A. Avez

Classement spectral des endomorphismes dilatants des variétés compactes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1969, tome 7
« Conférences de A. Avez, V. Glaser, M. Guenin et A. Martin », , exp. n° 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1969__7__A1_0>

CLASSEMENT SPECTRAL DES ENDOMORPHISMES DILATANTS DES VARIETES COMPACTES

par

A. AVEZ

Faculté des Sciences de Paris

I.H.P. - 11, rue Pierre et Marie Curie, PARIS/5°

Les endomorphismes dilatants des variétés compactes ont été définis et étudiés topologiquement par M. SHUB [4], [5] . Si l'on suppose qu'ils laissent invariant un élément de volume, ils constituent des modèles de l'émulsion d'un liquide incompressible contenu dans un vase riemannien compact. On montre alors que ces endomorphismes sont exacts au sens de ROHLIN [3] . Ils sont donc tous spectralement équivalents. En particulier, ils sont tous fortement mélangeants et ergodiques.

Ces résultats étaient annoncés dans [1] .

1 . NOTATIONS .

On désigne par M une variété différentiable compacte, connexe et orientable. L'espace tangent en $m \in M$ est TM_m , le fibré tangent est TM . Si g est une métrique riemannienne sur M , $\|X\|$ est la longueur du vecteur tangent X , $d(m,n)$ est la distance de m à n . Enfin, la différentielle en m d'une application différentiable $\psi : M \to M$ est notée $D\psi(m)$.

2 . DEFINITION .

Une application différentiable $\varphi : M \to M$ est un endomorphisme dilatant s'il existe une métrique riemannienne g telle que, pour tout $X \in TM$ et tout $n \in Z^+$, on ait

$$(2.1) \qquad \| D\varphi^n(x) X \| \geq c\lambda^n \| X \| \quad ,$$

où $c > 0$ et $\lambda > 1$ sont des constantes indépendantes de n et de X.

Le rôle de g n'est qu'apparent. Si g' est une autre métrique riemannienne, la compacité de M entraîne l'existence de constantes positives a et b telles que, avec des notations évidentes, $a\|X\| \leq \|X\|' \leq b\|X\|$ pour tout $X \in TM$. On a donc $\| D\varphi^n(x) X\|' \geq \frac{a}{b} c.\lambda^n \|X\|'$ pour tout $X \in TM$.

Nous supposerons dans toute la suite que φ laisse invariante une mesure différentiable positive μ : $\mu(\varphi^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout ensemble μ-mesurable A de M. Sans nuire à la généralité on peut supposer $\mu(M) = 1$, puisque M est compacte.

Les endomorphismes ergodiques des groupes abéliens compacts de dimension finie et les endomorphismes $z \mapsto z^k$, $k \in Z^+$, du cercle $S^1 = \{z : z \in \mathbb{C} , |z| = 1\}$ illustrent une telle situation. D'autre part de tels endomorphismes constituent un modèle de l'émulsion d'un fluide incompressible contenu dans un "vase riemannien compact" : si A est un petit sous-ensemble de M, $\varphi^{-n}A$ est formé de $(\deg \varphi)^n$ petits sous-ensembles, dont la somme des volumes est égale au volume de A et dont les diamètres respectifs sont de l'ordre du diamètre de A multiplié par λ^{-n} ($\deg\varphi$ = degré topologique de φ).

3. PROPRIETES ELEMENTAIRES.

3.1. Le jacobien J_φ de φ garde un signe constant sur M orienté.

Sinon, puisque M est connexe et J_φ continu, on aurait $D\varphi(m)X = 0$ pour quelque X non nul d'un TM_m, en contradiction avec $\|D\varphi(m) X\| \geq c\lambda \|X\| > 0$.

3.2. L'application φ est surjective.

L'invariance de μ entraîne $\mu(M) = \mu(\varphi^{-1}\varphi M) = \mu(\varphi M)$. Ainsi $\varphi M = M$ presque partout et φM est dense dans M. Mais φM est fermé car φ est continu et M est compact ; par suite $\varphi M = M$.

3.3. <u>Produit cartésien</u> .

Soient $\varphi : M \to M$ et $\varphi' : M' \to M'$ deux endomorphismes dilatants des variétés riemanniennes compactes, connexes et orientables M et M' . Munissons $M \times M'$ de la structure riemannienne produit et définissons l'endomorphisme $\varphi \times \varphi' : M \times M' \to M \times M'$ par $\varphi \times \varphi'(m,m') = (\varphi m, \varphi' m')$. Si $(X,X') \in T(M \times M')_{(m,m')}$ on a avec des notations évidentes

$$\|D(\varphi \times \varphi')^n(m,m')(X,X')\|^2 = \|(D\varphi^n(m)X,\ D\varphi'^n(m')X')\|^2 =$$

$$\|D\varphi^n(m)X\|^2 + \|D\varphi'^n(m')X'\|^2 \geq c^2\lambda^{2n}\|X\|^2 + c'^2\lambda'^{2n}\|X'\|^2 \quad .$$

Par suite $\varphi \times \varphi'$ vérifie une relation (2.1) où l'on a changé c en $\min(c,c')$ et λ en $\min(\lambda,\lambda')$.

Si en outre φ et φ' laissent respectivement invariantes des mesures μ et μ' , $\varphi \times \varphi'$ laisse invariante la mesure produit $\mu \times \mu'$.

3.4. <u>Soit</u> $\ell(\gamma)$ <u>la longueur d'un arc</u> $\gamma : [0,1] \to M$. <u>Alors</u> $\ell(\varphi^n\gamma) \geq c\lambda^n \ell(\gamma)$ <u>pour tout</u> $n \in Z^+$.

On a en effet d'après 2.1

$$\ell(\varphi^n\gamma) = \int_0^1 \|D\varphi^n \dot{\gamma}(t)\|\,dt \geq c\,\lambda^n \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = c\,\lambda^n . \ell(\gamma) \quad .$$

4 . <u>L'OPERATEUR</u> $\hat{\varphi}$.

Soit $C(M)$ l'espace des fonctions $f : M \to \mathbb{C}$ continues banachisé par la norme $\|f\|$ de la convergence uniforme. Nous allons définir et étudier un opérateur linéaire continu $\hat{\varphi}$ sur $C(M)$.

D'après 3.1. le degré topologique de φ en m est une constante $\deg(\varphi)$ indépendante de m . L'image inverse $\varphi^{-1}m$ est donc formée de $\deg(\varphi)$ points distincts qui varient différentiablement avec m . Puisque $J_\varphi \neq 0$, cela permet d'associer à $f \in C(M)$ la fonction continue $\hat{\varphi} f(m) = \sum_{p \in \varphi^{-1} m} \frac{f(p)}{J_\varphi(p)}$, qui est différentiable en même temps que f .

4.1. Lemme .

$\hat{\varphi} : C(M) \to C(M)$ est un opérateur linéaire continu de norme 1 .

Nous venons de voir que $\hat{\varphi} C(M) \subset C(M)$. La linéarité de $\hat{\varphi}$ est manifeste. Sa continuité résulte de

$$\| \hat{\varphi} f \| = \sup_M \Big| \sum_{p \in \varphi^{-1} m} \frac{f(p)}{J_\varphi(p)} \Big| \leq \| f \| \sum_{p \in \varphi^{-1} m} \frac{1}{J_\varphi(p)} = \| f \| \quad ,$$

car l'invariance de μ entraîne $\sum_{p \in \varphi^{-1} m} J_\varphi(p)^{-1} = 1$. Finalement, puisque $\hat{\varphi} 1 = 1$, on a bien $\| \hat{\varphi} \| = 1$.

4.2. Lemme .

Le semi-groupe $\{\hat{\varphi}^n \; ; \; n \in Z^+\}$ est équicontinu.

En effet $\| \hat{\varphi}^n \| \leq \| \hat{\varphi} \|^n = 1$. Puisque $\hat{\varphi}^n 1 = 1$ on a bien $\| \hat{\varphi}^n \| = 1$.

Si $f \in C(M)$ nous définissons $f_n \in C(M)$, $n \in Z^+$, par
$f_n(m) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\varphi}^k f(m)$.

4.3. Lemme .

La famille $\{f_n \; ; \; n \in Z^+\}$ est uniformément bornée dans $C(M)$.

En effet, d'après 4.2. $\| f_n \| \leq n^{-1} \sum_0^{n-1} \| \hat{\varphi}^k f \| \leq \| f \|$.

Les lemmes qui suivent visent à montrer que la famille f_n est uniformément équicontinue .

4.4. Lemme .

Pour tout $n \in Z^+$ on a $\hat{\varphi}^n = \widehat{\varphi^n}$.

C'est évident si $n = 1$, supposons-le pour $n = k$. On a

$$(\hat{\varphi}^{k+1} f)(m) = (\hat{\varphi}(\hat{\varphi}^k f))(m) = \sum_{p \in \varphi^{-1} m} \frac{(\hat{\varphi}^k f)(p)}{J_\varphi(p)} \ .$$

Mais

$$(\hat{\varphi}^k f)(p) = (\widehat{\varphi^k} f)(p) = \sum_{q \in \varphi^{-k} p} \frac{f(q)}{J_{\varphi^k}(q)} \quad \text{et} \quad J_{\varphi^{k+1}}(q) = J_{\varphi^k}(q) J_\varphi(\varphi^k q) \ ,$$

par suite

$$(\hat{\varphi}^{k+1} f)(m) = \sum_{p \in \varphi^{-1} m} \frac{1}{J_\varphi(p)} \sum_{q \in \varphi^{-k} p} \frac{f(q)}{J_{\varphi^k}(q)} =$$

$$\sum_{q \in \varphi^{-k-1} m} \frac{f(q)}{J_\varphi(\varphi^k q) J_{\varphi^k}(q)} = \sum_{q \in \varphi^{-k-1} m} \frac{f(q)}{J_{\varphi^{k+1}}(q)} = (\widehat{\varphi^{k+1}} f)(m) \ .$$

4.5. Lemme .

Si f est différentiable la famille $\{f_n \ ; \ n \in Z^+\}$ est uniformément lipschitzienne .

Il suffit de montrer que la famille $\{\hat{\varphi}^n f \ ; \ n \in Z^+\}$, c'est-à-dire $\{\widehat{\varphi^n} f \ ; \ n \in Z^+\}$, est uniformément lipschitzienne .

Introduisons d'abord une notation : si $x = \varphi^r z$, $r \in Z^+$, $x, z \in M$, φ^r définit un difféomorphisme d'un voisinage de z sur un voisinage de x . La différentielle en x du difféomorphisme inverse sera notée $D\varphi^{-r}(x,z)$.

Ceci posé le théorème de dérivation des applications composées donne $D\widehat{\varphi^n} f(x) = A - B$, où

$$A = \sum_{p \in \varphi^{-n} x} \left[\frac{Df(p)}{J_{\varphi^n}(p)} \right] \circ D\varphi^{-n}(x,p) \ ,$$

$$B = \sum_{p \in \varphi^{-n} x} f(p) \frac{D J_{\varphi^n}(p)}{[J_{\varphi^n}(p)]^2} \circ D\varphi^{-n}(x,p) \ .$$

Majorons $\|A\|$. D'après (2.1) $\|D\varphi^{-n}(x,p)\| \leq c^{-1}.\lambda^{-n}$ et, puisque φ conserve μ, on a $\sum_{p\in\varphi^{-n}x} J_{\varphi^n}(p)^{-1} = 1$, par suite

$$\|A\| \leq c^{-1} \lambda^{-n} \sup_{y\in M} \|Df(y)\| .$$

Majorons $\|B\|$. Puisque $J_{\varphi^n}(p) = J_\varphi(p) \ldots J_\varphi(\varphi^{n-1}p)$, B s'écrit

$$B = \sum_{p\in\varphi^{-n}x} \frac{f(p)}{J_{\varphi^n}(p)} \left[\frac{D J_\varphi(p)}{J_\varphi(p)} + \ldots + \frac{D J_\varphi(\varphi^{n-1}p)}{J_\varphi(\varphi^{n-1}p)} \circ D\varphi^{n-1}(p) \right] \circ D\varphi^{-n}(x,p) ,$$

c'est-à-dire encore

$$\sum_{p\in\varphi^{-n}x} \frac{f(p)}{J_{\varphi^n}(p)} \left[\frac{D J_\varphi(p)}{J_\varphi(p)} \circ D\varphi^{-n}(x,p) + \ldots + \frac{D J_\varphi(\varphi^{n-1}p)}{J_\varphi(\varphi^{n-1}p)} \circ D\varphi^{-1}(x,\varphi^{n-1}p) \right] .$$

En tenant compte de $\|D\varphi^{-r}(x,\varphi^{n-r}p)\| \leq c^{-1}.\lambda^{-r}$ et de $\sum_{p\in\varphi^{-n}x} J_{\varphi^n}(p)^{-1} = 1$ on tire

$$\|B\| \leq \|f\| \sup_{y\in M} \left\| \frac{D J_\varphi(y)}{J_\varphi(y)} \right\| . c^{-1}(\lambda^{-n} + \ldots + \lambda^{-1}) .$$

Puisque $\lambda > 1$ on a $\|B\| \leq K \|f\|$ pour tout $n \in Z^+$, où $K = c^{-1}(\lambda-1)^{-1}.\sup_{y\in M} \|D \operatorname{Log} J_\varphi(y)\|$.

En résumé $\|D \hat{\varphi}^n f(x)\| \leq c^{-1} \lambda^{-n} . \sup_M \|Df(y)\| + K\|f\| \leq c^{-1}.\sup_M \|Df(y)\| + K\|f\|$ pour tout $n \in Z^+$. Le lemme résulte alors du théorème des accroissements finis.

4.6. Lemme.

Si $f \in C(M)$ la famille $\{f_n ; n \in Z^+\}$ est uniformément équicontinue.

Soient $f \in C(M)$ et $\epsilon > 0$. Il existe une fonction h différentiable telle que $\|f - h\| < \epsilon$. Le lemme 4.3. entraîne donc $\|f_n - h_n\| = \|(f - h)_n\| < \epsilon$. D'autre part le lemme 4.5. montre qu'il existe une constante L telle que

$|h_n(x) - h_n(y)| \leq L\, d(x,y)$ pour tout $n \in Z^+$ et tous $x,y \in M$. Si $d(x,y) < \eta = \epsilon L^{-1}$ on a donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - h_n(x)| + |h_n(x) - h_n(y)| + |h_n(y) - f_n(y)| \leq 3\epsilon$ pour tout $n \in Z^+$.

4.7. Lemme.

Si $f \in C(M)$, la suite f_n converge uniformément vers une fonction invariante par $\hat{\varphi}$.

L'opérateur $\hat{\varphi}$ de l'espace de Banach $C(M)$ est linéaire et continu (lemme 4.1.). La famille $\{\hat{\varphi}^n ; n \in Z^+\}$ est équicontinue (lemme 4.2.). La famille $\{f_n ; n \in Z^+\}$ est uniformément bornée (lemme 4.3.) et uniformément équicontinue (lemme 4.6.), le théorème d'Ascoli permet donc d'en extraire une sous suite qui converge uniformément vers une fonction $\tilde{f} \in C(M)$. Le lemme résulte alors du théorème ergodique de Yosida (voir [6], p. 213).

Nous allons montrer que $\tilde{f}$ est constante et égale à $\mu(f)$.

4.8. Lemme.

A tout arc $\gamma : [0,1] \to M$ et à tout $k \in Z^+$ correspond un arc $\gamma_k : [0,1] \to M$ tel que $\varphi^k \gamma_k = \gamma$.

En effet, l'application φ est un difféomorphisme local (3.1.).

4.9. Lemme.

Toute fonction $h \in C(M)$ invariante par $\hat{\varphi}$ est une constante.

On peut supposer h à valeurs réelles. Puisque M est compacte h atteint son maximum α en a et son minimum β en b.

Puisque M est connexe il existe un arc $\gamma = \overset{\frown}{ab}$. Soit $\gamma_k = \overset{\frown}{a_k b_k}$ l'arc du lemme précédent. Puisque $\hat{\varphi} h = h$ on a

$$h(a) = (\hat{\varphi}^k h)(a) = \sum_{p \in \varphi^{-k} a} \frac{h(p)}{J_{\varphi^k}(p)} .$$

Mais $h(p) \leq h(a)$ et $\sum_{p\in\varphi^{-k}a} J_{\varphi^k}(p)^{-1} = 1$, par suite $h(p) = h(a) = \alpha$ pour tout $p \in \varphi^{-k}a$. En particulier $h(a_k) = \alpha$. De même $h(b_k) = \beta$. D'autre part le lemme 3.4. entraîne $d(a_k,b_k) \leq \ell(\gamma_k) \leq c^{-1}\lambda^{-k}\ell(\gamma)$.

Enfin, l'uniforme continuité de h montre qu'à $\epsilon > 0$ correspond $\delta > 0$ tel que si $d(u,v) < \delta$, alors $|h(u)-h(v)| < \epsilon$. Prenons k assez grand pour que $c^{-1}\lambda^{-k}\ell(\gamma) < \delta$, on a donc $|\beta-\alpha| = |h(b_k)-h(a_k)| < \epsilon$. L'arbitraire de ϵ entraîne $\beta = \alpha$ et h = constante.

4.10. <u>Lemme</u>.

<u>Si</u> $f \in C(M)$, <u>la suite</u> f_n <u>converge uniformément vers</u> $\mu(f)$.

D'après 4.7. f_n converge uniformément vers une fonction continue $\tilde{f}$ invariante par $\hat{\varphi}$, qui est constante d'après 4.9.. Mais

$$\tilde{f} = \int_M \lim_{n=\infty} f_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n=\infty} \int_M f_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n=\infty} n^{-1} \sum_0^{n-1} \int_M \hat{\varphi}^k f(x)\, d\mu(x) .$$

D'autre part, la formule du changement de variable et l'invariance de μ entraînent $\int_M \hat{\varphi}^k f(x)\, d\mu(x) = \int_M f(x)\, d\mu(x) = \mu(f)$. Ainsi $\tilde{f} = \mu(f)$.

4.11. <u>Lemme</u>.

<u>Si</u> $f \in C(M)$, <u>la suite</u> $\{\hat{\varphi}^n f \,;\, n \in Z^+\}$ <u>converge uniformément vers</u> $\mu(f)$.

Nous supposerons, sans nuire à la généralité, f à valeurs réelles et $\mu(f) = 0$. D'après le lemme 3.3. $\varphi \times \varphi$ est un endomorphisme dilatant de $M \times M$, qui laisse $\mu \times \mu$ invariante. On peut donc lui appliquer le lemme 4.10. avec la fonction $F : (x,y) \rightsquigarrow f(x).f(y)$. Ainsi $n^{-1}[f(x)f(y) +\ldots+ ((\widehat{\varphi \times \varphi})^{n-1} f \times f)(x,y)]$ converge uniformément vers $(\mu \times \mu)(F) = [\mu(f)]^2 = 0$ sur $M \times M$. Mais on vérifie immédiatement que $((\widehat{\varphi \times \varphi})^k f \times f)(x,y) = \hat{\varphi}^k f(x) . \hat{\varphi}^k f(y)$. Ainsi $n^{-1}[f(x).f(y)+\ldots+\hat{\varphi}^{n-1} f(x).\hat{\varphi}^{n-1} f(y)]$

converge uniformément vers zéro sur $M \times M$. En particulier $n^{-1}[f^2+\dots+(\hat{\varphi}^{n-1}f)^2]$ converge uniformément vers zéro sur M .

Ceci posé donnons-nous $\epsilon > 0$; l'uniforme continuité de la famille $\{\hat{\varphi}^n f ; n \in Z^+\}$ (lemme 4.6.) entraîne l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $d(u,v)<\delta$ implique $|\hat{\varphi}^k f(u) - \hat{\varphi}^k f(v)| < \epsilon$ pour tout $k \in Z^+$. Soit $\{x_1 ,\dots, x_N\}$ un δ-net de l'espace compact M ; si x_j est l'un de ses points il existe un sous-ensemble $J_{\epsilon,j} \subset Z^+$ de densité nulle et un $N_{\epsilon,j} > 0$ tels que $n > N_{\epsilon,j}$ et $n \notin J_{\epsilon,j}$ impliquent $|\hat{\varphi}^n f(x_j)| < \epsilon$. Posons $J_\epsilon = J_{\epsilon,1} \cup \dots \cup J_{\epsilon,N}$ et $N_\epsilon = \max\{N_{\epsilon,1} ,\dots, N_{\epsilon,N}\}$. L'ensemble J_ϵ est de densité nulle et si $y \in M$ il existe un x_j du δ-net tel que $d(y,x_j) < \delta$. Ainsi, si $n > N_\epsilon$, $n \notin J_\epsilon$, on a $|\hat{\varphi}^n f(y)| \leq |\hat{\varphi}^n f(y) - \hat{\varphi}^n f(x_j)| + |\hat{\varphi}^n f(x_j)| \leq 2\epsilon$ pour tout $y \in M$, c'est-à-dire $\|\hat{\varphi}^n f\| < 2\epsilon$. Il existe donc une suite extraite de $\{\|\hat{\varphi}^n f\| ; n \in Z^+\}$ qui converge uniformément vers zéro. Mais la suite $\|\hat{\varphi}^n f\|$ est décroissante (lemme 4.1.) , par conséquent $\lim_{n=\infty} \|\hat{\varphi}^n f\| = 0$.

5 . PROPRIETES SPECTRALES DE φ .

Nous désignerons par L_2 l'espace de Hilbert des fonctions $f : M \to C$ de carré μ-sommable. Le produit scalaire de $f,g \in L_2$ sera noté $< f,g >$. L'endomorphisme φ préserve μ , il définit donc une isométrie Φ de L_2 par $\Phi f(x) = f(\varphi x)$. L'adjoint de Φ est Φ^* .

5.1. Lemme .

Si $f,g \in C(M)$, alors $\hat{\varphi}(f.\Phi g) = \hat{\varphi} f.g$.

En effet $\hat{\varphi}(f.\Phi g)(x) = \sum_{p\in\varphi^{-1}x} \dfrac{f(p)\Phi g(p)}{J_\varphi(p)} = \sum_{p\in\varphi^{-1}x} \dfrac{f(p)g(\varphi p)}{J_\varphi(p)} = \hat{\varphi} f(x).g(x)$.

5.2. Lemme .

$\hat{\varphi}$ est la restriction de Φ^* à $C(M)$.

Soient $f,g \in C(M)$ et $\bar{g}$ la conjuguée de g . D'après 5.1. $<\hat{\varphi} f,g> = <\hat{\varphi} f.\bar{g},1> = <\hat{\varphi}(f.\Phi\bar{g}),1>$. Mais μ est invariante par $\hat{\varphi}$ (lemme 4.7.) , ainsi $<\hat{\varphi} f.g,1> = <f.\Phi\bar{g},1> = <f,\Phi g> = <\Phi^*f,g>$. Puisque g est arbitraire et $C(M)$ dense dans L_2 , on a bien $\hat{\varphi}f = \Phi^*f$ pour tout $f \in C(M)$.

5.3. Définition (ROHLIN [3]) .

Soient $\hat{1}$ la σ-algèbre des ensembles μ-mesurables de M , $\hat{0}$ la sous-algèbre triviale $\{M,\emptyset\}$. L'endomorphisme $\varphi : M \to M$ est exact si $\bigcap_{n\geq 0} \varphi^{-n}\hat{1} = \hat{0}$.

ROHLIN a montré que l'exactitude équivaut à $\bigcap_{n\geq 0} \Phi^n L_2 = C$ (espace des fonctions constantes) et qu'elle implique le mélange fort et l'ergodicité .

5.4. Théorème .

(M,μ,φ) est exact .

Si $h \in \bigcap_{n\geq 0} \Phi^n L_2$, à tout $n \in Z^+$ correspond $h_n \in L_2$ telle que $h = \Phi^n h_n$. Soit $f \in C(M)$, $\mu(f) = 0$. Alors, d'après 5.2. ,

$$|<f,h>| = |<f,\Phi^n h_n>| = |<\hat{\varphi}^n f, h_n>| \leq \|\varphi^n f\|_2 \cdot \|h_n\|_2 .$$

Puisque Φ est une isométrie , $\|h\|_2 = \|\Phi^n h_n\|_2 = \|h_n\|_2$. D'après 4.11. , $\lim_{n=\infty} \hat{\varphi}^n f = \mu(f) = 0$. Par suite $<f,h> = 0$ pour tout $f \in C(M)$ telle que $u(f) = 0$. La densité de $C(M)$ dans L_2 entraîne le théorème .

5.5. Corollaire .

Les endomorphismes dilatants sont tous de même type spectral. Voir [3] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. AVEZ .- C.R. Acad. Sci. Paris, t. 266, pp. 610-612 (1968) .

[2] P.R. HALMOS .- Lectures on ergodic theory, Chelsea, N.Y. .

[3] V.A. ROHLIN .- Amer. Math. Soc. Transl., 2, n° 39, pp. 1-36 (1964) .

[4] M. SHUB .- Thèse, Berkeley, 1967 .

[5] S. SMALE .- Bull. Amer. Math. Soc., 6, n° 73, pp. 791-792 (1967) .

[6] K. YOSIDA .- Functional Analysis, Springer, 1966 .

---oo0oo---