JEAN JULO

Aide à la représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1999-2000, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n° 6, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1999-2000___3_A6_0>

Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques

Jean JULO

12 janvier 2000

AIDE A LA REPRESENTATION OU AIDE A LA MODELISATION ?
Le cas des problèmes de partage inégal

Nous présentons ici une synthèse des résultats obtenus dans plusieurs expériences concernant les problèmes de partage inégal. Ces expériences ayant fait l'objet de publications, pour la plupart, nous nous contenterons d'évoquer les faits majeurs qu'elles ont permis de mettre en évidence. Le but est de montrer comment ces faits nous conduisent à réexaminer certaines questions théoriques et pratiques que soulèvent les démarches d'aide à la résolution de problèmes.

Nous nous intéresserons en particulier à trois questions :

- est-il vraiment possible d'aider les élèves qui ne parviennent pas à résoudre ce type de problèmes en intervenant seulement au niveau de leur représentation du problème ?
- comment classer et définir les différentes formes d'aide à la représentation ? certaines sont-elles plus performantes que d'autres ?
- comment établir un lien entre représentation et modélisation ? en particulier : comment donner accès à des outils de modélisation nouveaux au sein d'une situation de résolution de problème ?

Secondairement, cet exposé voudrait illustrer la manière dont peuvent s'articuler et se compléter des approches relevant des champs spécifiques de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques.

POURQUOI AIDER À RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE PARTAGE INÉGAL ?

Les problèmes de partage inégal font partie de la tradition des problèmes arithmétiques et ont longtemps joué un rôle central dans la transition arithmétique/algèbre (Chevallard, 1989). L'extrait de manuel ci-dessous montre comment la notion de *solution algébrique* était introduite à partir d'une schématisation de l'énoncé sous forme de segments de droite.

PROBLEMES

Partage en deux parties dont l'une est multiple de l'autre

TYPE - « **Deux personnes ont ensemble 36 francs. L'une possède 5 fois plus que l'autre. Combien chacune a-t-elle ?** »

1ère /---/---/---/---/---/
36fr
2e /---/

SOLUTION - La première personne possède 5 fois ce que possède la deuxième. Ensemble elles possèdent 5+1 fois, ou 6 fois ce que possède la deuxième.

Donc la deuxième a 36fr : 6 ou **6 francs** et la première 6fr x 5 ou **30 francs**

AUTRE SOLUTION - Au lieu de représenter la part inconnue de chacune des deux personnes par une *portion de droite*, il est possible et plus aisé de représenter cette part par une *lettre* quelconque de l'alphabet, par x, par exemple.

En appelant x la plus petite des deux parts, la plus grande est 5x.
On peut dire :
x plus 5 fois x font 36 francs ; et on peut écrire :

$$x + 5x = 36 \text{ ; et } 6x = 36$$

D'où :

$$x = 36 : 6 = 6$$

Rep - La deuxième personne a **6 francs** ; la première a 6fr X 5 ou **30 francs.**

REMARQUE - Cette solution qui comporte un raisonnement dans lequel on désigne, par une lettre le nombre à chercher, le *nombre inconnu,* s'appelle une *solution algébrique* ; c'est, pour certains problèmes, le mode de solution le plus simple et le plus rapide.

A. LEMOINE - Cours d'Arithmétique
Librairie Hachette - 1923

Cette manière de faire peut être critiquée de deux points de vue différents.

Le premier concerne l'absence complète de perspective de type « activité de résolution de problème ». On se contente de montrer une méthode de résolution qu'il faudra apprendre à utiliser. Or, une particularité de cette classe de problèmes que l'on appelle de partage inégal est son intérêt en termes de processus cognitifs. D'abord, ces problèmes soulèvent des difficultés tout à fait nouvelles et importantes au niveau de la représentation (mentale) qui permettra de les « comprendre » puis de les résoudre (le statut des nombres-solutions n'est pas le même en particulier que dans les problèmes arithmétiques plus simples où ils sont des « résultats » d'opérations). Ensuite, la variété des procédures pouvant être mises en œuvre est suffisamment grande pour permettre des approches très différentes de ces problèmes et susciter de vraies démarches de découverte dans la manière de les résoudre.

L'analyse des procédures chez des élèves de 6ème/5ème permet ainsi de distinguer deux grandes classes :

- la classe des procédures que nous appellerons *par fractionnement* car elles consistent toujours, d'une manière ou d'une autre, à diviser la somme pour obtenir l'une des valeurs demandées ; les deux procédures décrites dans l'extrait de manuel joint en font partie et constituent deux sous-classes importantes mais il en existe d'autres ;

- la classe des procédures que nous appellerons *par ajustement* car elles consistent à déterminer les valeurs demandées en essayant des nombres ; il existe ici aussi plusieurs sous-classes différenciées par le recours éventuel à un mode d'organisation des essais (dans un tableau par exemple) ou à une méthode d'encadrement (rapports de proportionnalité par exemple).

La seconde critique concerne l'idée même que cette transition entre arithmétique et algèbre puisse se faire, comme on le supposait, de manière naturelle, « sans violence », simplement en constatant qu'une méthode est plus efficace qu'une autre. Chevallard (1989) montre que c'est une telle illusion épistémologique qui sous-tend la stratégie classique d'introduction de l'algèbre et qui conduit à négliger tout le travail de modélisation propre au traitement algébrique des situations. Du point de vue cognitif, une autre illusion conduit à concevoir la mise en équation comme une simple « traduction » de l'énoncé du problème (Julo, 1995) et contribue ainsi, également, à l'occultation de l'activité de modélisation en mathématiques. Notons que des recherches récentes tendent à montrer qu'une telle conception réductrice du raisonnement algébrique est toujours présente chez de jeunes adultes se destinant à l'enseignement (Schmidt & Bednarz, 1997).

Prenant en compte ces deux sortes de considérations et les réflexions menées dans un groupe de recherche de l'IREM de Rennes (1985), nous avons choisi de nous intéresser aux problèmes de partage inégal en tant que tels et à la place qu'ils pourraient avoir dans l'enseignement des mathématiques en classes de 6ème et de 5ème. L'hypothèse didactique est que ces problèmes pourront avoir un rôle de préparation à l'algèbre si l'on parvient à réaliser deux conditions :

- induire à leur propos une véritable activité de résolution de problème,
- induire une activité de modélisation intrinsèquement liée à cette démarche de découverte de solution.

La réalisation de ces deux conditions devrait contribuer, sur le plan cognitif, à faire vivre aux élèves la nécessaire rupture épistémologique que constitue le passage à l'algèbre.

LES PROBLÈMES PRIS EN COMPTE DANS LES EXPÉRIENCES RÉALISEES

A l'intérieur de la classe des problèmes de partage inégal, nous nous sommes intéressés exclusivement à un type particulier : les problèmes caractérisés par 3 inconnues et 3 relations dont l'une est une somme et les deux autres des rapports.

Quelques exemples d'énoncés :

EXEMPLE 1

> On a trois ficelles : une grande, une moyenne et une petite.
> Mises bout-à-bout elles mesurent 240 cm.
> La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite.
> La moyenne est 3 fois plus longue que la petite.
> Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

EXEMPLE 2

La somme de trois nombres A, B et C est 294.
Le nombre A est 8 fois plus grand que le nombre B.
Le nombre B est 3 fois plus grand que le nombre C.
Quels sont les nombres A, B et C ?

EXEMPLE 3

Pour fabriquer un cocktail avec du jus d'orange, du jus d'ananas et du jus de fruits de la passion, on doit respecter les proportions suivantes :
- mettre 2 fois plus de jus d'orange que de jus d'ananas,
- mettre 6 fois plus de jus d'orange que de jus de fruits de la passion.
Quelle quantité de chacun des jus faut-il pour préparer 5 litres de cocktail ?

A l'intérieur de cette sous-classe, trois catégories principales de problèmes doivent être distinguées en fonction de la nature des deux relations multiplicatives fournies :
si les trois inconnues sont telles que : A > B > C, on peut :
- exprimer A et B en fonction de C (1er exemple),
- exprimer A en fonction de B et B en fonction de C (2ème exemple),
- exprimer A en fonction de B et en fonction de C (3ème exemple).

Il existe de nombreuses variantes liées aux valeurs numériques en jeu (celles qui servent à exprimer les rapports précédents, celle de la somme et celles des inconnues). Il existe aussi de nombreuses variantes liées aux grandeurs et, plus généralement, au contexte sémantique qui caractérise l'énoncé. Ainsi le premier exemple apparaît comme l'un des plus faciles parmi ceux que nous avons expérimentés avec des élèves de 6ème et le troisième comme l'un des plus difficiles.

DEUX EXPÉRIENCES METTANT EN OEUVRE DES PROBLÈMES ISOMORPHES

La première expérience (Julo, 1990) que nous présenterons porte sur la comparaison de deux conditions :
- soit les élèves reçoivent une feuille comportant un énoncé de problème et on leur demande de le résoudre,
- soit ils reçoivent une feuille comportant trois énoncés strictement isomorphes (même structure, mêmes valeurs numériques) et on leur demande de choisir l'un des énoncés et de résoudre le problème qu'ils ont choisi ; les élèves ne sont pas informés qu'il s'agit de problèmes isomorphes.

La feuille correspondant à cette seconde condition expérimentale se présente de la manière suivante (dans la première condition les élèves reçoivent l'un de ces trois énoncés) :

LIS CES TROIS PROBLÈMES ET CHOISIS CELUI QUE TU VEUX RÉSOUDRE	
PROBLÈME 1	
	Judith, Catherine et Anne ont 126 ans à elles trois. Judith est la plus âgée et Anne la plus jeune. Judith est 4 fois plus âgée que Anne. Catherine est 2 fois plus âgée que Anne. Quel est l'âge de chacune ?
PROBLÈME 2	
	On a trois ficelles : une grande, une moyenne et une petite. Mises bout-à-bout elles mesurent 126 cm. La grande ficelle est 4 fois plus longue que la petite. La moyenne est 2 fois plus longue que la petite. Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?
PROBLÈME 3	
	La somme de trois nombres A, B et C est 126. Le nombre A est le plus grand et le nombre C le plus petit. Le nombre A est 4 fois plus grand que le nombre C. Le nombre B est 2 fois plus grand que le nombre C. Quels sont les nombres A, B et C ?

L'expérience est réalisée en classe de 6ème et le temps imparti est le même pour les deux conditions (20 min).

Les résultats font apparaître une différence nette au niveau de la performance : les élèves réussissent plus souvent à résoudre le problème lorsqu'ils ont eu le choix entre trois énoncés. Cet effet que nous avons appelé de *multiprésentation* est également retrouvé avec un autre problème (Julo & Cauzinille-Marmèche, 1996) et les analyses réalisées montrent qu'il résulte, très vraisemblablement d'une activité de comparaison analogique.

En termes d'aide, cette modalité de multiprésentation est l'une des plus "légères" que l'on puisse imaginer en ce sens qu'elle ne guide d'aucune manière les élèves vers la solution ou vers une procédure de résolution. L'aide apportée se situe au niveau de la représentation du problème et prouve donc qu'il est possible de favoriser la mise en place de cette représentation en préservant tout le versant opératoire de la démarche de résolution (élaboration de stratégies et de procédures).

La seconde expérience à laquelle nous ferons référence (Cauzille-Marmèche & Julo, 1998) consiste toujours à présenter des énoncés isomorphes (les mêmes que ceux utilisés dans l'expérience précédente) mais en comparant cette fois les deux conditions suivantes :

- une présentation successive des trois problèmes (condition 1 décrite ci-dessous) ;
- une présentation simultanée de ces trois problèmes avec choix de celui que l'élève veut résoudre puis, dans un second temps, la résolution des deux autres problèmes (condition 2 décrite ci-dessous).

TROIS PROBLEMES ISOMORPHES PRESENTES SUCCESSIVEMENT

Modalités de l'expérience

CONDITION 1

P1 → P2 → P3
(15mn) (15mn) (15mn)

un seul problème présent à chaque étape
6 ordres possibles mis en œuvre

CONDITION 2

P1		
		P1/2/3
P2	→	
		P1/2/3
P3		
choix (3mn) (15mn)		2 non choisis (30mn)
le 1er problème est ramassé		

Les résultats font apparaître (toujours chez des élèves de 6ème) une supériorité de la condition 2 au niveau de la performance mais celle-ci est relativement faible. En revanche, une analyse fine des traitements effectués par les élèves et des procédures mises en œuvre montre l'existence de progrès liés à la résolution successive des trois problèmes isomorphes. L'hypothèse que ces progrès correspondraient à une microgénèse spécifique de la mise en place d'une représentation structurée de ces problèmes a donc pu être avancée.

Les quatre étapes principales de cette microgénèse sont caractérisées par les observables suivants au niveau des démarches des élèves :

- étape 1 traitements numériques sans plan préétabli ;
- étape 2 traitements numériques centrés (exclusivement ou alternativement) sur l'une des deux contraintes (la somme ou les rapports) ;
- étape 3 mise en œuvre d'une procédure d'ajustement ;
- étape 4 mise en œuvre d'une procédure de fractionnement.

LES GRANDES LIGNES D'UNE STRATÉGIE D'AIDE

Les deux expériences précédentes concernant le rôle que peut avoir la présentation de problèmes isomorphes sur les démarches de résolution apportent des éléments intéressants en vue de la définition d'une stratégie d'aide répondant aux conditions énoncées au début de cet exposé.

La première idée à retenir est la nécessité d'une phase relativement longue de travail portant sur différents problèmes et ne comportant que des aides à la représentation très "légères" (c.a.d. des aides qui n'orientent ni vers la solution, ni vers une procédure, ni vers un outil particulier).

La seconde idée est de partir de la microgénèse décrite précédemment pour différencier, à l'issue de cette première phase, les aides que l'on apporte. Quatre cas et cinq objectifs principaux peuvent ainsi être formulés sur la base des données cognitives dont nous disposons :

1ER CAS : LES LEVES QUI PROCEDENT PAR FRACTIONNEMENT

⇒ l'objectif est de les faire progresser vers la mise en œuvre d'outils de modélisation de plus en plus puissants (traitement algébrique en particulier)

2EME CAS : LES ELEVES QUI PROCEDENT PAR AJUSTEMENT

deux objectifs distincts peuvent être envisagés pour ces élèves sans qu'il soit possible d'établir actuellement la manière de les articuler :

⇒ permettre aux élèves d'acquérir une maîtrise plus grande de la procédure et ainsi de consolider leur représentation du problème

⇒ faire progresser les élèves vers une procédure de fractionnement

3EME CAS : LES ELEVES QUI ONT UNE REPRESENTATION PARTIELLE DU PROBLEME
(le but et les contraintes sont intégrés à la représentation mais non opérationnalisés) :

⇒ la priorité dans ce cas est de permettre l'émergence d'une procédure de réussite (qui pourra être suivant les élèves soit une procédure par ajustement soit directement une procédure par fractionnement, c'est là toute la difficulté de ce cas)

4EME CAS : LES ELEVES QUI NE RELEVENT D'AUCUN DES CAS PRECEDENTS

⇒ l'objectif est de les faire progresser vers une représentation du problème qui intègrent de plus en plus les éléments importants (ceux qui concernent la nature du but et la nature des contraintes en particulier)

La mise en application d'une telle stratégie suppose résolues deux questions importantes :
- celle du repérage de l'étape où se trouve l'élève dans la microgénèse décrite,
- celle des modalités d'aide que l'on utilise pour induire le progrès souhaité.

La première question est, désormais, plus de nature pratique que théorique (bien que le modèle cognitif adopté soit encore très rudimentaire). Notons qu'elle se pose de manière différente suivant que l'on est dans le cadre d'un travail en classe ou dans le cadre d'un travail piloté par un tutoriel.

La seconde question reste, quant à elle, largement de nature théorique à la fois sur le plan cognitif et sur le plan didactique. Une façon de l'aborder est de se poser la question plus simple de la différenciation et de la classification des formes d'aide à la représentation existantes ou pouvant être imaginées.

La présentation de deux nouvelles expériences va nous permettre d'apporter quelques éléments de réflexion à ce niveau.

DEUX EXPÉRIENCES CONCERNANT DIFFÉRENTES FORMES D'AIDE

Dans une expérience réalisée au sein d'un groupe IREM, nous avons étudié l'impact de trois aides très différentes sur la résolution du problème suivant par des élèves de 6ème (expérience présentée dans : Julo, 1995) :

> On a trois ficelles A, B et C de longueurs différentes.
> A est 3 fois plus longue que B.
> C est 4 fois plus longue que B.
> Les trois ficelles mises bout-à-bout mesurent 240 cm.
> Quelle est la longueur de chacune des ficelles ?

Ces trois aides peuvent être caractérisées de la manière suivante :

- l'aide A (<u>A</u>ffirmations) est la plus neutre : elle incite seulement l'élève à relire l'énoncé en attirant son attention sur les relations et les contraintes à prendre en compte pour la résolution du problème ; il doit décider si des affirmations comme "Si la ficelle B mesurait 50 cm alors la ficelle A devrait mesurer 150 cm d'après le texte du problème" sont vraies ou fausses ;
- l'aide G (<u>G</u>raphiques) correspond à une tâche de reconnaissance mettant en jeu les schémas classiques que l'on utilise pour modéliser ce type de problème ; l'élève doit reconnaître le "bon schéma" parmi six qui lui sont présentés ;
- l'aide E (<u>E</u>galités) s'appuie aussi sur une tâche de reconnaissance mais qui met en jeu, cette fois, une écriture de type algébrique des contraintes (égalités de la forme $A = 3 \times B$) ; parmi les trois réécritures de l'énoncé proposées l'élève doit indiquer laquelle correspond au problème à résoudre.

L'expérience se déroule de la manière suivante :

- chaque élève reçoit une fiche l'invitant à résoudre le problème ;

- si l'élève n'a pas fourni les réponses attendues au bout de 15 mn, une aide lui est fournie sous la forme d'une fiche et sans aucune explication supplémentaire ;
- 10 minutes après, l'élève reçoit une seconde aide s'il n'a toujours pas résolu le problème, puis une troisième 10 minutes plus tard ; l'ordre dans lequel les trois aides seront présentées (parmi les six possibles) est déterminé au départ et de manière aléatoire ;
- le travail est arrêté 15 mn après la troisième aide.
- (lorsque l'élève a résolu le problème, un second problème du même type mais un peu plus difficile lui est proposé, puis un troisième encore plus difficile)

Le taux de réussite est de 12 % après la première phase de travail (sans aide) et passe à 52 % après la troisième aide. Mais les résultats mettent surtout en évidence deux faits importants :
1- les trois aides ne sont pas équivalentes du point de vue de leur effet sur la réussite ; on observe nettement l'ordre suivant G > E > A ; la présence d'un outil de modélisation dans l'aide (schéma ou écriture de type algébrique) oriente les élèves vers une procédure de fractionnement ainsi que le montre une analyse de leurs démarches ;
2- toutefois, on observe aussi qu'aucune des trois aides n'a un effet déterminant et que chacune peut avoir un impact qu'elle soit donnée en première, deuxième ou troisième position.

Ainsi, cette expérience montre de manière très nette que la variété et le cumul des aides ont un effet positif sur l'activité de résolution de problème. Elle conduit également à se poser la question du rôle exact des outils de modélisation lorsqu'ils sont présentés, comme ici, dans un éventail relativement large de modalités d'aide.

La dernière expérience que nous évoquerons, la plus récente, a été réalisée dans une perspective de psychologie cognitive (Cauzille-Marmèche & Pélissier, 1999). Elle concerne le rôle que peut avoir la présentation de corrigés dans la résolution des problèmes de partages inégaux.

Nous ne décrirons pas ici les modalités précises de l'expérience qui sont assez complexes. Nous dirons simplement qu'elle se déroule en trois phases :
- dans la première, les élèves ont à résoudre successivement plusieurs problèmes du même type que ceux des expériences précédentes ;
- dans une deuxième phase, les élèves qui n'ont réussi à résoudre aucun des problèmes proposés sont répartis dans quatre conditions expérimentales ; dans les deux premières, les élèves reçoivent les corrigés de trois des problèmes qu'ils ont eu à résoudre auparavant, ces trois corrigés étant présentés soit successivement (10 min pour chacun) soit "en bloc" (30 min pour étudier les trois) ; les deux autres conditions servent à évaluer l'effet de ces corrigés (dans l'une on repropose seulement aux élèves les problèmes de la première phase, la dernière étant une condition contrôle) ;
- dans la troisième phase, les élèves ont à résoudre des problèmes analogues à ceux de la première phase.

Il est important de préciser la nature des corrigés. Ceux-ci présentent toujours la procédure de fractionnement basée sur une représentation graphique des relations entre les trois valeurs à trouver (cette représentation elle-même différant légèrement d'un corrigé à l'autre) :

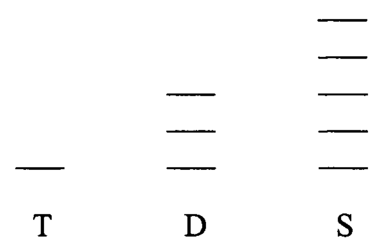
EXEMPLE DE CORRIGÉ

Pour le problème suivant :

Théo, Daniel et Sandra ont 81 cassettes à eux 3.
Daniel a 3 fois plus de cassettes que Théo.
Sandra a 5 fois de plus de cassettes que Théo.
Combien de cassettes à Théo ?
Combien de cassettes à Daniel ?
Combien de cassettes à Sandra ?

le corrigé suivant est proposé :

Un de tes camarades a rédigé ainsi sa solution :



Donc Théo a 81 : 9, soit 9 cassettes.
Donc Daniel a 27 cassettes.
Donc Sandra a 45 cassettes.
Il a juste. Comment a-t-il fait pour avoir toutes ses réponses justes ?

Nous retiendrons des résultats de cette expérience les trois faits suivants :

1- l'effet des corrigés est très net pour les problèmes qui ont exactement la même structure relationnelle que ceux faisant l'objet d'un corrigé (c.a.d. la structure la plus simple : celle où les deux plus grandes valeurs sont exprimées en fonction de la plus petite) mais il l'est beaucoup moins pour des problèmes caractérisés par des structures différentes ; l'acquis de la phase d'étude des corrigés semble donc peu généralisable ;
2- la présentation simultanée des corrigés a un effet plus important que leur présentation successive, en particulier dans le cas d'une structure relationnelle différente ;
3- il existe un gain de performance notable dans la condition où on repropose simplement aux élèves les problèmes de la première phase.

Cette expérience confirme donc une nouvelle fois le rôle de la comparaison analogique dans la résolution des problèmes étudiés. Elle montre surtout les limites d'une démarche d'aide basée sur un seul outil de modélisation associé, en outre, à une seule procédure. Toutefois, elle conduit à s'interroger sur le rôle précis que pourrait jouer un tel outil de modélisation (par exemple pour aider les élèves à passer d'une procédure par ajustement à une procédure par fractionnement) et sur ses liens avec d'autres formes d'aide.

UNE CLASSIFICATION DES FORMES D'AIDE À LA REPRESENTATION

De la même manière que nous avons proposé une classification des objectifs que l'on peut assigner à une démarche d'aide pour les problèmes qui nous intéressent ici, il nous semble désormais possible de proposer une classification des différentes formes d'aide qui pourraient être mises en œuvre dans le cadre d'une stratégie globale. D'autres travaux en cours permettent de penser, en outre, que cette classification n'est pas spécifique des problèmes de partage inégal et pourrait être transposée à d'autres situations d'apprentissage par la résolution de problèmes.

L'idée principale de la classification proposée est celle d'une hiérarchie en terme de préservation du processus de découverte de la solution. On peut considérer que l'aide qui préserve au mieux ce processus est celle qui répond aux trois principes suivants :
- elle ne contient aucun indice sur la solution,
- elle n'oriente vers aucune procédure de résolution,
- elle n'apporte aucun outil de modélisation.

Mais le principe d'une "aide" est aussi d'aider ou, plus exactement, d'aider « ni trop ni trop peu » pour reprendre la formule de Polya. De plus, si la démarche d'aide est finalisée par un objectif d'apprentissage concernant directement les procédures et les outils à mettre en oeuvre, comme c'est le cas ici, il faut pouvoir transgresser, *au bon moment*, le principe général d'une aide à "dose homéopathique".

Nous retenons ainsi cinq catégories principales, chacune pouvant intégrer toutes celles qui lui sont inférieures dans la hiérarchie proposée.

1 - LES EXPLICITATIONS

Cette forme d'aide a pour fonction de rendre le but et les conditions de réalisation du but plus explicites (et seulement ces deux caractéristiques du problème).

Elles concernent en particulier les difficultés éventuelles liées à l'énoncé et à sa formulation mais pas uniquement ; des difficultés plus générales de représentation du problème peuvent être levées par des modalités d'explicitation quelquefois très légères, ainsi que le montrent plusieurs recherches. Par exemple, pour la classe de problèmes qui nous intéresse ici, il apparaît que le contexte des ficelles est le plus "parlant" pour les élèves (sans pour autant être le "préféré" lorsqu'ils ont le choix).

2 - LES PROBLEMES ANALOGUES

Cette forme d'aide consiste à présenter plusieurs versions d'un problème caractérisé par sa structure.

La définition de cette structure n'est pas une donnée première et dépend de l'analyse que l'on fait de la classe de problèmes en jeu. De même le degré d'analogie retenu peut être variable, le cas présenté précédemment (deux premières expériences) constituant une sorte de limite.

3 - LES TACHES SURAJOUTEES

Cette forme d'aide repose sur la réalisation d'une tâche secondaire liée étroitement à la tâche principale que constitue la résolution du problème. Le principe est de rendre l'élève actif en lui proposant un sous-but, éventuellement très éloigné du but principal, qui l'engage dans un processus de recherche.

D'une certaine manière, le découpage traditionnel des problèmes en sous-questions est basé sur ce principe, la différence étant que ce découpage est généralement conçu comme une aide à la résolution (indications fortes sur la procédure ou l'outil à mettre en œuvre) et non comme une aide à la représentation du problème.

Notons que les modalités particulières de telles tâches surajoutées sont nombreuses et peuvent être très diverses mais sont relativement complexes à mettre en œuvre (Julo, 1993, 1995).

4 - LES OUTILS DE MODELISATION

Cette forme d'aide consiste à apporter, d'une manière ou d'une autre, un outil permettant de modéliser la situation et donc de modifier la représentation du problème construite initialement pas l'élève.

Cette forme est la plus familière et la plus spontanée lorsque l'on veut aider sans orienter trop vers la solution. Elle s'appuie souvent, lorsque cela est possible, sur des outils de nature graphique : proposer un schéma, par exemple, pour les problèmes de partage inégal. Mais l'apport d'un outil de modélisation est aussi, presque toujours, une orientation vers une procédure particulière de résolution (la procédure par fractionnement pour le schématisation traditionnelle des problèmes de partage inégal). Il existe toutefois des modalités qui permettent d'atténuer cet inconvénient.

Cette forme d'aide peut être combinée de multiples manières aux trois formes précédentes.

5 - LES EXPLICATIONS

Cette dernière catégorie se caractérise essentiellement par l'existence d'une dimension socio-cognitive manifeste dans ce que l'on apporte à l'élève (alors que les autres formes peuvent être vues comme faisant simplement partie de l'environnement immédiat du problème et constituant une sorte d'élargissement de son énoncé).

La modalité la plus simple est bien sûr celle de l'enseignant ou d'un autre élève qui "explique" le problème. Mais quantité d'autres modalités existent, en particulier pour les cas où les élèves travaillent en autonomie (par exemple des corrigés comme dans la quatrième expérience présentée ou des dialogues fictifs).

On notera que l'explication donnée peut être très peu inductrice, ne portant par exemple que sur un mot de l'énoncé que l'élève ne comprend pas. Elle sera peu différente alors d'une explicitation. Mais dans la plupart des cas, l'explication comporte une orientation forte sur la manière de résoudre de problème, c'est-à-dire des indications de procédure et d'outil (même lorsque cette explication n'est pas spontanée). Ce guidage est renforcé encore par la dimension interindividuelle de l'intervention (même lorsque celle-ci n'a pas de caractère prescriptif). C'est en ce sens que nous plaçons cette forme d'aide au dernier niveau de notre classification.

En conclusion nous voudrions souligner le fait que nous ne prenons pas en compte dans cette classification une dimension importante : le moment où l'aide est apportée (dès la présentation du problème, à la demande de l'élève, à l'initiative d'un tuteur,...). Nous ne spécifions pas non plus le cadre dans lequel se déroule le travail : en situation de classe ou en autonomie, avec utilisation ou non d'un support informatique.

Le but poursuivi est de fournir un outil pour la conception et l'analyse d'aides nouvelles et diversifiées répondant au principe général de préservation maximale du processus de découverte. Dans le cas des problèmes de partage inégal qui nous intéressent ici, cet outil devrait permettre de spécifier la stratégie générale définie précédemment. Il permet en particulier de donner une place et un statut aux outils de modélisation que l'on est conduit à introduire pour réaliser l'objectif assigné à cette stratégie d'aide : préparer les élèves à l'introduction de l'algèbre en 4ème.

La question plus générale que soulève l'approche décrite ici est donc celle de la pertinence de la notion d'*aide à la modélisation* en complément des notions d'aide à la résolution et d'aide à la représentation d'un problème donné.

BIBLIOGRAPHIE

Cauzinille-Marmèche, E. & Julo, J. (1998). Studies of micro-genetic learning brought about by the comparison and solving of isomorphic arithmetic problems. *Learning and Instruction, 8, 3,* 253-269.

Cauzinille-Marmèche, E. & Pélissier, A. (1999). Cognitive progress triggered by worked-examples analysis or unassisted problem solving. Soumis : *Learning and Instruction.*

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d'une recherche.* Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, 16.

IREM de Rennes (1985). *Informatique et ingénierie didactique. Rapport 1984-85 du GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.* Université de Rennes 1.

Julo, J. (1990). Surface features, representations and tutorial interventions in mathematical problem solving. *European Journal of Psychology of Education, 5,* 255-272.

Julo, J (1993). Le pétrolier fait-il fausse route ? *Les Cahiers Pédagogiques, 316,* 32-36.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. & Cauzinille-Marmèche, E. (1996). L'effet de multiprésentation : mise en évidence dans la résolution d'un problème de proportionnalité. *Revue de Psychologie de l'Education, 1,*

Schmidt, S. & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 127-155.