

LUC TROUCHE

La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : éléments de méthode pour l'analyse de l'action instrumentée en mathématiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998-1999, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 125-139

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998-1999__3_125_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1998-1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : éléments de méthode pour l'analyse de l'action instrumentée en mathématiques

Luc Trouche, équipe ERES (Montpellier II)

Nous commencerons par une parabole pour illustrer ce qui est en jeu dans la rencontre entre un individu singulier et un objet singulier, dans le cadre de la réalisation d'une tâche particulière. Imaginez un gaucher saisissant, pour remplir une tasse de lait, une casserole à bec verseur. Il réalise que le bec verseur est situé du « mauvais » côté de la casserole par rapport au bol. Il a le choix entre (au moins) sept procédures :

- s'adapter à la configuration de l'outil, ce qui nécessite « se faire une certaine violence ». Il saisit alors la casserole de la main droite. La casserole est dans son rôle, pas l'individu. Le geste est mal assuré, le succès de l'opération non plus !
- s'adapter modérément à la configuration de l'outil. La casserole est prise de la main gauche, mais elle est placée à droite de la tasse. Le bec verseur est placé conformément à l'usage, le gaucher utilise bien sa main gauche. Le geste est cependant beaucoup plus complexe (le coude rentre à l'intérieur du corps, le corps entier bascule légèrement pour équilibrer le mouvement) ;
- adapter l'outil à son propre comportement (ce qui suppose une certaine rupture avec les conventions). Il prend alors la casserole de la main gauche, la place à gauche de la tasse et verse le lait du côté de la casserole opposé au bec verseur ;
- refuser l'outil et aller en chercher un autre pour réaliser la tâche (une casserole pour gaucher ou une casserole sans bec verseur ou un four à micro-ondes...) ;
- refuser l'outil et modifier la tâche : il déjeunera avec du lait froid, versé directement à partir de la bouteille dans la tasse ;
- refuser l'institution dans laquelle la tâche est proposée : il ira prendre son déjeuner au café d'en face ;
- refuser la tâche elle-même : pas de déjeuner ce matin.

Description schématique sans doute mais l'essentiel est de comprendre qu'il se passe là, dans la confrontation d'un sujet et d'un outil, bien plus que la possibilité de déjeuner ou non :

- il y a pour le sujet des apprentissages en jeu : sur l'outil, sur les éléments que l'outil permet de manipuler, sur lui-même, les gestes et la coordination des gestes contraints – relativement- par l'outil ;
- pour un éventuel spectateur ou pour l'organisateur du petit-déjeuner, les choix opérés par le principal protagoniste de la scène donnent des renseignements précieux sur son comportement, permettent d'adapter en retour l'outil ou la tâche.

Nous voudrions transposer aujourd'hui les « leçons » de cette parabole à l'enseignement des mathématiques dans des environnements technologiques complexes. L'institution est clairement identifiée (il s'agit de la classe de mathématiques), la tâche est

claire (il s'agit de résoudre des problèmes). L'outil sera une calculatrice symbolique ou graphique. Quant à l'acteur, il s'agira de l'élève, droitier, gaucher ou ambidextre.

Nous nous appuyerons pour cela sur une expérimentation menée depuis quatre ans dans des classes dont tous les élèves sont pourvus de calculatrices symboliques TI-92 (sur lesquelles sont implémentés un logiciel de calcul formel-Derive- et un logiciel de géométrie-Cabri) [Trouche, 1996 et 1998]. Nous utiliserons aussi bien sûr les travaux menés dans le cadre d'une thèse de didactique des mathématiques ([Trouche, 1997])¹.

1. Un instrument

L'analyse du travail instrumenté en mathématiques nécessite une théorie de la relation dialectique entre le geste et la pensée. Gérard Vergnaud [Vergnaud, 1997] distingue deux formes de connaissance, la forme prédicative et la forme opératoire qui ressort de l'activité humaine. Le concept de schème permet la mise en relation de ces deux formes de connaissances. Dans le cadre des mathématiques comprises comme un travail, il est naturel de considérer de près les outils de ce travail en regardant aussi du côté de la psychologie de travail, de l'ergonomie cognitive (en transposant avec toute la prudence nécessaire au travail spécifique de l'enseignement et de l'apprentissage scolaire des mathématiques). Pierre Rabardel ([Rabardel, 1995]) distingue clairement l'artefact et l'instrument. Il s'agira ici d'artefacts particuliers : une calculatrice est extérieure au sujet, par son existence et son action, elle est constituée par une organisation structurée de connaissances, en interaction avec le sujet.

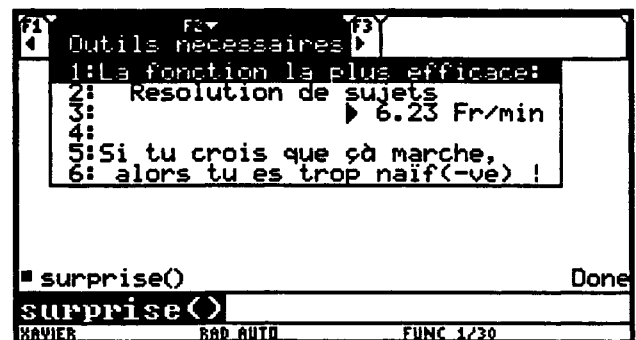
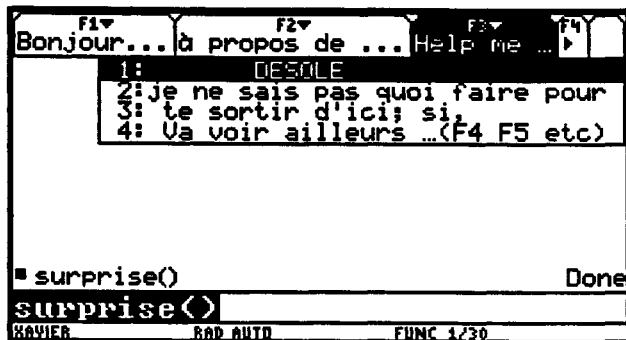
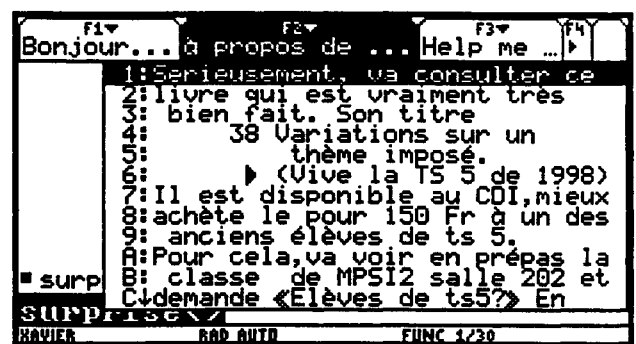
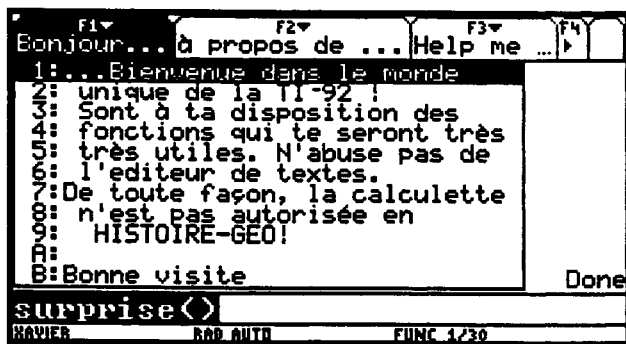
Un instrument se constitue à partir de la rencontre entre un artefact singulier et un individu singulier. C'est une création, une « genèse instrumentale », qui combine deux processus :

- un processus d'instrumentation, à travers lequel l'individu s'adapte à l'instrument, par l'accommodation de ses schèmes ;
- un processus d'instrumentalisation, à travers lequel l'individu fait l'instrument « à sa main ».

Cette genèse débouche sur un instrument, ensemble de schèmes d'action finalisée (relatifs à des tâches, à une activité propre du sujet, éventuellement organisée par l'institution). L'instrument n'englobe pas en général tout l'artefact : ce n'est qu'une partie de celui-ci qui va être mobilisée par le sujet dans le cadre de cette genèse.

Je donnerai juste un exemple relatif au processus d'instrumentalisation. dans le cadre de l'expérimentation conduite depuis quatre ans, des calculatrices sont prêtées à une classe en début d'année, récupérées à la fin de l'année. Les élèves savent que les calculatrices qu'ils rendent vont être réutilisées en fin d'année par d'autres élèves. Il existe une sorte de rite de transmission, de passage de témoin par lequel certains élèves vont utiliser l'artefact pour transmettre des informations sur l'artefact. Comme on peut le voir sur les copies d'écran ci-dessous, un élève est allé jusqu'à modifier la barre des menus et à construire tout un scénario d'accueil et d'information pour son successeur (qui n'est que très partiellement ici) :

¹ NB : on ne trouvera ici qu'une retranscription résumée de l'intervention lors du séminaire. Les lecteurs intéressés pourront se reporter à des articles récents plus complets ([Guin et Trouche, 1999], [Trouche, 1999]).



L'intérêt de la reproduction des quelques écrans n'est pas qu'anecdotique : il montre aussi une dimension essentielle de la genèse instrumentale, la dimension sociale.

2. Un artefact

De façon iconoclaste peut-être, je vais partir non pas des mathématiques mais de l'outil qui prétend les donner à voir et de l'élève apprenant, avec l'interaction de deux systèmes cognitifs que cela suppose. Pour l'analyse de l'outil, nous partirons de l'étude des contraintes qu'il constitue pour l'action.

Classiquement, dans les EIAH (environnements informatiques d'apprentissage humain) ou les EIAO (environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur), on évoque les contraintes internes et les contraintes de l'interface, vue en général sous la forme principale de l'écran. En fait, il me semble plus opératoire de distinguer trois niveaux :

- les contraintes internes, physico-électroniques, liées à la nature des matériaux, au choix du microprocesseur... ;
- les contraintes de commande, liées au choix du concepteur du programme et du système d'exploitation (par exemple, sur une calculatrice graphique, il peut y avoir, ou non, une commande de calcul approché de dérivée) ;
- les contraintes d'organisation, liées aussi aux choix du concepteur de l'outil. Elles concernent la disposition du clavier, l'organisation des menus, la hiérarchisation des commandes. Par exemple, l'observation du clavier d'une calculatrice graphique indique clairement que les commandes graphiques sont privilégiées, d'accès direct. Les commandes de calcul numérique sont en retrait et nécessitent pour être activées de faire appel à une combinaison de touches. Cette organisation permet de comprendre pourquoi l'usage a consacré l'appellation de « calculatrices graphiques » pour ces outils, en remplacement des appellations antérieures de « calculatrices programmables et graphiques » puis « graphiques et programmables ».

L'analyse de ces trois niveaux de contrainte permet de voir en quoi l'écran ne fait pas seulement « écran » : la calculatrice informe et déforme. L'analyse permet d'évaluer la

distance entre la connaissance de référence et la connaissance implémentée, c'est-à-dire la transposition informatique. Dans un texte récent, Nicolas Balacheff évoque l'expression de « transmutation informatique » pour marquer par un mot plus fort la distance parfois grande entre ces deux types de connaissance [Balacheff, 1999]. L'analyse de cette transposition se fait nécessairement en liaison avec la transposition didactique : ces deux transpositions sont conjuguées, les choix des concepteurs des outils n'étant pas indépendants des prescriptions institutionnelles (et réciproquement : les choix des concepteurs des programmes ne sont pas indépendants de l'existence d'outils donnés à disposition des élèves). Ces deux transpositions sont liées comme processus, elles conjugent aussi leurs effets dans le processus d'apprentissage.

Illustrons ce dernier point par l'exemple de l'enseignement des limites au lycée. Une littérature abondante existe sur ce point. Comme point de départ épistémologique, je prendrais la présentation de Rudolph Bkouche ([Bkouche, 1996]) : il distingue un point de vue « cinématique-géométrique », selon lequel c'est « la variable qui tire la fonction » et un point de vue « approximation » dans lequel c'est le degré de précision que l'on veut sur la fonction qui « tire la variable ». La transposition didactique à l'œuvre actuellement dans l'enseignement français favorise nettement le premier point de vue : il n'est question que d'introduire le « langage des limites » et de présenter le concept de limites à travers des observations numériques et graphiques. L'analyse des calculatrices (désormais prescrites par les programmes) permet de mettre en évidence une cohérence « naturelle » avec ce point de vue :

- les contraintes internes de ce type d'outil de calcul rendent impossible tout calcul symbolique, limitent la représentation des nombres à un sous-ensemble discret et borné de l'ensemble des décimaux, impose une discrétisation des tracés sur un écran formé d'un ensemble fini de pixels ;
- les contraintes de commande rendent théoriquement impossible tout calcul de limite. Cependant, il existe des commandes permettant d'approcher certaines limites (calcul approché de dérivées, calcul approché d'intégrales). La syntaxe de ces commandes impose de préciser le pas de calcul (le mode d'emploi précisant bien que, plus ce pas est petit, plus la précision est grande) ;
- les contraintes d'organisation privilégient comme nous l'avons déjà souligné l'observation graphique. A l'intérieur du registre graphique, certaines commandes sont nettement « favorisées » : ainsi la commande Trace est la seule à bénéficier d'un accès direct (plutôt que des commandes de type Zoom ou Window, qui nécessitent un certain réglage).

Ces contraintes favorisent ainsi une considération géométrico-cinématique des fonctions, de façon dynamique. La courbe d'une fonction est alors davantage la trajectoire d'un point courant que la matérialisation d'un graphe. De la même façon que l'on décrit Cabri-Géomètre comme un logiciel de géométrie dynamique, on pourrait dire que les logiciels d'étude graphique des fonctions implantés sur les calculatrices graphiques sont des logiciels « d'analyse dynamique ».

Il faut donc bien comprendre qu'il ne s'agit pas là d'une connaissance représentée de façon passive, mais d'une pré-structuration de l'action de l'utilisateur. Comme pour la casserole à bec verseur, l'utilisation d'un outil pour une tâche donnée induit une certaine technique, une certaine manière de faire. Pour reprendre le point de vue d'Yves Chevallard, l'accomplissement de ces tâches, à travers ces techniques, va faire émerger un rapport particulier à l'objet donné (ici les limites) dans le cadre de l'institution d'enseignement.

Nicolas Balacheff [Balacheff, 1994] propose de classer les EIAO suivant le degré d'initiative laissé aux élèves : à un bout de la chaîne les systèmes tuteurs, à l'autre bout, les micro-mondes : « Les micromondes laissent « toute » l'initiative aux élèves dans le cadre des contraintes syntaxiques et lexicales ordinaires de la communication (ce qui représente une limite inférieure dont on ne peut s'affranchir, quel que soit le système naturel ou artificiel) ». Il est certain qu'il faut donner toute leur force implicite aux guillemets entourant le mot « toute » dans l'expression « toute l'initiative ». Tout système de représentation, même les micro-mondes, constituent un double assujettissement :

- à travers le type de connaissance représentée (je pense à la phrase de Jean-Luc Godard : « Dès qu'il y a liaison, il y a lésion ») [Jean-Luc Godard, 1998] ;
- à travers l'action ou le type d'action favorisée.

Il y a ainsi un phénomène de naturalisation très fort des couples tâches-techniques. L'outil prothèse, prolongement du corps, voit son usage automatisé (d'autant plus que son utilisation est très fréquente et que les tâches de routinisation sont peu prises en charge par l'institution scolaire : rien ne vient contrecarrer la « pente naturelle » dans le processus d'instrumentation à l'œuvre).

3. Un sujet

Pour comprendre la constitution d'un instrument, il faut connaître l'outil, mais aussi le sujet qui l'utilise. La compréhension des gestes du gaucher avec la casserole suppose de l'analyser comme gaucher . Peut-on imaginer qu'il est est de même avec une calculatrice, c'est-à-dire que la structuration de l'outil conviendra mieux à certains individus qu'à d'autres?

Une première réponse immédiate réside dans la distinction filles/garçons. Certains garçons, familiers des « game-boys » et autres jeux vidéo, vont s'approprier assez vite l'outil, alors que, pour certaines filles, cette appropriation nécessitera un effort conscient, imposera de « se faire une certaine violence ». Plus profondément, des régularités pour certains individus, une dispersion des comportements entre certains individus, apparaissent à trois niveaux au moins :

- où le sujet va-t-il chercher l'information ? Certains vont privilégier l'utilisation de l'outil de calcul, d'autres le travail papier/crayon, d'autres la recherche des références théoriques disponibles, d'autres encore le voisinage (le professeur ou les pairs) ;
- comment traite-t-il l'information ? Certains individus vont privilégier l'inférence, d'autres la coordination et la comparaison des résultats issus de différentes sources d'information, de différents registres, d'autres l'interprétation sémantique des données. La façon dont les nouvelles informations sont stockées est aussi essentielle : pour certains individus, ce stockage s'accompagne d'une réorganisation des connaissances antérieures, pour d'autres les nouvelles connaissances effacent les anciennes, pour d'autres enfin elles se superposent en couches plus ou moins étanches ;
- quel contrôle exerce-t-il sur l'information prise ou reçue ? Ce mot de contrôle, le plus vague, est sans doute le plus important. Il recouvre plusieurs niveaux, tous essentiels dans le travail mathématique :
 - le premier niveau suppose la prise de distance avec l'information immédiate. C'est la conscience, comme le dit Jean-Luc Godard, qu' « une image juste, c'est juste une image », ou, pour reprendre une citation d'un autre cinéaste, Michel Angelo Antonioni que « derrière chaque image

révélée se cache peut-être une deuxième image et que derrière cette deuxième image se cache peut-être une autre image, que nous ne verrons jamais ».

- le deuxième niveau concerne la capacité de coordonner différents registres sémiotiques, très importante dans le travail avec écran. Jean-Luc Godard écrit : « Il n'y a pas d'image (au singulier), il n'y a que des images. Et il y a une certaine forme d'assemblage des images. Dès qu'il y en a deux, il y en a trois. C'est le fondement de l'arithmétique, c'est le fondement du cinéma. Il n'y a pas d'images, il n'y a que des rapports d'image ». C'est sur ce point aussi que Raymond Duval insiste quand il évoque « les conditions du développement du fonctionnement cognitif : différenciation fonctionnelle et coordination des registres de représentation sémiotique » [Duval, 1996].
- le troisième niveau englobe le contrôle de l'activité dans son ensemble : « Le rôle du contrôle est évident, il permet aux élèves de repérer eux-mêmes leurs erreurs et leurs contradictions » [Aline Robert et Jacqueline Robinet, 1996].

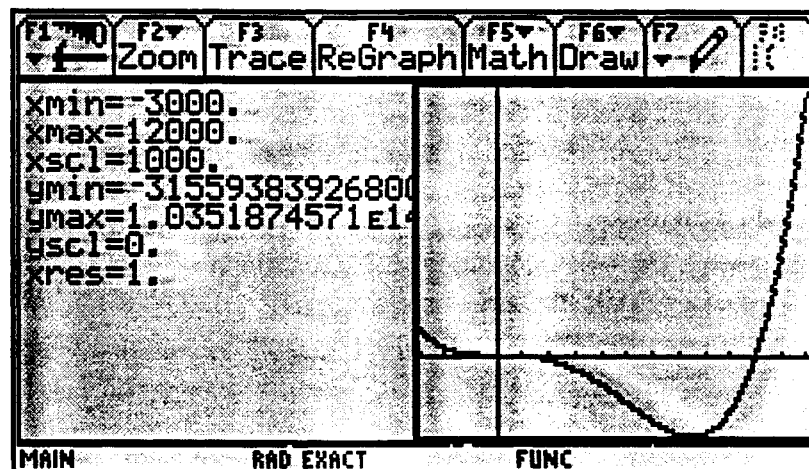
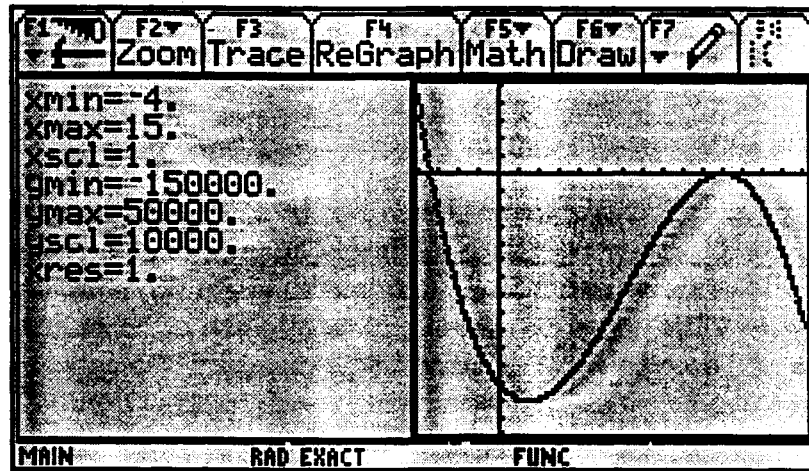
Nicolas Balacheff résume d'une phrase cette importance du contrôle : « Connaître, c'est être capable de contrôler » [Balacheff, 1999].

La distinction de ces différents niveaux de connaissance a permis de repérer quelques comportements extrêmes dans la première classe expérimentale. La topographie ainsi dressée a permis en retour de mieux distinguer des évolutions dans un territoire dont quelques bornes avaient été plantées :

- un premier comportement marqué par **l'interprétation**, à partir principalement des références disponibles. Le travail comporte peu d'actions, chacune d'entre elles étant l'objet d'une réflexion assez approfondie. La méthode de preuve repose sur l'analogie ;
- un deuxième comportement marqué par **l'inférence**, ayant recours principalement au travail papier-crayon. Le travail est linéaire, procède par étapes logiquement déduites, réduites la plupart de temps à un seul registre de représentation ;
- un troisième comportement marqué par **une investigation forte**, la source d'information principalement sollicitée étant la calculatrice (beaucoup d'actions successives, chacune d'entre elles étant relativement courte). La méthode de preuve repose alors sur l'accumulation d'indices concordants ;
- un quatrième comportement marqué par **une investigation faible**, les différentes sources d'information étant mobilisées avec beaucoup de difficultés. Peu d'actions sont entreprises, chacune d'entre elles demandant beaucoup de temps pour être mise en œuvre. La méthode de preuve repose sur la mise en évidence d'un élément localement convaincant, ou sur une stratégie de « copier-coller » d'éléments de preuve supposés pertinents ;
- un cinquième comportement marqué par **la coordination et la comparaison** des différentes sources d'information. Celles-ci sont toutes sollicitées (les références, la calculatrice, le travail papier-crayon). La méthode de preuve repose sur la confrontation des résultats issus de toutes ces sources.

Nous allons proposer une illustration de ces différents comportements à travers un travail particulier, dans un environnement de calculatrices graphiques. On considère le

polynôme P , qui à tout x associe $P(x) = -121011 - 14290x + 5601x^2 - 300x^3 + 0,03x^4$. Les élèves doivent déterminer sa limite en $+$ et déterminer pour leur calculatrice graphique une fenêtre qui illustre ce résultat.



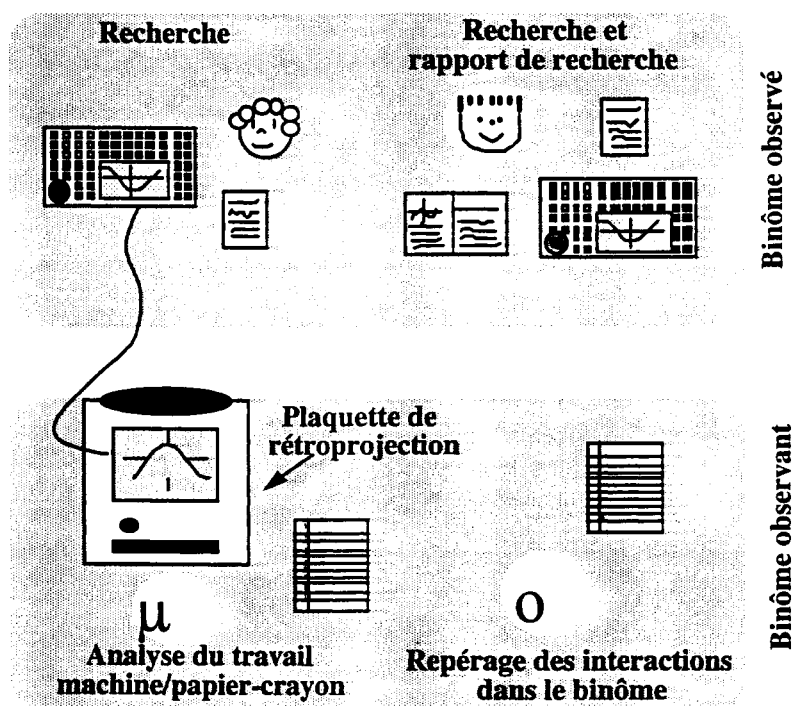
Le problème, comme on le devine à partir des copies d'écran ci-dessus, est que ce polynôme du quatrième degré a une plus grande racine de l'ordre de 10000, et qu'il est donc assez difficile de sélectionner une fenêtre « convaincante ». Examinons quelques réalisations « extrêmes » du point de vue de la typologie esquissée :

- un élève « interpréteur » identifie le polynôme comme étant un polynôme du quatrième degré et sélectionne le théorème pertinent, ce polynôme a même limite que son terme de plus haut degré. Pour la détermination d'une fenêtre adéquate, ce théorème est utilisé dans sa portée pratique : le « window » est calibré en prenant $Y_{\max} = 0,03.(X_{\max})^4$. Cette méthode permet d'aller vite et d'aboutir au résultat voulu ;
- un élève utilisant plutôt l'inférence établit la limite à partir des stratégies de calcul connues (factorisation du terme de plus haut degré, détermination des limites des différents termes et facteurs). Pour déterminer une fenêtre convenable, l'étude complète du polynôme est entreprise (calcul de P' , puis de P'' , étude des variations des différents polynômes...). La complexité des calculs ne permet pas d'aboutir ;
- un élève pratiquant l'investigation forte à partir de la calculatrice commence par observer graphiquement les variations de P . Comme, sur une fenêtre standard, aucune courbe n'apparaît, la commande « zoom fit » (qui ajuste automatiquement Y_{\min} et Y_{\max} à partir de la plus petite et la plus grande images calculées sur l'intervalle $[X_{\min}, X_{\max}]$) est

sélectionnée. La courbe apparaît alors. La limite cherchée étant en +, les plages pour x « les plus grandes possibles » vont être successivement choisies, ce qui permettra de détecter la remontée du polynôme et d'en déduire que la limite est probablement $+\infty$;

- un élève ayant du mal à rechercher l'information ne repère pas dans le polynôme proposé un objet de référence. Le polynôme va être défini pour la calculatrice (ce qui prendra un certain temps). Aucune courbe n'apparaissant sur l'écran, l'élève choisit de calculer $P(1)$, $P(2)$,... et déduit des valeurs obtenues que la limite en $+\infty$ est $-\infty$;
- un élève pratiquant plutôt la comparaison, la coordination des différentes sources d'information repère la forme générale d'un polynôme du quatrième degré et en déduit la limite en +. Mais l'observation de la représentation graphique de ce polynôme entraîne une remise en question de ce premier résultat. Celle-ci passe par un réexamen des coefficients du polynôme, permettant de comprendre l'origine de la contradiction apparente. La conclusion est alors que, du fait du déséquilibre des coefficients du terme du troisième degré et du quatrième degré (beaucoup plus faible), c'est dans ces circonstances le terme du troisième degré qui impose sa loi. Ceci expliquerait alors que la limite soit en fait $-\infty$ et permettrait de comprendre l'allure de la représentation graphique.

Il ne s'agit pas bien sûr ici de décrire complètement les différents types d'activité mathématique pour un problème donné, mais de mettre en évidence la dispersion possible des comportements, vue à travers la grille de lecture de notre typologie. Lors du colloque de la Grande Motte ([Guin, 1999]), consacré aux environnements de calculatrices symboliques et géométriques, nous avons montré l'intérêt de cette réflexion sur le « méta », en lien avec les tâches mathématiques à réaliser par les élèves. Un dispositif d'observation par les élèves eux-mêmes a été mis en place (cf. schéma ci-dessous).

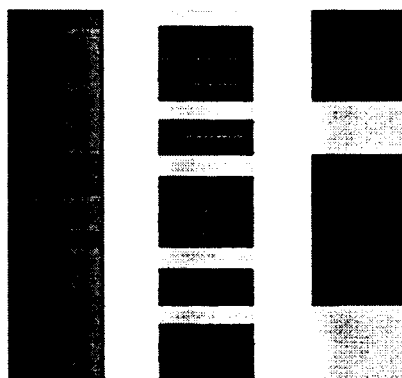


Un premier binôme réalisait un travail mathématique particulier dans un environnement de calculatrice symbolique. En face de celui-ci un deuxième binôme observait ce travail, en notant toutes les quinze secondes la nature de la tâche réalisée, du point de vue du travail avec calculatrice et du travail papier-crayon (ce repérage était rendu possible par l'utilisation d'une tablette de rétroprojection permettant de voir en direct les actions menées

avec calculatrice) et du point de vue des interactions dans le groupe. Le dépouillement des feuilles d'observation (cf. ci-dessous) donnait alors un point de vue sur le type de travail réalisé pendant l'heure.

		15	30	45	1	15	30	45	2
Pap/Cray	Lecture énoncé								
	Lecture cours								
	Lecture travail fait								
	Lecture cahier voisin								
	Dessin								
	Calcul								
TI-92	État de la machine								
	Home								
	Window								
	Y Editor								
	Graph								
	Machine voisin								
Échange	Regard vague								
	Avec le prof								
	Avec le voisin								
Divers									

Le dépouillement chronologique a été effectué par les élèves qui ont eu l'idée de repérer par des couleurs les différents types de tâches réalisées, dans le cadre de rectangles de longueur proportionnelle au temps utilisé. Les différents rectangles, mis bout à bout, donnent un ruban permettant d'apprécier les différents comportements de recherche pendant l'heure (ci-dessous le début des « rubans » pour trois individus différents (en vert, le travail papier-crayon, en rouge le travail avec calculatrice, en jaune l'échange à l'intérieur du binôme, en bleu, les tâches extra-mathématiques).



La dispersion des comportements est assez claire entre les trois « rubans ». La comparaison de ces différents types de comportement, en relation avec les résultats mathématiques obtenus, a permis des échanges fructueux dans la classe expérimentale sur la complémentarité nécessaire des différentes sources d'information, sur l'organisation nécessaire du travail mathématique dans des environnements technologiques complexes.

Il n'y a, bien entendu, pas opposition entre « faire des mathématiques » et « réfléchir à la façon avec laquelle on fait des mathématiques », comme semble le sous-entendre Bernard Sarrazy quand il écrit : « Des questions du type : Ai-je compris ? Sais-je calculer ? Ce résultat

est-il exact ? sont des questions dénuées de signification (...). Pendant le temps d'enseignement méta, on ne résout pas de problème, on ne fait plus de math, et l'on donne l'impression trompeuse aux maîtres qu'il suffirait de bien enseigner pour que les élèves apprennent » [Sarrazy, 1997]. Comme l'écrit Guy Brousseau, « si l'on veut développer chez l'élève un rapport à ses connaissances qui soit un rapport de savoir, il faut prévoir un deuxième assujettissement dans lequel va s'installer un discours sur l'activité d'apprentissage, un discours de reconnaissance de ce que l'on a appris, de ce que l'on sait, de ce que l'on veut apprendre, de ce que l'on va savoir, etc. ; un discours didactique » [Brousseau, 1992].

4. Les schèmes

Ce que nous avons mis en évidence de l'outil et du sujet va nous permettre de mieux comprendre la constitution même d'un instrument à travers la formation des schèmes d'action instrumentée, plus exactement de la partie des schèmes accessibles à l'observation et des hypothèses que l'observation nous amènera à faire sur ceux-ci. Un schème peut être considéré de trois points de vue.

4.1. Un schème, totalité dynamique fonctionnelle

C'est ce qui est le plus connu ici, je n'insisterai pas. L'observation d'un élève donné, dans un environnement donné, confronté à des tâches du même, permet de repérer l'organisation invariante de la conduite, de dégager des invariants opératoires. J'ai étudié, dans le cadre de ma thèse, les travaux des élèves confrontés à des études de limite en $+\infty$ dans un environnement de calculatrices graphiques. Ces fonctions avaient été choisies en relation avec leur aspect graphique ou algébrique: $f(x)=\ln x+10\sin x$, $g(x)=x^2+10\sin x$ par exemple. Les réalisations des élèves font apparaître des théorèmes en acte très forts, en particulier :

- si une fonction oscille ostensiblement, alors elle n'a pas de limite;
- si une fonction est beaucoup plus grande qu'une autre, alors elle impose sa limite à l'autre.

Ces invariants s'accompagnent d'actions très précises (utilisation des commandes Trace, Zoom, extension progressive des fenêtres de visualisation de la représentation graphique).

Il faut bien comprendre que ces invariants permettent la réalisation de la tâche, en même temps la réalisation de la tâche grâce à ces invariants accrédite, renforce leur caractère opératoire et leur légitimité.

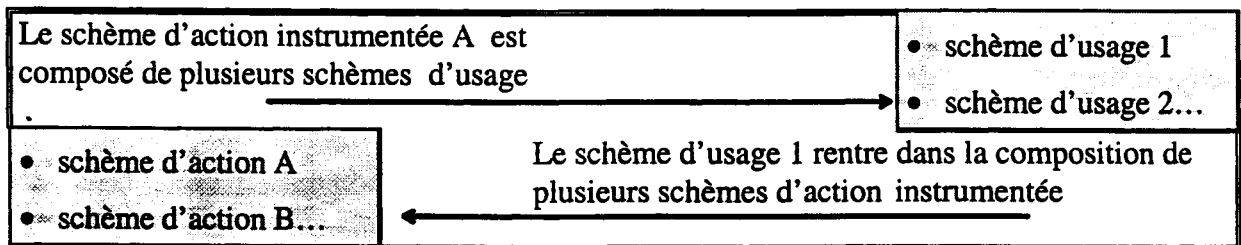
Il se crée ainsi une connaissance relative au concept en question, mais aussi des connaissances relatives à l'organisation même de l'activité mathématique, par exemple:

- ce qui est en dehors de l'écran est le prolongement naturel des représentations observables sur l'écran (ce qui conduit de façon plus générale à une extension naturelle du domaine de validité des propriétés découvertes localement);
- à l'inverse, les théorèmes-en-acte ont une portée limitée, un caractère explicatif ou justificatif local. Ils supportent facilement la contradiction (ce qui conduit à l'idée qu'une exception confirme la règle).

4.2. Un schème, regroupement de gestes successifs, d'actions élémentaires.

Un schème d'action instrumentée est composé de gestes élémentaires, que Pierre Rabardel appelle "schèmes d'usage", orientés vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact. Pour comprendre le sens que ces

gestes élémentaires revêtent pour les élèves, il n'est pas inutile d'opérer un changement de point de vue: il s'agit alors d'isoler un de ces gestes élémentaires, et de repérer l'ensemble des actions finalisées (les schèmes d'action instrumentée) dans lesquelles il intervient.



Un exemple éclairera cette idée. Dans les environnements TI-92, les élèves doivent choisir le mode de calcul dans lequel leur travail va évoluer: le mode exact ou le mode approché. Dans la classe expérimentale, le mode habituel était le mode exact. Cependant la calculatrice possède un raccourcis clavier qui permet d'obtenir une valeur approchée immédiate d'une expression apparaissant à l'écran. Nous appellerons le "détour approximatif" l'utilisation de ce raccourcis. C'est bien un schème d'usage comme nous venons de les définir. Nous comprendrons mieux le sens de ce geste si nous le repérons dans différents contextes: il pourra intervenir, entre autres actions, dans le calcul de limites, dans le calcul d'intégrales, dans la résolution d'équations. Un même geste apparaîtra ainsi avec des sens très différents:

- le détour approximatif "indicatif" permet seulement de situer un nombre sur l'axe des réels, éventuellement de donner un renseignement permettant d'orienter l'action; il s'inscrit souvent dans un comportement général privilégiant l'interprétation sémantique;
- le détour approximatif "sustitut" permet de contourner une impossibilité de calcul (pour l'utilisateur) ou un refus de réponse (pour le logiciel). Il s'inscrit souvent dans un comportement de "copier-coller";
- le détour approximatif "artifice" s'inscrit dans une stratégie d'établissement d'un résultat exact par déformations successives. La calculatrice donne un résultat approché, le travail mathématique consiste alors à trouver un itinéraire entre la question (calcul d'intégrale, calcul de limite, résolution d'équation) et la réponse proposée. Cette action s'inscrit souvent dans des comportements privilégiant l'investigation avec calculatrice.

Distinguer dans chaque travail les gestes élémentaires qui le constituent, regrouper ceux-ci en fonction des contextes dans lesquels ils interviennent, permet de resituer l'action du sujet, de la problématiser socialement, d'agir pour une évolution maîtrisée de l'action avec instrument.

4.3. Un schème, forme provisoire stabilisée de l'action

Il faut en effet comprendre l'instrumentation comme un processus non linéaire, fait de paliers et de sauts, manifestation de phases de déséquilibre dans le processus de conceptualisation. D'où l'expression apparemment contradictoire de « forme provisoire stabilisée ». Cette évolution a été repérée à deux moments cruciaux lors de la première année expérimentale :

- trois mois après l'intégration de calculatrices simplement graphiques (juste avant l'introduction de calculatrices symboliques) ;
- trois mois après l'intégration de ces calculatrices symboliques.

Cette observation a été faite à propos des schèmes d'action instrumentée d'étude de limites, sur plusieurs élèves de la classe, choisis en fonction de la « géographie des comportements » dont nous avons parlé plus haut. Nous nous intéresserons plus particulièrement ici à un comportement de type « copier-coller » (des résultats très différents ont été obtenus pour d'autres élèves).

Avec calculatrices graphiques

La recherche de limite passe par une première phase d'observation graphique (si la courbe apparaît facilement) ou d'observation numérique. Les commandes utilisées en général « Trace » qui permet de se déplacer un point courant sur la courbe, parfois « Zoom » ; dans ce cas, c'est plus souvent « Zoom in » qui permet de se rapprocher, que « Zoom out », qui permet de s'éloigner : l'utilisation d'un petit écran ne facilite pas les visions larges... L'interprétation des résultats se fait en référence aux théorèmes-en-acte disponibles. Ceux-ci servent éventuellement à la justification finale du résultat, dernière phase du travail sur papier. Les deux premières phases, observation et interprétation, sont inextricablement mêlées : ce sont les théorèmes-en-acte disponibles qui guident l'observation, c'est l'observation qui constitue une bibliothèque de résultats de référence (tant il est vrai que, comme le souligne Wittgenstein, « nous ne voyons pas des formes, mais des significations »).

Ce travail nécessite un réel effort cognitif : l'élève observe, se demande de quoi les représentations graphiques qu'il voit sont le signe, doit opérer des choix. Cet effort permet une construction de connaissance, très liée à la façon avec laquelle l'outil présente l'objet en question et pré structure l'action de l'utilisateur. La recherche de limites proposée aux élèves s'accompagnait de deux questions :

- que veut dire la phrase : « la limite de la fonction f , en $+\infty$, est $+\infty$? » ;
- « comment l'expliqueriez-vous à un élève de seconde ».

Dans les deux cas, la réponse de l'élève est du type : « cela veut dire que, plus x augmente, plus la courbe de $f(x)$ augmente, et de plus en plus ». L'identité de la définition admise comme actuelle et de la définition proposée pour un élève plus jeune traduit sans doute une certaine stabilité de la connaissance construite. On retrouve bien un point de vue cinématique-géométrique, tel que nous l'avons défini en 2 (la fonction est nécessairement croissante, même plutôt convexe : « elle croît de plus en plus »).

Avec calculatrices symboliques

La différence est ici que l'outil donne (en général) la limite des fonctions étudiées. L'effort de l'élève se porte alors sur la correction de la syntaxe, sur la réécriture de la commande en cas de message d'erreur. La réponse obtenue est alors recopiée sur papier. Le calcul de limite devient alors une pure création de l'outil. Il y a perte de connaissance, manifestée par l'absence de toute réponse aux questions posées sur la définition des limites (les mêmes que trois mois auparavant). Le passage à un outil plus complexe s'accompagne d'un appauvrissement du schème et d'un affaissement de la conceptualisation.

Pour d'autres élèves au contraire, le passage aux calculatrices symboliques s'accompagne d'une complexification du schème : le calcul de limites se fait en utilisant les applications symboliques, numériques, graphiques, la distinction s'opère entre comportements locaux et globaux des fonctions, le processus de conceptualisation fait un bond en avant. Cette dispersion des comportements est à souligner, alors même que le même enseignement est prodigué à tous les élèves de la classe expérimentale et que la genèse instrumentale est prise

en charge (pour partie) socialement. Une grande partie de cette genèse reste donc sous le contrôle exclusif de l'élève, liée à la relation personnelle qu'il institue avec l'artefact, à l'interaction qui s'instaure entre ces deux systèmes cognitifs.

En conclusion, provisoire

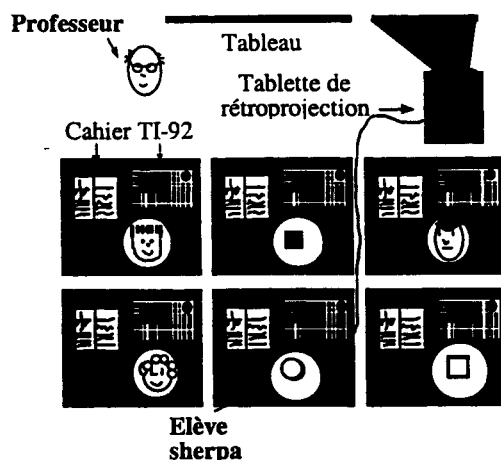
De nombreuses questions se posent, relatives au contrôle de l'intégration des outils de calcul dans le cours de mathématiques : comme le souligne Michèle Artigue, « passer des approches intuitives et expérimentales aux nécessaires restructurations de l'analyse de façon épistémologiquement cohérente et écologiquement viable est un enjeu de la recherche ([Artigue, 1998]). Deux questions me semblent se poser avec une particulière acuité :

- la possibilité des situations a-didactiques dans les environnements informatiques.

Guy Brousseau le souligne : « L'élève ne se sentant pas à égalité avec l'ordinateur, il sera très difficile de faire en sorte qu'un élève utilise une notion mathématique non pas comme un savoir, mais comme élément de preuve, de conviction » ([Brousseau, 1992]). Même si le professeur se refuse à intervenir comme « proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître », l'artefact, comme système cognitif particulier, propose un certain nombre de connaissances qui perturbent la situation. Bien entendu, une perturbation n'est pas en soi une mauvaise chose, tout le problème est d'arriver à l'intégrer comme un des éléments de l'organisation du travail de la classe ;

- la construction d'un système didactique d'exploitation des environnements informatiques.

Cette question est liée à la précédente. Il est décisif de « définir les conditions d'intégration et de viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques » ([Chevallard, 1992]). Dans une certaine tradition écologique, on considère l'homme et la nature, sans envisager que les outils créés par l'homme font aussi partie des écosystèmes dans lesquels il inscrit son action. Ceci est encore plus important dans les institutions d'enseignement. Cette prise en compte suppose de construire des systèmes didactiques d'exploitation des outils. Un certain nombre d'éléments de tels systèmes ont été mis en œuvre au cours d'expérimentations ces dernières années [Guin, 1999]. Les résultats ont montré que la prise en compte des environnements technologiques complexes nécessite une réorganisation importante du temps et de l'espace de l'étude. Nous avons montré par exemple l'intérêt de dispositifs donnant à un élève de la classe la responsabilité de la calculatrice rétroprojetable (cf. schéma ci-dessous). L'élève (appelé élève sherpa comme porteur de la charge de la « monstration » et en même temps médiateur entre la classe et le maître) fournit une référence commune pour la classe, il est en même temps sous le contrôle de la classe. Cela renforce la dimension sociale des processus d'instrumentation. Cela fournit une certaine prise pour un contrôle, une évolution relativement maîtrisée des schèmes d'action instrumentée. Le maître peut ainsi combiner les résultats qu'il produit au tableau et les résultats qui apparaissent à l'écran, fournissant ainsi un modèle pour le travail crayon-papier et le travail clavier-écran de chaque élève sur son bureau.



Cette réorganisation de l'espace de l'étude s'accompagne nécessairement d'une réorganisation du texte du cours et des exercices et du temps de l'étude, aboutissant à de nouveaux équilibres entre les phases de recherche, de formulation, de validation, d'institutionnalisation, d'évaluation. Mais ceci est une autre histoire.

Il nous faut conclure. Le premier article que j'ai écrit en 1994, pour Repères-Irem, concernant les « environnements calculatrices », s'appelait « La grande illusion ». J'y montrais les dangers d'une utilisation sans contrôle des calculatrices. Pour poursuivre la métaphore cinématographique, si j'avais à choisir le titre d'un nouvel article, je choisirais « La règle du jeu », tant la définition de l'organisation collective du travail mathématique dans les nouveaux environnements technologiques me semble essentielle aujourd'hui.

Références bibliographiques

- Artigue Michèle, 1998, L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en didactique des mathématiques* 18(2), pp 231-262, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Balacheff Nicolas, 1994, La transposition informatique, note sur un nouveau problème pour la didactique, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La pensée Sauvage.
- Balacheff Nicolas, 1999, Eclairage didactique sur les EIAH en mathématique, <http://www-eiah.imag.fr/EIAH/Balacheff/GDM98>.
- Bkouche Rudolph, 1996, Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement, *Repères-Irem* n°24, pp 67-76. Pont-à-Mousson : Topiques Editions.
- Brousseau Guy, 1992, Modélisation informatique dans la gestion des processus didactiques, *Séminaires de didactique des mathématiques et de l'informatique 1991/1992* pp 99-115. Didatech. Grenoble : CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier.
- Chevallard Yves, Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques, *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (Ed. Cornu), Paris : PUF.
- Duval Raymond, 1996, Quel cognitif retenir en didactique ?, *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3), pp 349-382, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Godard Jean-Luc, 1998, Jean-Luc Godard par Jean-Luc Godard, *Les Cahiers du Cinéma*, Paris : Seuil.

- Guin Dominique, 1999, Actes du colloque « calculatrices symboliques et géométriques », IREM, Université Montpellier II.
- Guin Dominique et Luc Trouche, 1999, The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. The International Journal of Computers for Mathematical Learning 3 (3).
- Rabardel Pierre, 1995, Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains, Paris : Armand Colin.
- Robert Aline et Jacqueline Robinet, 1996, Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques 16(2), pp 145-176, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Sarrazy Bernard, 1997, Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques 17(2), pp 135-166, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Trouche Luc, 1996, Enseigner les mathématiques en Terminale scientifique avec des calculatrices graphiques et formelles (deux volumes), IREM, Université Montpellier II.
- Trouche Luc, 1997, À propos de l'apprentissage des limites de fonction en environnement calculatrice, étude des rapports entre processus d'instrumentation et processus de conceptualisation, thèse de doctorat, IREM, Université de Montpellier II.
- Trouche Luc, 1997, Calculatrices symboliques en lycée, un défi mathématique, collection Accompagner, CRDP de Montpellier.
- Trouche Luc et 37 élèves d'une classe de Terminale, 1998, Expérimenter et prouver, 38 variations sur un thème imposé, IREM, Université Montpellier II.
- Trouche Luc, 1999, La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur, éléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes, article proposé à Educational Studies in Mathematics.
- Vergnaud Gérard, 1996, Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, in Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, IREM, Clermont-Ferrand.