\mathcal{I}$ assurent que, pour presque tout x,

$$\mathbf{E}[|g| - s|\mathcal{I}](x) > 0 ,$$

puisque $\mathbf{E}[|f||\mathcal{I}] < \mathbf{E}[|g||\mathcal{I}]$ presque partout.

Le théorème ergodique de G.D. Birkhoff appliqué à la fonction $|g| - s$ permet alors de conclure. □

Par les mêmes arguments que ceux utilisés pour démontrer le corollaire 3.3 et le théorème 3.4, on déduit du théorème précédent et de sa preuve respectivement le corollaire et le théorème qui suivent. (La démonstration du lemme 3.5 reste d'ailleurs inchangée dans la situation non ergodique.)

Corollaire 5.2 *Soient f_1 et f_2 deux éléments de $L^1(X,\mu)$ tels que $\mathbf{E}[f_1|\mathcal{I}] = \mathbf{E}[f_2|\mathcal{I}]$ presque partout.*
Alors, à tout $\varepsilon > 0$ et à toute partie mesurable A de X qui vérifie $\mathbf{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{I}] < 1$ presque partout, on peut associer une fonction h de $L^1(X,\mu)$ et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$h = f_2 \qquad \textit{sur } A ,$$

$$|h(x) - f_2(x)| \leq \varepsilon \qquad \textit{sur } X ,$$

$$f_1 = h + \Phi \circ T - \Phi \qquad \textit{presque partout} .$$

Théorème 5.3 *Soient f et g deux éléments de $L^1(X,\mu)$ tels que* $\mathbf{E}[|f||\mathcal{I}] < \mathbf{E}[|g||\mathcal{I}]$ *presque partout.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $\hat{f}$ de $L^1(X,\mu)$ qui vérifie

(a) $|\hat{f}(x)| \leq |f(x)|$ *presque partout,*

(b) $\mathrm{d}\left(\hat{f},0\right) \leq \delta$,

il existe $\hat{h}$ et $\hat{\Phi}$, deux fonctions dans $\mathcal{M}$, telles que

i. $|\hat{h}| \leq |g|$ *sur X* ,

ii. $\mathrm{d}(\hat{\Phi},0) \leq \varepsilon$,

iii. $\hat{f} = \hat{h} + \hat{\Phi} \circ T - \hat{\Phi}$ *presque partout.*

Application:

Supposons l'ensemble X, compact et métrisable, la mesure μ, de Radon, et la tribu $\mathcal{I}$ des invariants, engendrée par un nombre fini d'atomes (ie on suppose qu'il existe, dans $\mathcal{I}$, des éléments C_1, C_2, ..., C_r, non négligeables, deux à deux disjoints et pour lesquels tout élément de $\mathcal{I}$ est, à un ensemble de mesure nulle près, réunion d'ensembles C_i).

Remarquons tout d'abord que, pour tout élément f de $\mathrm{L}^1(X,\mu)$, il existe une fonction continue h telle que $\mathbf{E}[f|\mathcal{I}] = \mathbf{E}[h|\mathcal{I}]$. De plus, lorsque $\mathbf{E}[f|\mathcal{I}] > 0$, on peut choisir la fonction h strictement positive.

Cette affirmation résulte de l'identité

$$\mathbf{E}[g|\mathcal{I}] \equiv \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{\mu(C_i)} \int_{C_i} g \,\mathrm{d}\mu\right) \mathbb{1}_{C_i} ,$$

vérifiée par toute fonction intégrable g, ainsi que de la proposition suivante.

Proposition 5.4 *Soient C_1, C_2, ..., C_r, r parties boréliennes de X, non négligeables et deux à deux disjointes et α_1, α_2, ..., α_r, r réels strictement positifs.*

Pour toute fonction h continue sur X, on pose

$$v(h) := \left(\frac{1}{\mu(C_1)} \int_{C_1} h \,\mathrm{d}\mu, \frac{1}{\mu(C_2)} \int_{C_2} h \,\mathrm{d}\mu, \ldots, \frac{1}{\mu(C_r)} \int_{C_r} h \,\mathrm{d}\mu\right) .$$

Alors, il existe h_1, h_2, ..., h_r, r éléments de $\mathcal{C}(X)$ à valeurs dans $[0,1]$, pour lesquels

- *le r-uplet $(v(h_1), v(h_2), \ldots, v(h_r))$ constitue une base de $\mathbb{R}^r$,*
- *il existe r réels strictement positifs, a_1, a_2, ..., a_r, tels que*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = a_1 v(h_1) + a_2 v(h_2) + \cdots + a_r v(h_r) .$$

Preuve Choisir chaque fonction h_i identiquement égale à 1 sur K_i et nulle sur $\bigcup_{j \neq i} K_j$, où, pour $i = 1, \ldots, r$, K_i désigne une partie compacte de X, contenue dans C_i, et dont la mesure est suffisamment proche de celle de C_i. □

Dans la situation décrite ci-dessus, on peut montrer le lemme suivant qui est utilisé dans la preuve du résultat principal de cette application.

Lemme 5.5 *Pour toute fonction intégrable f, nulle sur le complémentaire d'un ouvert $\mathcal{O}$ de X, et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction h continue, nulle sur le complémentaire de $\mathcal{O}$, telle que*

$$\|\mathrm{E}[|f-h||\mathcal{I}]\|_\infty \leq \varepsilon .$$

Preuve Le lemme 5.5 résulte de la densité de l'ensemble $\mathcal{C}_\mathcal{O}(X)$, des fonctions continues, nulles sur le complémentaire de $\mathcal{O}$, dans $(\mathrm{L}^1_\mathcal{O}(X,\mu), \|\cdot\|_1)$, et de l'expression de l'espérance conditionnelle sachant la tribu $\mathcal{I}$ des invariants. □

La même méthode que celle utilisée dans la preuve du théorème 3.6 permet alors de montrer, à l'aide du lemme précédent, du corollaire 5.2 et du théorème 5.3, le

Théorème 5.6 *Supposons l'ensemble X, compact et métrisable, la mesure μ, de Radon, et la tribu $\mathcal{I}$ des invariants, engendrée par un nombre fini d'atomes.*

Alors, toute fonction intégrable f est cohomologue à une fonction continue.

De plus, si g désigne une fonction continue sur X avec $\mathrm{E}[g|\mathcal{I}] = \mathrm{E}[f|\mathcal{I}]$ presque partout et si A est une partie fermée de X avec $\mathrm{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{I}] < 1$ presque partout, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue h et une fonction Φ dans $\mathcal{M}$ telles que:

$$\begin{array}{ll} h = g & \textit{sur } A\,, \\[2ex] |h(x) - g(x)| \leq \varepsilon & \textit{pour tout élément } x \textit{ de } X\,, \\[2ex] f = h + \Phi \circ T - \Phi & \textit{presque partout}\,. \end{array}$$

On déduit en particulier de ce dernier théorème le

Théorème 5.7 *Sous les hypothèses du théorème précédent, toute fonction intégrable f, dont l'espérance conditionnelle relativement à la tribu des invariants est presque partout strictement positive, est cohomologue à une fonction continue strictement positive.*

En revanche, il est facile de construire un système dynamique probabilisé, dont la tribu $\mathcal{I}$ des invariants est engendrée par deux atomes, et une fonction intégrable d'intégrale strictement positive qui n'est pas cohomologue à une fonction continue positive ou nulle. (Considérer le tore de dimension un muni d'un barycentre de la mesure uniforme et de la masse de Dirac en 0, une fonction f égale à l'indicatrice du singleton $\{0\}$ et une transformation T qui est une rotation irrationnelle sur le tore sauf sur l'orbite de 0 (pour cette rotation) pour laquelle on choisit l'identité.)

2. Supposons à nouveau l'espace X, compact et métrisable, et la mesure μ, de Radon.

   Lorsque la tribu $\mathcal{I}$ des invariants de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ n'est pas engendrée par un nombre fini d'atomes, il existe

   - une fonction intégrable, non bornée, qui n'est pas cohomologue à une fonction bornée,
   - une fonction bornée qui n'est pas cohomologue à une fonction continue.

   Cette affirmation repose sur l'existence, dans cette situation, d'une suite, $(A_i)_{i\geq 1}$, d'éléments de $\mathcal{I}$, non négligeables et deux à deux disjoints.

D'après la remarque 1, il suffit de construire

- une fonction f_1, $\mathcal{I}$-mesurable, intégrable mais non bornée,

- une fonction f_2, $\mathcal{I}$-mesurable et bornée, qui ne s'écrit pas comme l'espérance conditionnelle d'une fonction continue.

Comme $\lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) = 0$, il existe une suite, $(\alpha_i)_{i\geq 1}$, de réels positifs ou nuls tels que

$$\limsup \frac{\alpha_i}{\mu(A_i)} = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{i\geq 1} \alpha_i < +\infty \, .$$

Ainsi, la fonction $f_1 := \sum_{i\geq 1} \frac{\alpha_i}{\mu(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}$ convient.

Pour déterminer une fonction f_2, considérons, pour toute fonction continue h, la suite:

$$a_i(h) := \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} h \, \mathrm{d}\mu \, , \quad i \geq 1 \, .$$

Ces suites étant bornées, on peut, en utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}(X)$ et par un procédé diagonal, extraire une sous-suite d'entiers, $(i_k)_{k\geq 1}$, pour laquelle la suite $(a_{i_k}(h))_{k\geq 1}$ converge, pour toute fonction continue h.

Si, maintenant, on pose:

$$f_2 := \sum_{k \text{ pair}} \mathbb{1}_{A_{i_k}} \, ,$$

la fonction f_2 ne peut être cohomologue à une fonction continue, h_0, puisque, dans ce cas:

$$f_2 = \mathbf{E}\left[h_0 | \mathcal{I}\right] \, , \quad \text{presque partout} \, ,$$

et, la suite:

$$a_{i_k}(h_0) = \frac{1}{\mu(A_{i_k})} \int_{A_{i_k}} f_2 \, \mathrm{d}\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \, , \quad k \geq 1 \, ,$$

ne converge pas.

3. Enfin, montrons qu'il existe un système dynamique probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ non ergodique pour lequel la classe:

$$\left\{ f \in \mathrm{L}^1(\mu) \mid \text{il existe } h \text{ dans } \mathcal{C}(X) \text{ telle que } \mathbf{E}\left[f|\mathcal{I}\right] = \mathbf{E}\left[h|\mathcal{I}\right] \right\} \, ,$$

contient une fonction qui n'est pas cohomologue à une fonction continue.

Considérons le choix suivant, pour un irrationnel α fixé:

$$X := \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \; \mathcal{A} := \mathcal{B}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}, \; \mu := \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{3} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \delta_{\{k\alpha\}} \right)$$

et

$$T := \begin{cases} \text{rotation d'angle } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \{\{k\alpha\} \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \text{identité sur } \{\{k\alpha\} \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \, ,$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\{x\}$ la partie fractionnaire du réel x.

Soit également $\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable pour laquelle:

- $m(\tilde{f}) = 0$,
- l'équation fonctionnelle:

$$\tilde{f} = \Phi \circ T - \Phi \,, \quad m\text{-presque partout} \,,$$

  n'a pas de solution mesurable $\Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Alors, la fonction, $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, définie par:

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{si } x \neq \{k\alpha\},\, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \,, \quad x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \,,$$

vérifie:

- $\mathrm{E}[f|\mathcal{I}] = 0$, μ-presque partout,
- l'équation fonctionnelle:

$$f = \Phi \circ T - \Phi \,, \quad \mu\text{-presque partout} \,,$$

  n'a pas de solution mesurable $\Phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

L'implication:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathrm{E}[h|\mathcal{I}] = 0 & \mu\text{-presque partout} \\ h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R} & \text{continue} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad h \equiv 0 \,,$$

permet donc d'affirmer que, pour le système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, la fonction f n'est pas cohomologue à une fonction continue.

Bibliographie

[B] R. Bowen - *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer Lectures Notes, 470 (1975).

[D] J. Depauw - *Théorèmes ergodiques pour cocycle de degré 2, critère de récurrence pour cocycle de degré 1, d'une action de $\mathbb{Z}^d$. Application au réseau électrique stationnaire*, Thèse, Brest, 1994.

[F1] H. Furstenberg - *Strict ergodicity and transformations of the torus*, Am. J. Math., 88 (1961) p. 573-601.

[F2] H. Furstenberg - *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math., 34 (1978).

[G,H] Y. Guivarc'h et J. Hardy - *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 24 (1988) p. 73-98.

[K] A.B. Katok - Constructions in Ergodic Theory, A paraître.

[Ko] A.V. Kočergin - *On the homology of functions over dynamical systems*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 231 (1976) - Soviet. Math. Dokl., Vol. 17, 6 (1976) p. 1637-1641.

[Kr] U. Krengel - Ergodic Theorems, *W. de Gruyter*, 1989.

[L1] E. Lesigne - *Sur la convergence ponctuelle de certaines moyennes ergodiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 298 série I (1984) p. 425-428.

[L2] E. Lesigne - *Equations fonctionnelles, couplages de produits gauches et théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales*, Bull. Soc. Math. France, 121 (1993) p. 315-351.

[R] M. Ratner - *The central limit theorem for geodesic flows on n-dimensional manifolds of negative curvature*, Israel J. Math., 16 (1973) p. 181-197.

[Ru] D.J. Rudolph - *$\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{R}^n$ cocycle extensions and complementary algebras*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 6 (1986) p. 583-599.