Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

Pierre Lelong

Résultats récents sur les propriétés métriques des ensembles analytiques complexes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 19
« Conférences de : P. Lelong, A. Lichnerowicz, E. Lieb et C. Stanojevic », , exp. n° 1, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__19__A1_0>

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES ENSEMBLES ANALYTIQUES COMPLEXES

par Pierre LELONG (Paris)

---

1. Introduction. Cet exposé complète celui que nous avons donné [8, b] ici-même en 1966, et qui figure au volume 2 de la RCP 25. Certaines conjectures que nous avions énoncées à cette occasion ont été le point de départ de travaux récents, notamment de King [7, 1971], Harvey et King [5, 1972], et tout récemment de Siu [11, 1973]. Une propriété métrique simple caractérise les ensembles analytiques ; ils sont les supports de courants positifs fermés, pour lesquels le nombre $\nu(x)$ défini dans [8, a] est un entier. On résumera ici ces résultats. D'autres progrès dus notamment à H.Skoda [12, a et b, 1972] ont été faits dans l'étude "à croissance" des idéaux de fonctions analytiques et dans celle des fonctions entières dont les zéros communs déterminent un ensemble analytique donné dans C^n. De tels résultats font appel aussi aux propriétés des courants positifs fermés. Rappelons que les courants (ou formes différentielles généralisées) ont été introduits par G.de Rham [9] ; ce sont par définition les formes linéaires continues sur l'espace des formes différentielles (C^∞) à support compact (de même que les distributions le sont sur les fonctions.

Le fait que les ensembles analytiques complexes sont les supports de courants positifs fermés résulte de [8a] où l'on a défini cette classe de courants et montré que l'intégration d'une forme différentielle φ sur un ensemble analytique M est un tel opérateur $t[M](\varphi) = \int_M \varphi$. La positivité dont il s'agit ici (voir plus loin) est liée au fait que l'orientation de l'espace complexe induit une orientation sur les variétés analytiques complexes ; la propriété de $t[M]$ d'être fermé est liée à la rareté relative des points au voisinage desquels M n'est pas une variété.

L'application $M \longrightarrow t[M]$ donnée par le courant d'intégration identifie les ensembles analytiques complexes à une sous-classe des courants positifs fermés. Elle fait bénéficier l'étude des ensembles analytiques, en particulier leur étude globale et les études "à croissance", des techniques de l'analyse. Par exemple on régularisera au besoin le courant $t[M]$ par un produit de convolution : on sort ainsi de la classe des ensembles analytiques, mais non de celle des courants positifs fermés (précisons que l'ensemble de ces derniers est conservé par un homomorphisme analytique complexe). Les résultats obtenus depuis 1966 font appel essentiellement aux propriétés des courants positifs fermés et à des estimations de géométrie intégrale. De plus dans les problèmes à croissance le théorème de Hörmander sous la version de E.Bombieri [2] joue actuellement un rôle essentiel.

L'étude métrique et notamment l'étude à croissance des ensembles analytiques complexe est-elle utile à la Physique ? L'analytique complexe conserve une place importante dans diverses théories : l'intérêt porté à la transformée de Fourier-Laplace, entre autres, vient de ce qu'elle transpose dans l'analytique complexe des problèmes d'analyse fonctionnelle. Mais on demande alors à l'analytique complexe de fournir plus que des théorèmes d'existence et de donner des majorations, c'est-à-dire la possibilité d'une étude à croissance.

2. Ensembles analytiques complexes. Renvoyant le lecteur à l'exposé [8, b] de 1966, on rappelle seulement l'essentiel, en précisant les notations. On se placera dans un domaine G de C^n ou (avec des modifications évidentes) sur une variété analytique complexe G, recouverte par une famille dénombrable de cartes relativement compactes.

Une partie M de G est appelée un ensemble analytique complexe si a) M est fermé - b) tout $x \in M$ possède un voisinage U_x tel que $M \cap U_x$ soit l'ensemble des zéros communs à des fonctions $f_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant N$,

$z = (z_1, \ldots, z_n)$ les f_j étant analytiques dans U_x. La dimension de M en x , $\dim_x M$, est par définition n - p, si p est le plus petit nombre d'équations linéaires $\alpha_s = \sum a_s^k (z_k - x_k) = 0$ telles que x soit point isolé de l'ensemble analytique $f_j = 0$, $\alpha_s = 0$. Si $\dim_x M$ est constant sur M, on dit que M est de dimension pure. Dans le cas général on pose $\dim M = \sup \dim_x M$ pour $x \in M$. Un point $x \in M$ est dit ordinaire si au voisinage de x, M est une variété analytique analytiquement plongée dans C^n. Un ensemble analytique dans G, admet une décomposition $M = \cup M_i$, finie sur tout compact de G, les M_i étant globalement irréductibles dans G ; les M_i sont de dimension pure et $\overset{\circ}{M}_i$ ensemble des points ordinaires de M_i est une variété analytiquement connexe. L'ensemble $M_i' = M_i - \overset{\circ}{M}_i$ est un ensemble analytique de dimension strictement inférieure à dim M.

La définition d'un ensemble analytique est peu maniable ; dans certains cas on peut définir M globalement dans G par des équations $f_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant N$, les f_j étant holomorphes dans G. On le pourra toujours avec $N \leqslant n + 1$, si G est une variété de Stein. Mais même dans ce cas, il n'existe pas de relation simple entre N et dim M, mis à part le cas N = 1 , où M est de codimension 1. C'est donc par une autre voie qu'on abordera l'étude métrique des ensembles analytiques. On utilisera la possibilité d'intégrer une forme différentielle φ sur un ensemble analytique M et l'opérateur

$$t(\varphi) = \int_M \varphi \tag{1}$$

On peut se limiter au cas où M est irréductible dans G, donc de dimension pure p, $0 \leqslant p < n$. Alors l'intégration sur M est un courant homogène. On le note $t[M]$; il est continu d'ordre zéro et se prolonge aux formes différentielles à coefficients continus, à support compact. Les coefficients de t sont associés non à des distributions générales, mais à des mesures de Radon complexes.

On rappellera d'abord quelques définitions déjà données dans [8, b] et pour lesquelles on renvoie le lecteur à l'ouvrage [8, c]. Les notions qui suivent sont locales et définies à partir des coordonnées locales sur chaque carte, G étant une variété analytique complexe.

3. <u>Courants positifs.</u> On appelle courant dans G un opérateur linéaire $t(\varphi)$ sur l'espace $\mathcal{D}(G)$ des formes différentielles φ, qui sont (C^∞) et à support compact.

La topologie sur $\mathcal{D}(G)$ est celle de la limite inductive

$$\mathcal{D}(G) = \varinjlim \mathcal{D}(K_q)$$

pour une suite exhaustive K_q, $K_q \subset \overset{\circ}{K}_{q+1}$, de compacts croissants et tendant vers G ; $\mathcal{D}(K_q)$ est l'espace de Fréchet des formes (C^∞), dont le support est dans le compact K_q ; $\mathcal{D}(K_q)$ est muni des semi-normes $p_\alpha(\varphi) = \sup \left| D^{(\alpha)} \varphi_{(i),(j)}(x) \right|$, pour $x \in K_q$, et $\varphi_{(i),(j)}$ parcourant les coefficients de φ ; (α) est un multi-indice de dérivation (par rapport aux coordonnées complexes z_i, $\bar{z}_k$ sur chaque carte de G). Dans la suite on se place dans un domaine G de C^n pour la simplicité de l'exposé.

Un courant est dit homogène de bidegré $(n-p, n-p)$, s'il est nul sur les formes homogènes qui ne sont pas du type p, p ; <u>il sera dit aussi de dimension complexe</u> p ; un tel courant peut être représenté par une forme différentielle homogène de type $(n-p, n-p)$ dont les coefficients sont des courants de degré 0 et opérent sur les formes $f(x)\,\beta_n$ du degré maximum; $\beta_n = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{i}{2} dz_k \wedge d\bar{z}_k$ est l'élément de volume de C^n ; le produit d'un coefficient par β_n est alors une distribution (au sens de L.Schwartz) -cf. [9].

Un courant sera dit positif si

a) Il est homogène de type (n-p, n-p), c'est-à-dire est un courant de dimension complexe p, $0 < p \leqslant n$.

b) Pour tout système $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de formes linéaires des dz_k, $\alpha_j = \sum_1^n a_j^k \, dz_k$, la distribution

$$T(t,\alpha) = t \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \ldots \quad i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$$

est positive, c'est-à-dire est une mesure positive.

On note $T_p(G)$ l'ensemble des courants positifs dans G de type (n-p, n-p), $\Phi_q(G)$ ceux qui sont des formes continues de type (q, q).

Exemples. 1°/ Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont des formes linéaires des dz_k, $\varphi = i\,\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \ldots \quad i\alpha_s \wedge \bar{\alpha}_s$ est une forme positive $\varphi \in \Phi_s(G)$. Une définition directe pour les formes est la suivante : $\varphi \in \Phi_q(G)$ équivaut au fait que la restriction de φ à tout sous-espace complexe L^q s'écrit: Rest $\varphi = C(\varphi, L^q)\, \beta_q$ où β_q est l'élément de volume de L^q et $C(\varphi, L^q) \geqslant 0$ est une fonction continue positive.

2°/ Soit V plurisousharmonique, d', d" les différentielles relatives aux dz_i (respectivement aux $d\bar{z}_i$). Alors on a $id'd''V \in T_{n-1}(G)$.

Remarque. Il existe une application injective $L^p \longrightarrow \tau(L^p)$ des sous-espaces L^p dans un ensemble de formes positives. On l'obtient en posant

$$\tau(L^p) = (\tfrac{i}{2})^p \quad \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \ldots \wedge \omega_p \wedge \bar{\omega}_p$$

où les ω_s , $1 \leqslant s \leqslant n$ sont des formes linéaires des seuls dz_k, l'application $(dz_i) \longrightarrow (\omega_s)$ étant unitaire dans C^n et telle que les équations $\omega_{p+1} = 0, \ldots \omega_n = 0$ définissent L^p. Alors

Pour qu'un courant t de dimension complexe p soit positif, il faut et il suffit que pour tout sous-espace L^p, la distribution

$$T(t, L^p) = t \wedge \tau(L^p) \quad \langle t, {}^*\tau(L^p) \rangle \beta_n$$

soit une mesure positive ; $\tau(L^p) = {}^*\tau(L^{n-p})$ où L^{n-p} est l'orthogonal de L^p.

Propriétés. 1°/ Les distributions associées aux coefficients d'un courant positif t sont des mesures et t s'étend aux formes à coefficients continus, à support compact (t est continu d'ordre zéro).

2°/ L'ensemble $T_p(G)$ des courants positifs de dimension p dans G est un cône positif saillant, car $c_1 t_1 + c_2 t_2$ est positif si t_1 et t_2 le sont ainsi que les constantes c_1, c_2 ; de plus t et -t positifs entraînent t = 0 .

3°/ L'algèbre des courants positifs possède une propriété fondamentale: soit t un courant positif de type (q, q) et $\varphi \in \Phi_1(G)$, supp une forme positive à coefficients continus. Alors $t \wedge \varphi$ est un courant positif de type (q+1, q+1).

En particulier soit

$$(2) \quad \begin{cases} \beta = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2} d'd'' \|z\|^2 \\ \alpha_a = \frac{i}{2} d'd'' \log \|z - a\| \end{cases}$$

β, β^p sont des formes positives ; $\beta_p = (p!)^{-1} \beta^p$ est l'élément de volume de C^p ; α_a est une forme positive (car $\log \|z\|$ est plurisous-harmonique) définie pour $z \in C^n - \{a\}$; α_a^p est une forme positive pour tout p , $1 \leqslant p \leqslant n$. On a $\alpha_a^n = 0$.

Soit t un courant positif dans G, de dimension complexe p. Alors

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma = t \wedge \beta_p = (p!)^{-1} t \wedge \beta^p & \text{(mesure trace du courant)} \\ \nu_a = \pi^{-p} t \wedge \alpha_a^p \end{cases}$$

sont des courants positifs, donc des mesures positives, d'après le théorème de multiplication . La mesure ν_a est définie dans $C^n - \{a\}$.

Par contre le théorème de multiplication n'est vrai que si l'un des facteurs est de type (1, 1) ou produit de tels facteurs. Soient

$\varphi\in\Phi_p(G)$, $\psi\in\Phi_q(G)$ des formes positives avec $p>1$, $q>1$: $\varphi\wedge\psi$ n'appartient pas en général à $\Phi_{p+q}(G)$ (cf. [15] et [16]).

Remarque. Le théorème de multiplication donne un formalisme algébrique pour construire des mesures, dont la signification "concrète" apparait ensuite dans les "bons" cas.

4°/ Sur $T_p(G)$ on peut considérer les deux topologies fortes et faibles (cf. [8,e]). La topologie forte ou de la norme est définie par

$$\|t\| = \sup |t(\varphi)|$$

pour $\|\varphi\|\leqslant 1$. On note $|\varphi|(x)$ le sup en x des modules $|\varphi_{(i),(j)}(x)|$ des coefficients de φ et $\|\varphi\| = \sup_x |\varphi|(x)$.

On dit qu'un courant t continu d'ordre zéro dans G a pour mesure majorante la mesure positive μ si l'on a pour toute forme φ :

$$|t(\varphi)| \leqslant \mu(|\varphi|) .$$

Un courant t continu d'ordre zéro admet toujours une mesure positive majorante. Si t est un courant positif, $t = \sum t_{(i),(j)} dz^{(i)} \wedge d\bar{z}^{(j)}$, $(i) = i_1 < i_2 \dots < i_{n-p}$, $(j) = j_1 < j_2 < \dots < j_{n-p}$, il existe des coefficients numériques $c_{n,p}$, $c'_{n,p}$ et une mesure majorante proportionnelle à la mesure-trace σ de t, définie en (3), soit

$$\mu = c_{n,p}\,\sigma = c'_{n,p}\; i^{n-p}\left[\sum t_{(i),(i)}\right]\beta_n$$

Lorsqu'il s'agit uniquement de courants positifs définis dans un domaine G, on obtient une norme équivalente à (4) en prenant

$$\|t\|_G = \|\sigma\|_G .$$

Les ensembles fortement bornés de courants positifs sont donc ceux pour lesquels la mesure trace σ est bornée sur tout compact.

4. Courants positifs fermés. Un courant t est dit fermé si $bt = 0$, bt étant défini par $bt(\varphi) = t(d\varphi)$. Les courants positifs fermés de dimension p dans G forment un cône convexe saillant $T_{p,f}(G)$.

Une propriété essentielle est la suivante (cf. [8,a] et [8,c]).

Soient deux boules fermées $B(a, r_2)$ et $B(a, r_1)$, $r_1 < r_2$, de centre a, $\sigma(a, r)$ la mesure portée par la boule fermée $B(a, r)$ et $\nu(a, r_1, r_2)$ la mesure ν_a définie en (3) portée par l'ensemble $r_1 < \|z-a\| \leq r_2$.

On a par la formule de Stokes

$$\nu(a, r_1, r_2) = \frac{\sigma(a, r_2)}{\tau_p\, r_2^{2p}} - \frac{\sigma(a, r_1)}{\tau_p\, r_1^{2p}} \geq 0$$

où τ_p désigne la mesure de la boule unité dans R^{2p} et vaut $\frac{\pi^p}{p!}$.

Conséquences. a/ $r^{-2p}\,\sigma(a, r)$ est fonction croissante de r.

b/ La limite $\nu(a) = \lim\limits_{r=0} \frac{\sigma(a, r)}{\tau_p r^{2p}}$ existe. Cette limite s'interprète aisément. Soit $\delta(a)$ la mesure de Dirac au point a ; considérons la mesure ponctuelle $\nu(a)\,\delta(a)$ et prolongeons ν de $C^n - \{a\}$ à C^n en ajoutant la mesure ainsi constituée. Alors on a

$$(4) \qquad \nu(a, r) = \nu(a) + \int_{0 < \|z-a\| \leq r} \nu = \frac{\sigma(a, r)}{\tau_p r^{2p}}.$$

Donc

PROPOSITION 1. - Si t est positif fermé de dimension complexe p, $0 \leq p \leq n$, la mesure ν_a définie par (3), se prolonge à C^n par l'addition de $\nu(a)\,\delta(a)$ en a, de manière qu'on ait (4).

Le nombre $\nu(a)$ qu'on a défini ainsi dans [8,a] est appelé parfois "Lelong number" du courant t au point a du support de t ; il jouera un rôle important dans la suite.

Le résultat rappelé dans l'introduction s'énonce alors :

PROPOSITION 2. - Si φ est une forme à coefficients continus à support compact dans G, et M un ensemble analytique dans G de dimension pure p, il existe un opérateur

$$t(\varphi) = \int_M \varphi$$

extension simple de l'intégration sur $\overset{\circ}{M}$; cet opérateur est un courant positif fermé de dimension p. On le désignera par $t[M]$.

L'application $M \to t[M]$ est injective d'après $M = \operatorname{supp} t$.

Un ensemble analytique M étant donné, irréductible, il existe une famille de courants positifs fermés t tels qu'on ait $M = \sup t$; ils sont de la forme $t' = ct[M]$, c constante positive.

PROPOSITION 3. - Si un courant t positif fermé de dimension p est porté par un ensemble analytique M de dimension pure p, il s'écrit

(5) $$t = \sum c_k \; t\left[M^{(k)}\right] , \quad c_k \geqslant 0 ,$$

où les $M^{(k)}$ sont les composantes irréductibles de M dans G (la décomposition est finie sur tout compact).

On appellera cycle analytique dans G une expression $\sum c_k M^{(k)}$ et les $M^{(k)}$ sont des ensembles analytiques irréductibles dans G et t sera dit le courant d'intégration sur le cycle.

5. Propriétés de $\nu(a)$. Tout d'abord pour t et a variables, r fixé, $\sigma(a, r)$ est semi-continu supérieurement de t et de a, l'espace des courants étant muni de la topologie faible (cf. [8, e]).

Dans [8, b] le signataire avait posé la question de caractériser d'après les propriétés de $\nu(x)$ les courants positifs fermés qui sont des courants d'intégration $t[M]$ sur un ensemble analytique complexe. Il avait conjecturé que $\nu(x)$ est entier si $t = t[M]$.

Un premier résultat est le suivant du à P.Thie [14] :

PROPOSITION 4. - Si M est un ensemble analytique, le nombre $\nu(a)$ relatif à $t[M]$ est un entier positif en tout point $a \in M$. On peut supposer M de dimension pure p. Si N est le cône tangent à M en a, N est un ensemble algébrique dont la décomposition en cônes irréductibles donne

$$N = \bigcup N_\lambda , \quad \lambda < 1 \; \ldots , q$$

Soit s_λ = degré N_λ ; il existe au voisinage de a une application holomorphe ψ de M sur N ; le degré de ψ au-dessus de N_λ est un entier constant soit m_λ.

La proposition 4 découle alors de la propriété précise :

(6) $$\nu(a) = \sum_\lambda m_\lambda\, s_\lambda \;.$$

Une démonstration assez simple de ce résultat peut être obtenue de la manière suivante, très intuitive , dont on résume les étapes.

a/ $\sigma(a, r)$ étant fonction semi-continue supérieurement de a, il en est de même de $\nu(a)$, limite décroissante de $\tau_p^{-1} r^{-2p} \sigma(a,r)$ quand $r \to 0$.

b/ En tout point ordinaire de M, $\nu(a) = 1$ (élémentaire)

c/ En conséquence on a $\nu(a) \geqslant 1$ pour tout $a \in M$.

d/ Les courants t positifs fermés pour lesquels on a $\nu(a) \geqslant c > 0$, pour $a \in$ supp t , possèdent la propriété suivante : si $t_n \to t$ (au sens de la topologie faible) , les ensembles A_n = supp t_n ont une limite A = supp t et, on a $\nu(a) \geqslant c$ pour tout $a \in$ supp t .

e/ Soit $\rho > 0$ et soit S_ρ l'homothétie de centre $a \in$ supp t (on suppose que a est l'origine) définie par $z' = \rho z$; l'image $t_\rho = S_\rho\, t$ de t est définie par

$$t_\rho(\varphi) = t\left[S_\rho^* \varphi\right] = t\left[\varphi(\rho\, z_k)\right].$$

D'autre part supp t_ρ a pour limite le cône tangent N en a à M. Dans la boule B(a, r) définie ici par $\|z\| < r$, on a pour la mesure trace $\sigma_\rho(a, r)$ de t_ρ , où $\rho > 0$:

$$\sigma_\rho(a, r) = \int_{\|z'\|<r} t_\rho \wedge \beta_p(dz') = \rho^{2p} \int_{\|z\| \leqslant r\rho^{-1}} t \wedge \beta_p = r^{2p} \frac{\sigma(a, r\rho^{-1})}{(r\rho^{-1})^{2p}} = \tau_p r^{2p} \nu(a, r\rho^{-1})$$

Quand $\rho \to +\infty$, $\sigma_\rho(a, r)$ est borné ; les courants t_ρ sont bornés dans B(a, r) et on peut extraire des t_ρ une suite $t_m = t_{\rho_m}$ qui converge vers un courant porté par N. On a alors $r' = r\rho_m^{-1} \to 0$ et

$$\lim_m \sigma_m(a, r) = \tau_p r^{2p} \lim_{r'=0} \frac{\sigma(a, r')}{\tau_p r'^{2p}} = \nu(a)\, \tau_p r^{2p} = \sigma'(a, r)$$

ou $\sigma'(a, r)$ est l'aire dans B(a, r) d'un cycle analytique $\mathcal{N}$ porté par le cône tangent N ; $\nu(a)$ s'interprète donc comme le nombre ν d'un courant positif fermé de dimension p porté par **N**.

Un tel courant s'écrit

$$t = \sum_{\lambda} m_{\lambda} \; t \left[N_{\lambda} \right] .$$

Le fait que les m_{λ} sont des entiers positifs résulte alors du fait que les $t_{\mathcal{C}}$ eux-mêmes sont des courants d'intégration sur un cycle à coefficients entiers.

6. Caractérisation des ensembles analytiques comme supports de courants positifs fermés. Le résultat suivant a d'abord été établi par J.King [7] et donne une réciproque de la proposition 4.

PROPOSITION 5. - *Si* t *est un courant positif fermé de dimension* p *dans* G *et si pour tout* $x \in \mathrm{supp}\ t$, $\nu(x)$ *est un entier positif, alors* supp t *est un ensemble analytique et* t *a la forme* (5) *avec des* c_k *entiers positifs.*

Parmi les propriétés rencontrées, citons cet énoncé de géométrie différentielle , où G est un ouvert de R^m :

PROPOSITION 6. - *Si* t *est un courant dans* G *avec les propriétés suivantes*

a/ t *et* bt *sont continus d'ordre zéro*

b/ supp t *est contenu dans une variété* W :

Alors il existe un courant t' *dans l'espace* W *tel qu'on ait pour toute* φ *à support compact dans* G

$$t(\varphi) = t' \left[\mathrm{Rest}\ \varphi \right]$$

où Rest φ *est la restriction de* φ *à* W .

La proposition 5 a été immédiatement généralisée (J.King et R.Harvey, [5]) sous la forme suivante :

PROPOSITION 7. - Si t est un courant positif fermé dans G, et si pour tout compact $K \subset G$, il existe une borne inférieure $c(K) > 0$ de $\nu(a)$, $a \in \operatorname{supp} t \cap K$, alors supp t est un ensemble analytique dans G et t a la forme (5) où les c_k sont des nombres positifs.

Ces énoncés montrent que parmi les courants positifs fermés, dans G, ceux dont le support est un ensemble analytique sont caractérisés par la propriété que $\nu(a)$ soit minoré sur tout compact par un nombre strictement positif.

7. Etude des ensembles $\nu(a) \geq c$, $c > 0$, sur le support d'un courant positif fermé.

Un problème plus fin que le précédent est l'étude des ensembles

$$E_c = [x \in \operatorname{supp} t \quad , \quad \nu(x) \geq c, \quad c > 0]$$

sur le support d'un courant positif fermé de dimension p.

Des résultats partiels de E.Bombieri [2] et de H.Skoda [12] , s'appuyant sur un théorème de Hörmander ont d'abord établi que l'ensemble E_c (E_c est fermé) était contenu dans un ensemble analytique. Récemment Siu [11] a établi l'énoncé :

PROPOSITION 8. - Soit t un courant positif fermé de type $(n-p, n-p)$, c'est-à-dire de dimension p sur une variété analytique G de dimension complexe n.

Alors l'ensemble

$$E_c = [x \in \operatorname{supp} t \quad , \quad \nu(x) \geq c \quad , \quad c > 0]$$

est un ensemble analytique de dimension au plus p .

L'ensemble E est donc la réunion (finie sur tout compact) d'ensembles analytiques irréductibles dans G des dimensions 0, 1, ..., p.

Le théorème partiel de Bombieri a déjà reçu des applications à la théorie des nombres. Les théorèmes de structure qu'on vient de donner ont de grandes possibilités d'applications nouvelles et l'on voit réapparaître une méthode assez fréquente en "théorie des fonctions" : les résultats essentiels sont obtenus en travaillant sur des êtres plus généraux, non analytiques, et appliquant "in fine" des crétères d'analyticité comme ceux que donnent les propositions 5, 7 et 8.

Exemple. Par une méthode relativement longue, Remmert et Stein avaient obtenu l'énoncé suivant :

PROPOSITION 9 — (Remmert-Stein) . - Si A est un ensemble analytique de dimension maxima $\leqslant p-1$ dans G et si M est un ensemble analytique de dimension pure p défini dans G-A, alors M se prolonge dans tout G en un ensemble analytique $\tilde{M}$; $\tilde{M}$ est l'adhérence de M et le prolongement est unique.

On obtient une meilleure analyse de cette situation en établissant successivement, (cf. Schiffman [10]).

PROPOSITION 10. - Soit t un courant positif fermé de dimension p dans G - A , où A est un ensemble fermé dont la mesure $\Lambda_{2p-1}(A)$ en dimension 2p-1 est nulle. Alors t se prolonge à travers A en un courant $\tilde{t}$ positif fermé dans G ; $\tilde{t}$ est unique et extension simple de t.

A partir de cette propriété des courants positifs fermés on a d'une manière évidente :

PROPOSITION 11. - Soit A fermé dans G et $\Lambda_{2p-1}(A) = 0$; alors si V est un ensemble analytique complexe de dimension p dans G-A, son adhérence $\bar{V}$ est un ensemble analytique complexe dans G.

En effet le courant d'intégration $t[V]$ se prolonge d'après la proposition 10 en un courant $\tilde{t}$; d'après la semi-continuité supérieure de $\nu(a)$, on a $\nu(a) \geqslant 1$ pour $a \in \operatorname{supp} \tilde{t}$, donc $\bar{V} = \operatorname{supp} \tilde{t}$ est un ensemble analytique d'après la proposition 7. La proposition 9 est alors un cas particulier de la proposition 11. Celle-ci a des applications géométriques nombreuses . Par exemple (Siu):

PROPOSITION 12. - Soit G un espace analytique normal, A un ensemble analytique de codimension ≥ 1 dans G et Ω un ouvert dans G qui coupe chacune des composantes irréductibles de A de codimension 1. Si M est une variété kählérienne compacte, toute application f méromorphe de $(G-A) \cup \Omega$ dans M s'étend en une application $\tilde{f}$ méromorphe de G dans M.

8. Eléments extrémaux. Signalons un point de vue différent donné par l'énoncé suivant :

PROPOSITION 13 (cf. [8, f]). - Les courants positifs fermés de dimension complexe p sur une variété analytique complexe G forment un cône positif saillant $T_{p,f}(G)$: un courant d'intégration $t\,[M]$ sur un ensemble analytique irréductible M détermine une génératrice extrémale $c\,t\,[M]$, $c > 0$, du cône $T_{p,f}(G)$.

Par contre la recherche de tous les éléments extrémaux de $T_{p,f}(G)$ reste à faire en général.

9. Etudes "à croissance" sur les ensembles analytiques.

Un théorème important de l'analyse complexe en dimension un a été le suivant : si $f(z)$ est une fonction entière de $z \in \mathbb{C}$, il existe une relation entre la croissance quand $r \to \infty$ de

$$M(r) = \sup_{\theta} \left| f(re^{i\theta}) \right|$$

et celle du nombre $\nu(r)$ des zéros de $f(z)$ pour lesquels on a $|z| < r$. Par exemple si l'on a $|f(0)| = 1$, on obtient pour tout $k > 1$:

$$\nu(r) \leq C(k) \log M(kr).$$

De même dans un domaine borné. Par exemple si $f(z)$ est analytique dans $|z|<1$ et si $|f(z)|$ est borné, alors les zéros a_n de $f(z)$ dans le cercle unité vérifient $\sum[1-|a_n|]<\infty$ ou encore $\int_0^1 \nu(t)dt<\infty$.

De tels résultats sont importants par leurs applications à l'Analyse fonctionnelle. Une généralisation du premier problème cité est l'étude à croissance dans C^n d'un ensemble analytique de dimension p, $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Le cas classique (1 variable) correspond à $n=1$, $p=0$. Pour poser le problème il faut définir des <u>indicatrices de croissance</u> pour un courant t positif fermé de dimension p dans C^n.

On appellera <u>indicatrice de croissance de</u> t dans C^n la fonction

$$\nu(r) = \int_{0\leqslant\|z\|\leqslant r} \nu = (\tau_p r^{2p})^{-1}\sigma(r)$$

définie d'après (3). On dira que t est d'ordre fini $\rho \geqslant 0$ si

$$\limsup_{u \to +\infty} \frac{\log \nu(u)}{\log u} = \rho < \infty .$$

<u>Cas de la codimension 1 et de l'ordre fini.</u> On suppose n quelconque, $p = n-1$, alors il existe une fonction plurisousharmonique V solution de

(7) $$2id'd''V = t .$$

Les résultats de [8, d] donnent la fonction V par une construction explicite qui permet les majorations ; V est donné par un potentiel

(8) $$k_n\, \sigma_a \times e_n(a, z, q) = I_q(z)$$

où $e_n(a, z, q) = -\|a-z\|^{2-2n} + \|a\|^{2-2n} + \dots + P_q(a,z)$ est formé en retranchant du noyau newtonien $-\|a-z\|^{2-2n}$ de R^{2n} les termes du développement de Taylor à l'origine $z=0$ qui sont de degré $\leqslant q$ des z_j, $\bar z_j$. On choisit pour q le plus petit entier tel que $\int_1^\infty u^{-q-1}\, d\nu(u)<\infty$. D'une manière générale pour $\lambda>0$, la convergence de $\int_1^\infty u^{-\lambda} d\nu(u)$ équivaut à celle de $\int_1^\infty u^{-\lambda-1}\nu(u)du$ et à celle de $\int_1^\infty u^{-\lambda-2p} d\sigma(u)$

Dans ces conditions on a [8, d] :

PROPOSITION 14. - a/ Si t est un courant de dimension $n-1$ dans C^n, d'indicatrice d'ordre fini $\rho \geqslant 0$, le potentiel (8), $I_q(z)$ fournit une fonction plurisousharmonique V_o solution de (7); on suppose $0 \notin \operatorname{supp} t$. Dans (8), k_n vaut $(4\pi^n)^{-1}(n-2)!$. Si $n = 2$, $k_1 = (2\pi)^{-1}$.

b/ On a

$$I_q(z) \leqslant A(n,q)\, r^q \left[\int_0^r \frac{\nu(u)\,du}{u^{q+1}} + r \int_r^{\infty} \frac{\nu(u)\,du}{u^{q+2}} \right]$$

et si l'on pose $M(t) = \sup\limits_{\|z\| = t} I_q(z)$, $M(t)$ et $\nu(t)$ sont du même ordre fini. La comparaison des croissances donne des résultats aussi précis que dans le cas $n = 1$ (ordre, type, classe de convergence de la solution).

c/ En particulier si l'on a $t = t[M]$, M étant un ensemble analytique de codimension 1 (donnée de zéros de Cousin), il existe une fonction entière $F_o(z)$ déterminée par

$$\log F_o(z) = 4\pi \int_0^z d' I_q(\zeta)$$

et $\log |F_o(z)| = 2\pi I_q(z)$; $F_o(z)$ est donc du même ordre de croissance que l'indicatrice $\nu(u)$ du courant $t[M]$. Les résultats atteignent la précision du cas $n=1$ en ce qui concerne le type de l'ordre, la classe de convergence de la solution.

Cas général. Dans le cas général un ensemble analytique M dans C^n peut toujours être représenté (quelle que soit sa dimension p) par $n + 1$ équation $F_j(z) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.

Plusieurs résultats ont été obtenus récemment.

a/ On dispose d'abord d'un résultat négatif. Il existe des fonctions entières $f(z_1,z_2)$, $g(z_1,z_2)$ d'ordre fini et telles que l'ensemble M défini par $f = 0$, $g = 0$ soit composé de points isolés, le nombre $\nu(r)$ de ces points dans $\|z\| < r$ ayant une croissance d'ordre infini (cf. [3]) .

b/ On dispose cependant d'une majoration de caractère statistique (cf. [13]), établie en moyenne par rapport à un paramètre $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in [0, 1]^n$, pour les zéros de la famille

$f_k(\ell_1 z_1, \ell_2 z_2, \ldots, \ell_n z_n) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

c/ Le problème inverse a été étudié récemment par H.SKODA (cf. [12]) . La méthode de Skoda est une méthode de relaxation. Si t est un courant positif fermé,de dimension p, $0 \leqslant p \leqslant n$, on formera une fonction plurisousharmonique V(z) telle que,η étant une fonction dérivable à support compact, égale à 1 au voisinage de z_o, V(z) soit égal au potentiel

$$U_\eta(z) = -\int d\sigma(a)\, \|a-z\|^{-2p}\, \eta(a) \tag{9}$$

augmenté d'une fonction dérivable au voisinage de z_o : le support du courant $\theta = 2id'd''V$ n'est plus nécessairement contenu dans le support de t, mais le support singulier de θ est compris dans supp t . En particulier si l'on donne $t = t[M]$, M étant un ensemble analytique de dimension pure p dans C^n, le <u>support singulier de</u> θ <u>est l'ensemble</u> M (rappelons que le support singulier d'une distribution ou d'un courant est le complémentaire de l'ensemble des points au voisinage desquels ils sont représentables par une fonction ou une forme C^∞); par contre le support de θ dans cette construction est tout C^n, et la méthode donne des résultats moins précis que la précédente (proposition 14) quand celle-ci s'applique ($p = n-1$, ordre fini).

On obtient :

PROPOSITION 15. - <u>Soit</u> t <u>un courant positif fermé de dimension</u> p <u>dans</u> C^n, <u>d'indicatrice</u> $\nu(r)$. <u>Alors il existe une fonction</u> V <u>plurisousharmonique dans</u> C^n <u>telle que,au voisinage de</u> $z_o \in$ supp t,V <u>ne diffère de</u> $U_\eta(z)$ <u>définie par (9) que d'une fonction</u> (C^∞) , V <u>vérifiant l'une (au choix) des majorations où</u> $\varepsilon > 0$, $d > 0$ <u>sont des nombres donnés à l'avance , et où</u> $r = \|z\|$:

a/ $V(z) \leqslant C(\varepsilon) r^2 \sigma(r+\varepsilon)$

b/ $V(z) \leqslant C(\varepsilon)\ \nu(r+\varepsilon r)\ \mathrm{Log}^2 r$

c/ $V(z) \leqslant C(\varepsilon, d)(1+r)^d \int_1^{1+r} t^{-d-1}\, \nu(t+\varepsilon t)\,dt$

d/ Si $0 \notin$ supp t et $\int_0^\infty t^{-2}\, \nu(t)\,dt < \infty$,

$$V(z) \leqslant C(\varepsilon)\left[\int_{o}^{r+\varepsilon} t^{-1}\,\nu(t)dt + (r+\varepsilon)\int_{r+\varepsilon}^{\infty} t^{-2}\nu(t)dt\right]$$

$C(\varepsilon)$ désigne une constante dépendant de ε, η , et de t.

Dans le cas particulier $t = t\,[M]$ on construit une représentation de M sous la forme $F_j(z) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, à partir de la fonction plurisousharmonique V en utilisant le résultat suivant du à Hörmander et Bombieri [2] .

PROPOSITION 16. - Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de C^n (éventuellement C^n lui-même) et V une fonction plurisousharmonique dans Ω, $z_o \in \Omega$ un point au voisinage duquel e^{-V} est sommable. Alors il existe une fonction F holomorphe dans Ω vérifiant $F(z_o) = 1$ et :

$$\int |F(z)|^2 \exp\left[-V(z)\right](1 + \|z\|^2)^{-n-2}\,\beta_n < \infty . \tag{10}$$

Une conséquence de cet énoncé est : si $V(\zeta) = -\infty$ et si le nombre $\nu(\zeta)$ relatif au courant $\Theta = 2id'd''V$ surpasse une certaine valeur $c_1 > 0$, dépendant de n,p, la convergence de (10) entraîne $F(\zeta) = 0$ et ζ appartient à l'ensemble analytique $F(z) = 0$.

On construit ainsi de proche en proche les fonctions entières $F_1, \dots, F_{n+1}$ telles que $M = \left[z \in C^n,\ F_j(z) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n+1\right]$.
On choisit F_s de manière à éliminer de l'ensemble défini par $F_1=0, \dots F_{s-1}=0$ les composantes étrangères à M de codimension s .

PROPOSITION 17. - Soit M un ensemble analytique de dimension pure p, $0 \leqslant p \leqslant n-1$ dans C^n, d'indicatrice de croissance $\nu(r)$. Il existe n+1 fonctions entières $F_1(z), \dots, F_{n+1}(z)$ telles que M soit exactement l'ensemble des zéros communs aux $F_j(z)$; les $F_j(z)$ peuvent être choisis de manière que les $V_j(z) = \log |F_j(z)|$ vérifient (au choix) l'une des majorations a/, b/, c/, d/ de la proposition 15.

En particulier si $\nu(t)$ est borné, il résulte de d/ que les F_j sont des polynomes : les ensembles analytiques d'indicatrice $\nu(r)$ bornée dans C^n sont des ensembles algébriques.

Remarque. Visiblement les derniers travaux publiés s'efforcent, malgré le résultat négatif indiqué plus haut, d'établir un théorème de Bezout transcendant, et de donner avec des hypothèses additionnelles, une majoration des zéros communs à des fonctions entières $f_k(z_1, \ldots, z_n)$ à partir d'une majoration de la croissance des f_k, en y adjoignant des hypothèses supplémentaires..

A ce propos rappeler le théorème de Picard **relatif au cas** $n = 1$: une fonction méromorphe $g(z) : C \longrightarrow \overline{C}$ qui ne prend jamais 3 valeurs a, b, c données est une constante. Un mémoire de L.Ahlfors (Acta Mathematica 1935) avait bien mis en lumière l'origine topologique de tels résultats en montrant que le théorème de Picard est vrai pour des applications du plan complexe C sur la sphère de Riemann $\overline{C}$ qui sont "voisines" des applications analytiques et provient de ce que de telles applications, de degré infini, conservent "en moyenne" la caractéristique (égale à 2) d'Enler-Poincaré. D'où des résultats comme celui de Nevanlinna, $\sum d(a_k) \leqslant 2$, pour une définition convenable du défaut $d(a)$, résultats étendant considérablement le théorème de Picard.

Par contre les études actuelles n'ont pas encore mis en évidence un invariant "en moyenne" des applications analytiques complexes $f : C^n \longrightarrow C^n$ ou $C^n \longrightarrow C^p$ de degré infini et les études récentes dans cette direction (par exemple 4b) ont un caractère exploratoire.

Les résultats qu'on a résumés ici, permettent en quelque sorte d'accéder à l'étude métrique des ensembles analytiques ; ils semblent conduire à des développements nouveaux dans ce domaine qu'on appelle aujourd'hui la géométrie analytique par comparaison avec la géométrie algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (E.). - Conditions for the analyticity of certain sets. Michigan Math. J. , p. 289-304, 1964.

[2] BOMBIERI (E.). - Algebraic values of meromorphic maps. Inv. Math. t. 10, p. 267-268, 1970 et t. 11, p. 163-166, 1970.

[3] CORNALBA (M.) et SHIFFMAN (B.). - A counterexample to the "Transcendental Bezout Problem", Ann. of Math., 96, p. 402-406, 1972.

[4] a/ GRIFFITHS (P.-A.). - On the Bezout problem for analytic sets (preprint).

b/ GRIFFITHS (P.-A.) et KING (J.). - Nevanlenna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties (preprint).

[5] HARVEY (F.-R.) et KING (J.). - On the structure of positiv currents, Inventiones Math., t. 15, p. 47-52, 1972.

[6] HARVEY (F.-R.). - A result on extending positiv currents (à paraître dans Rice University Studies).

[7] KING (J.). - The currents defined by analytic varieties. Acta Math., t. 127, p. 184-220, 1971.

[8] LELONG (P.). - a/ Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math.de France, t. 85, p. 239-262, 1957.

b/ Propriétés métriques des ensembles analytiques complexes, Séminaire P.Lelong, 6e année, 1965-1966, n° 2, Paris, Institut Henri Poincaré, 1966 et R.C.P. 25,vol. 2.

c/ Plurisubharmonic functions and positiv differential forms, Gordon and Breach édit., New-York, 1967 , édition française Dunod.

d/ Notes aux C.R.Ac.Sci.Paris, t. 237, p. 691-693, p. 865-867 et p. 1379, 1953 et "Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n", J.Anal.,Jérusalem, t. 12, p. 365-406, 1964.

e/ Topologies sur les courants positifs fermés. Séminaire Pierre Lelong, Lecture-Notes Springer n° 275, p. 27-68, 1971.

f/ Eléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés. A paraître Séminaire Pierre Lelong, Lecture-Notes Springer n° 332, 1972.

[9] de RHAM (G.). - Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1960.

[10] SCHIFFMAN (B.). - On the removal of singularities of analytic sets. Mich. Math. J. , t. 15, p. 111-120, 1968.

[11] SIU . - Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of meromorphic maps (preprint).

[12] SKODA (H.). a/ Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans C^n, Bull. Soc. Math.de France, t. 100, p. 353-408, 1972.

b/ Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, à paraître Ann. E.N.S., 1973.

[13] STOLL (W.). - A Bezout estimate for complete intersections (to appear in Ann. of Math.).

[14] THIE (P.). - The Lelong number in a point of a complex analytic set Math. Ann., t. 172, p. 269-312, 1967.

[15] BELFORD (E.) et TAYLOR (B.A.). - Simple and positiv vectors in the exterior algebra of C^n - preprint - University of Michigan. Ann. Arbor. Michigan.

[16] HARVEY (R.) et KNAPP (A.W.). - Positive (p,p) forms, Wirtingers inequality, and currents. Proceedings of the Conference on value distribution theory (Université de Tulane, Mars 1973).