Y. Colin de Verdière

Spectre du laplacien

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1974, tome 21
« Conférences de : Y. Colin de Verdière, J. Faraut, D. Iagolnitzer, C. Itzykson, C.V. Stanojevic et W. Thirring », , exp. nº 2, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1974__21__A2_0>

SPECTRE DU LAPLACIEN

par

Y. COLIN de VERDIERE

Nous exposons ici les résultats de travaux récents qui ont été faits sur les relations entre le spectre du laplacien sur une variété riemannienne compacte et le flot géodésique de cette variété. Ici, les variétés ont de la courbure, mais n'ont pas de bord, contrairement au cas étudié par R. Balian et C. Bloch ([11]) où on considérait des ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$. Reprenant ces travaux et utilisant l'équation de la chaleur, j'ai démontré certains résultats dans [14] ; ensuite, indépendamment, J. Chazarain [12] et H. Duistermaat et V. Guillemin ont donné une formulation plus maniable dans le prolongement de l'article de Hörmander sur la fonction spectrale d'un opérateur elliptique [13]. Ils utilisent l'équation des ondes sur la variété dont la théorie des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander [6] et Hörmander-Duistermaat [4] permet de construire une paramétrix de manière très géométrique. Nous exposons ces derniers résultats dans une première partie.

Dans une deuxième partie, nous exposons comment on peut utiliser les relations de quantification de Maslov [15] pour construire des familles asymptotiques de valeurs propres et de quasi-fonctions propres, que nous appelons "quasi-modes" suivant la terminologie d'Arnold [1]. Nous nous inspirons largement de travaux de Lazutkin qui étudie le cas d'un ouvert C^∞ strictement convexe de $\mathbb{R}^2$ [7]. Pour des démonstrations et des détails, nous renvoyons à [10].

I. LA FONCTION SPECTRALE D'UNE VARIETE RIEMANNIENNE.

Soit Δ le laplacien sur une variété riemannienne M compacte que l'on peut définir par exemple en utilisant des coordonnées normales en m par :

$$\Delta f(m) = - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (0) \quad (d = \text{dimension de } M) .$$

Cet opérateur admettant une résolvante compacte et étant auto-adjoint ≥ 0 a une suite de valeurs propres $\lambda_n \geq 0$ croissante et tendant vers $+\infty$, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. On note φ_n une base orthonormée de fonctions propres (C^∞) associées à λ_n et $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$

$$0 = \mu_o < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots -.$$

La "fonction spectrale" de M est $z(\mu) = \sum_{n=o}^{\infty} \delta(\mu-\mu_n)$ (δ = distribution de Dirac), on s'intéresse aussi à sa primitive $Z(\mu) = \# \{\mu_n \leq \mu\}$ et à sa transformée de Fourier $\sigma(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \exp(-it\mu_n)$. On étudie certaines régularisées de z : si $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{\rho} \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ et $\hat{\rho}(0) = 1$; on pose :

$$z_\rho(\mu) = \sum_{n=o}^{\infty} \rho(\mu-\mu_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\mu} \hat{\rho}(t)\sigma(t)dt .$$

La régularisée z_ρ tend vers z dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\hat{\rho}$ tend vers 1 c'est-à-dire à un support de plus en plus grand. Le comportement asymptotique de z_ρ quand $\mu \to \infty$ est commandé par les singularités de σ qui sont dans le support de $\hat{\rho}$. Pour faire une étude fine de z il faut donc étudier les singularités de σ sur toute la droite réelle. On démontre qu'il y a une grosse singularité à l'origine qui est isolée et qui donne un développement asymptotique de type polynômial pour z_ρ si $\hat{\rho}$ à un support assez petit au voisinage de 0 .

A. La singularité en 0 .

Si supp($\hat{\rho}$) assez petit on a :

$$z_o(\mu) \sim \sum_{k=o}^{\infty} c_k(\mu)^{d-1-2k} \quad \text{quand} \quad \mu \to \infty$$

avec $c_o = (2\pi)^{-d} d b_d \operatorname{vol}(M)$ où b_d est le volume de la boule unité euclidienne dans $\mathbb{R}^d$; c_1 est à un facteur numérique près une intégrale sur M de la courbure scalaire et donc quand $d = 2$ à un facteur près égal à la caractéristique d'Euler Poincaré de M . Hörmander a déduit de cette formule le comportement asymptotique de $Z(\mu)$:

$$Z(\mu) = (2\pi)^{-d}\, b_d \operatorname{vol}(M)\, \mu^d + O\,(\mu^{d-1}) .$$

Le reste en 0 est du reste le meilleur possible dans le cas général, à cause du spectre des sphères, par exemple pour S^2 les valeurs propres sont $k(k+1)$ $(k \geq 0 , k \in \mathbb{N})$ avec pour avec pour multiplicité $2k+1$.

On en déduit le comportement suivant qui précise le résultat de H. Weyl :

$$\mu_n = 2\pi \left(\frac{n}{b_d \operatorname{vol}(\mu)}\right)^{1/d} + O(1) .$$

B. Les autres singularités.

Soit $T^*(M)$ le fibré cotangent de M , on désigne par (x,ξ) un point de $T^*(M)$ $(x \in M , \xi \in T^*_x(M))$ et, par $q(x,\xi)$ la norme de ξ ($T_x(M)$ est muni d'une structure euclidienne, car M est riemannienne) et H_q le gradient symplectique (ou hamiltonien) de q :

$$H_q(x,\xi) = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial q}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) ,$$

ce champ étant homogène de degré 0 en ξ . Le flot géodésique de M est le flot de H_q et les géodésiques paramétrées par l'arc sont les projections sur M des courbes intégrales de H_q , $\gamma(t) = \pi(\varphi_t(x_o,\xi_o))$ est la géodésique partant de x_o dans la direction ξ_o^* (duale de ξ_o). On appelle géodésique fermée de longueur T toute trajectoire de H_q fermée, telle que $\varphi_T(x,\xi) = (x,\xi)$. Soit $\mathcal{L} = \{\pm L \mid$ telle que il existe une géodésique fermée de longueur $L\}$, on a :

THEOREME.- $\operatorname{Sing}(\sigma) \subset \{0\} \cup \mathcal{L}$.

L'ensemble $\mathcal{L}$ peut être compliqué : en général on peut seulement dire que c'est un fermé de mesure nulle de $\mathbb{R}$, cependant génériquement c'est un ensemble discret et on peut préciser la partie principale de la singularité dans le cas où la différentielle $dP_{\gamma}(o)$ de l'application de Poincaré P_γ de la trajectoire fermée γ de longueur $T \subset T_1^*(M)$ (fibré unitaire) n'a pas de valeur propre égale à 1, ce qui implique que γ est une trajectoire périodique isolée. Notant j_γ l'indice de Morse de γ comme géodésique fermée (i.e. comme point critique de l'énergie sur des lacets fermés sans points bases) et par N_γ l'ordre d'itération de γ ($T = N_\gamma$; T_o = période de γ), on a :

$$z_\rho(\mu) \sim s_o(\mu) + \sum_{T_\gamma \in \operatorname{supp}(\hat{\rho})} \frac{1}{2\pi} \frac{T_\gamma}{N_\gamma} \cdot \frac{i^{(j_\gamma - 1)}}{|\det(1 - dP_\gamma(o))|^{1/2}} e^{i\mu T_\gamma} \hat{\rho}(T_\gamma)$$

$$+ O(\mu^{-1}) ,$$

où $s_o(\mu)$ est la singularité en 0. On voit que quand on raffine l'analyse (supp $\hat{\rho}$ grand) il apparaît des termes oscillants dont les fréquences sont les longueurs des géodésiques fermées, l'oscillation principale étant reliée à la plus petite géodésique fermée. On peut ainsi démontrer que, si deux variétés ont même spectre du laplacien, elles ont en général même longueurs des géodésiques fermées.

C. Remarques sur le calcul des singularités.

Pour faire une analyse fine des singularités d'une distribution, on introduit avec Hörmander la notion de "wave front set" ou "spectre singulier" d'une distribution qui raffine la notion de support singulier que nous rappelons :

si $u \in \mathcal{D}'(X)$, on dit que $x_o \notin \text{supp sing}(u)$ si $\exists\, v \in C_o^\infty(X)$ telle que $v(x_o) \neq 0$ et $vu \in C_o^\infty(X)$.

Par transformation de Fourier cela est équivalent à $\widehat{vu}(t\xi) = O(t^{-N})$ pour tout N et uniformément pour ξ tel que $\|\xi\| = 1$. ($\widehat{vu}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} vu(x)dx$ étant la transformée de Fourier de vu) . Localisant en ξ on dira que $(x_o,\xi_o) \notin WF(u)$ s'il existe U voisinage de (x_o,ξ_o) dans $T^*(X)$ et $v \in C_o^\infty(X)$
$\xi_o \neq 0$
telle que $v(x_o) \neq 0$ et $\widehat{vu}(t\xi) = O(t^{-N})$ pour tout N et uniformément pour $\xi \in U$. En fait, cette notion passe aux variétés en interprétant (x,ξ) comme un élément de $T^*(X)$ et $WF(u)$ comme un fermé conique de $T^*(X)$ dont la projection sur X est évidemment égale à supp sing(u) .

On a les résultats suivants :

1) <u>Composition</u> :

Soit $K_A \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ la noyau de $A : C_o^\infty(Y) \to \mathcal{D}'(X)$ et supposons que $WF(K_A) \subset (T^*(X)\setminus 0) \times (T^*(Y)\setminus 0)$ alors A x prolonge en un opérateur de $\mathcal{E}'(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ et si on pose $WF'(K_A) = \{(x,\xi,y,-\eta) \text{tq } (x,\xi,y,\eta) \in WF(K_A)\}$, on a :

$$WF(Au) \subset WF'(K_A) \circ WF(u) ,$$

c'est-à-dire :

$$WF(Au) \subset \{(x,\xi) \mid \exists (y,\eta) \in WF(u) \text{ tel que } (x,\xi,y,\eta) \in WF'(K_A)\} .$$

2) <u>Restriction à une sous-variété</u>.

Soit $Y \subset X$ une sous-variété et $N_Y = \{(y,\xi) \in T^*(X) \mid y \in Y , \xi\restriction T_y(Y) = 0\}$ le fibré normal à Y si $u \in \mathcal{D}'(X)$ et $WF(u) \cap N_Y = \emptyset$, on peut définir naturellement $u\restriction_Y$ et on a :

$$WF(u\restriction_Y) \subset \{(y,\eta) \in T^*(Y) \mid \exists\, (y,\xi) \in WF(u) \text{ tel que } \xi\restriction_{T_yY} = \eta\} .$$

3) Intégration le long des fibres.

Soient X et Y deux variétés et $u \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ à support compact en Y alors $v(x) = \int_Y u(x,y)dy$ est bien définie et :

$$WF(v) = \{(x,\xi) \mid \exists (x,\xi,y,0) \in WF(u)\} .$$

Soit maintenant l'équation $\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{\Delta}\, u = 0$ et $u(0,x) = f(x)$ ou $f \in \mathcal{D}'(M)$, on a formellement $u(t,0) = \exp(-it\sqrt{\Delta})\, f$ que l'on peut écrire à l'aide d'un noyau distribution :

$$u(t,x) = \int_M e(t,x,y) f(y)dy .$$

On peut aussi exprimer e à l'aide des μ_n et φ_n et on a :

$$e(t,x,y) = \Sigma \exp(-it\mu_n)\varphi_n(x) \otimes \overline{\varphi_n}\,(y) ,$$

et donc :

$$\sigma(t) = \int_M e(t,x,x)dx .$$

On peut démontrer, grâce à la théorie des opérateurs intégraux de Fourier que $WF(e) = \{(t,\tau,x,\xi,y,-\eta) \mid \tau + q(x,\xi) = 0 , (x,\xi) = \varphi_t\,(y,\eta)\}$, d'où on déduit le résultat ("propagation" des singularités) que :

$$WF(\exp(-it\sqrt{\Delta})f) = \varphi_t(WF(v)) ,$$

(les singularités se propagent comme le flot géodésique); et en appliquant les règles 2) et 3) aux opérations :

$$e(t,x,y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M \times M) \to e(t,x,x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M) \to \sigma(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ,$$

on en déduit le théorème sur les singularités de $\sigma(t)$. Le calcul précis du terme principal de la singularité utilise la description de $e(t,x,y)$ comme distribution intégrale de Fourier et un calcul symbolique assez délicat.

D. Variétés à géodésiques toutes fermées.

Dans le cas étudié plus haut, les points de période T du flot géodésique forment des sous variétés de dimension 1. Il arrive (cas par exemple des tores plats et des sphères) qu'ils forment des paquets de dimension d_j non dégénérés en un certain sens. Le comportement asymptotique de $z_\rho(\mu)$ en ces points-là fait apparaître des termes en $\mu^{(d_j-1)/2}$, en particulier si $d_j = 2d-1$ toutes les géodésiques sont périodiques de longueur T et la singularité correspondante est du même ordre que celle de l'origine, cela correspond en fait à une accumulation des μ_n au voisinage des points d'une progression arithmétique ($\sqrt{k(k+1)} = k+\frac{1}{2}+0\,(\frac{1}{k})$ dans le cas de S^2), plus précisément si α est le nombre de points conjugués le long de ces géodésiques (avec leur multiplicité) et si on pose $\nu_k = \frac{2\pi}{T}\,(k+\frac{\alpha}{4})$ alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists\ C>0 \text{ tel que } \#\{\mu_n \le \mu \mid \exists\ k,\ |\mu_n-\nu_k| \le \tfrac{C}{k}\} / \#\{\mu_n \le \mu\} \ge 1-\varepsilon \text{ pour } \mu \text{ assez}$$

grand. Ce théorème admet du reste une réciproque : si on a une telle accumulation de valeurs propres au voisinage d'une progression arithmétique $a(k+b)$ toutes les géodésiques sont de période $\frac{2\pi}{a}$.

II. QUASI-MODES DES VARIETES RIEMANNIENNES.

On s'intéresse maintenant à la construction de familles de valeurs propres ayant un développement asymptotique. Pour cela, utilisant une terminologie que l'on trouve dans [1], nous définissons un quasi-mode sur une variété riemannienne compacte par :

DEFINITION.- $\sigma = (u_r, \tau_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est un quasi-mode (q.m. en abrégé) si les u_r forment une suite de fonctions C^∞ sur M, les τ_r une suite croissante de de réels ≥ 0 tels que :

i) $\|u_r\|_{L^2} = 1$

ii) $\|(\Delta - \tau_r) u_r\|_{C^k} = O(\tau_r^{-N})$ ($\forall$ k et N)

(ce sont des fonctions propres asymptotiquement),

iii) Conditions d'orthogonalité asymptotique :

$$|(u_r, u_{r'})|_{L^2} = O(\tau_r^{-\infty}) \qquad (r' > r) .$$

La difficulté sera de construire des q.m. dans des situations assez générales, donnons un exemple :

$$M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \text{, on prend } u_r = \exp(2\pi i r (ax + by)) ,$$

$$(a, b \in \mathbb{Z} \text{ fixés}) \text{ et } \tau_r = 4\pi^2 r^2 (a^2 + b^2) .$$

Soit $\sigma = (u_r, \tau_r)$ un q.m. alors il existe une suite de valeurs propres λ_{n_r} $(r \geq r_o)$ et $n_{r+1} > n_r$ telles que $\lambda_{n_r} = \tau_r + O(\tau_r^{-\infty})$.

Donc les quasi-modes permettent de construire une suite asymptotique de valeurs propres, par contre Arnold a expliqué pourquoi, en général, les quasi-modes risquent de ne pas donner une approximation asymptotique des fonctions propres (ou"modes"), cela est dû dans son cas, à des multiplicités des valeurs propres causées par l'existence d'isométries de la variété, la multiplicité générique du quasi-mode étant liée à la géométrie, alors que celle des valeurs propres, est liée aux dimensions des représentations irréductibles du groupe d'isométries (resp.3 et 2 dans le cas de la symétrie équilatérale envisagée par Arnold).

A. Microsupport des quasi-modes.

On définit d'abord le support d'un q.m. :

DEFINITION.- $x \in \operatorname{supp}(\sigma)$ si et seulement si il existe un voisinage de x où les u_r sont uniformément à décroisance rapide en τ_r .

On cherche à microlocaliser cette notion (i.e. définir un support en termes de codirections), on peut, par exemple, poser :

DEFINITION.- On appelle microsupport de σ et on note $MS(\sigma)$ le fermé de $T_1^*(M)$ défini par :

$$MS(\sigma) = (\overline{\bigcup_{(a_r)} WF(\Sigma a_r u_r)}) \cap T_1^*(M) .$$

où la réunion porte sur les suites a_r qui sont à croissance au plus polynômiale par rapport aux τ_r , de façon que $\Sigma a_r u_r$ converge dans $\mathcal{D}'(M)$.

On a les propriétés suivantes :

PROPRIETE.- $MS(\sigma)$ est un fermé de $T_1^*(M)$ non vide, invariant par le flot géodésique de M , et dont la projection sur M est égale au support de σ .

L'invariance par le flot géodésique est une conséquence du théorème de propagation des singularités qui nous dit que :

$$WF(\sum_r a_r \exp(-it\sqrt{\tau_r})u_r) = \varphi_t(WF(\Sigma a_r u_r))$$

pour $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION. <u>Si</u> $\sigma = (u_r, \tau_r)$ <u>et</u> $\sigma' = (u_{r'}, \tau_{r'})$ <u>sont deux q.m. tels que</u> $MS(\sigma) \cap MS(\sigma') = \emptyset$, <u>leur réunion est encore un q.m. (ils sont asymptotiquement orthogonaux)</u>.

De plus on a une inégalité à rapprocher de la formule de Weyl qui majore le nombre de valeurs propres que peut approcher un q.m.

PROPRIETE.- <u>On a</u> $\#\{\tau_r \mid \tau_r \leq \lambda\} \lesssim \frac{(2\pi)^{-d}}{d} \cdot \mathrm{mes}(MS(\sigma))\lambda^{d/2}$.

<u>On a aussi une notion importante qui est celle d'indice d'un q.m.</u>

DEFINITION.- $\mathrm{ind}(\sigma) = \inf\{k>0 \mid \|u_r\|_{L^\infty} = O(\tau_r^{k/2})$.

C'est une conséquence facile des théorèmes de Sobolev que l'on a : $0 \leq k \leq \frac{d}{2}$, mais il est intéressant de savoir si, dans certains cas, k est beaucoup plus petit que $\frac{d}{2}$.

B. <u>Construction des quasi-modes</u>.

La première idée est de chercher les u_r sous la forme :

$$u_r(x) = e^{ik_r\varphi(x)} \, (a_0(x) + k_r^{-1} a_1(x) + \ldots) \ .$$

Une condition qui vient tout de suite si on fait $k_r \to \infty$ est que $\|d\varphi\|^2 = 1$ (équation eiconale). C'est-à-dire que si on considère $\Lambda = \{(x, d\varphi(x)) \mid x \in M\}$, c'est une sous-variété lagrangienne de $T^*(M)$ contenu dans $T_1^*(M)$, cela implique immédiatement que Λ est invariante par le flot géodésique, mais une telle variété n'est localement le graphe d'une différentielle que dans la mesure où la projection $\pi : \Lambda \to M$ est de rang d , cela peut ne pas rester vrai et on appelle caustique l'ensemble des points de Λ où π est de rang $< d$.

Au voisinage des caustiques, on cherche à représenter u_r sous forme d'une superposition d'exponentielle :

$$u_r(x) = \left(\frac{k_r}{2\pi}\right)^{N/2} \int_A \exp\left(ik_r\varphi(x,\alpha)\right)\left(a_o(x,\alpha) + k_r^{-1} a_1(x,\alpha) + \dots\right) d\alpha$$

où $$A \subset \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad a_o, \dots, a_i(x,\alpha) \in C_o^\infty(M \times A) ,$$

et $\varphi(x,\alpha)$ est une fonction phase non dégénérée représentant Λ :

$$\Lambda = \{(x, d_x\varphi) \mid d_\alpha \varphi = 0\} .$$

On se donne maintenant une variété lagrangienne <u>compacte</u> Λ de $T^*(M)$ telle que $\Lambda \subset T_1^*(M)$ et on cherche à construire u_r par recollement des définitions locales précédentes. Il est facile de voir (méthode de phase stationnaire) qu'en dehors de l'ensemble caustique on a un équivalent $u_r(x) \sim A(x)e^{ik_r \Phi(x)}$ où $\Phi(x)$ est telle que $(x, d\Phi(x)) = (x,\xi) \in \Lambda$. La différentielle de Φ est donc déterminée en dehors de l'ensemble caustique, de plus le passage de la caustique impose à Φ des déphasages du type $k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, une première condition de recollement est donc obtenue en écrivant que le long de n'importe quel lacet la variation de Φ doit être un multiple de 2π , formulée en terme de classe de cohomologie et introduisant la classe de Maslov $M \in H^1(\Lambda;\mathbb{Z})$, on obtient :

$$\frac{k_r}{2\pi}\int_\lambda \xi dx - \frac{1}{4} M(\lambda) \in \mathbb{Z} \text{ , pour tout lacet ; où encore :}$$

$$\frac{k_r}{2\pi}[\xi dx] - \frac{1}{4} M \in H^1(\Lambda;\mathbb{Z}) .$$

Ce sont les conditions de <u>quantification de Maslov</u>.

La détermination de $a_o(x,\alpha)$ peut alors se faire et plus généralement celle des a_i ; pour a_o on montre qu'il suffit de savoir construire sur Λ une densité C^∞ non nulle invariante par le flot géodésique, les a_i peuvent alors s'obtenir en résolvant des équations de transport du type, f étant C^∞ sur Λ , trouver g C^∞ telle que $dg(H_q) = f$.

On obtient finalement le résultat suivant :

THEOREME.- Soit Λ une sous-variété lagrangienne compacte de $T^*(M)$ contenue dans $T_1^*(M)$ telle que :

i) $\exists\ k_r \to +\infty$ tels que distance $\left(\frac{k_r}{2\pi}[\xi\, dx] - \frac{1}{4} M , H^1(\Lambda ; \mathbb{Z})\right) = O\left(\frac{1}{k_r}\right)$,

ii) Il existe une densité C^∞ non nulle ρ sur Λ invariante par le flot géodésique telle que l'équation $dg(H_q) = f$ ait une solution g C^∞ pour toute fonction f C^∞ sur Λ d'intégrale nulle par rapport à ρ ;

Alors il existe un q.m. $\sigma = (u_r, \tau_r)$ de microsupport Λ et tel que $\tau_r = k_r^2 + O(1)$.

Remarque :

1) La condition i) est vérifiée génériquement si $\dim(H^1(\Lambda ; \mathbb{R})) = 2$ (il suffit d'après un théorème d'approximation disphantienne que $\frac{1}{2\pi}[\xi\, dx]$ soit de pente irrationnelle dans une base de classes entières).

2) La condition ii) est vérifiée si $\Lambda = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $H_q = \omega$ (champ constant) tel que $|\langle k, \omega\rangle| \geq C |k|^{-\alpha}$ ($\forall\ k \in \mathbb{Z}^n$ avec $C, \alpha > 0$) .

Or, les variétés lagrangiennes qui permettent de construire le théorème de Kolmogorov-Arnold et Moser vérifient justement cette seconde condition.

C. Applications.

1. Cas de variétés à flot géodésique complètement intégrable.

Nous considérons dans C uniquement le cas des surfaces $(d = 2)$ à ceux de la condition i) du théorème précédent (Λ étant une variété compacte de dimension 2 ayant un champ de vecteur sans zéros (H_q) on a toujours $\dim(H^1(\Lambda ; \mathbb{R})) = 2)$. Le cas le plus simple est celui qu'on appelle complètement intégrable : il existe une fonction $I : T^*(M) \to \mathbb{R}$ appelée intégrale première vérifiant :

I est homogène de degré 1 et on a $\{I,q\} = 0$ et (dI,dq) linéairement indépendants partout.

($\{f,g\} = H_f g$ désigne le crochet de Poisson). (Par exemple, une surface de révolution ou un ellipsoïde). On peut alors introduire des coordonnées locales $(\theta,p) \in T^*(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$, appelées coordonnées action-angle, telle que $\chi : (x,\xi) \to (\theta,p)$ soit une transformation canonique homogène d'un ouvert conique Ω de $T^*(M)$ sur un ouvert $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \times U$ de $T^*(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ et que $q \circ \chi^{-1} = H(p)$. Les tores $(q = 1 , I = a)$ se transforment par χ en des tores $p = C^{te}$ de $T^*(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$.
La condition de Maslov s'écrit alors : $\frac{k_r}{2\pi} p - \frac{1}{4} M \in \mathbb{Z}^2$. Soit $C = (\{H(p) = 1\} \cap U) \subset \mathbb{R}^2$, on dit que le flot est <u>complètement intégrable non dégénéré</u> si C a une courbure qui ne s'annule pas.

A chaque point de C est associée par χ^{-1} une sous-variété lagrangienne de $T^*(M)$ ($T^*(M)$ contenue dans $T_1^*(M)$ et les variétés qui vérifient les conditions i) et ii) du théorème correspondent à une partie C_1 de C dont le complémentaire est de mesure nulle.

Soit $\mathcal{R} = \frac{M}{4} + \mathbb{Z}^2$ et $\mu \in \mathcal{R} \cap U$, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver un point p de C_1 de façon que la $\frac{1}{2}$ droite $D_p = \{\frac{\tau}{2\pi} p\tau | \geq 0\}$ passe à une distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{|\mu|}$ de μ. Utilisant la construction du théorème de B. on peut associer à chaque tel point μ un (u_μ, τ_μ) avec $\tau_\mu = \tau^2 + O(1)$ (si τ est le paramètre du point sur D_p le plus proche de μ). Cela permet ainsi de construire un q.m. $\sigma = (u_\mu, \tau_\mu)$ dont le microsupport est $\bar{\Omega} \cap T_1^*(M)$ et qui permet d'approcher le nombre optimum de valeurs propres par rapport à l'inégalité vue dans A (en effet χ étant canonique $\text{mes}(H(p) \leq 1) = \text{mes}(\Omega \cap (q \leq 1)$.

2. <u>Cas des géodésiques fermées de type elliptique générique</u>.

Soit γ une géodésique fermée simple de longueur T et P_γ l'application de Poincaré, on dit que γ est de type elliptique si les valeurs propres de $dP_\gamma(o)$ sont de module 1 et non égales à 1. Soit $e^{\pm i\alpha}$ ces valeurs propres si $\alpha \neq k\,\frac{\pi}{2}$ et $k\,\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$, un théorème de Birkhoff-Moser affirme qu'on peut trouver une carte symplectique de Σ (germe d'hypersurface de $T_1^*(M)$ transverse à γ) telle qu'en coordonnées polaires P_γ ait les équations :

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha + \beta\rho^2 + O(\rho^4) \\ \rho_1 = \rho + O(\rho^4) \ . \end{cases}$$

Génériquement, on a $\beta \neq 0$ et c'est ce qu'on appelle le cas elliptique générique (P_γ est une twist-mapping), le théorème de Moser permet alors de dire qu'il existe dans Σ autour de 0 beaucoup de cercles invariants par P_γ , sous l'action du flot φ_t ils engendrent des variétés lagrangiennes entourant $\tilde{\gamma}$ et qui vérifient presque toutes les hypothèses i) et ii) du théorème B. Regardant comme plus haut le quasi-mode qu'elles permettent de construire, on obtient une famille de valeurs propres asymptotiques :

$$\lambda_{n_1,n_2} = \frac{2\pi}{T}\left(n_1 + \frac{n(\gamma)}{4} + \frac{\alpha}{2\pi}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\right) .$$

Où $n(\gamma)$ = indice de Morse$(\gamma)) - 1$. Le résultat est à rapprocher des formules asymptotiques données par A. Voros [8] .

REFERENCES

[1] ARNOLD — Functional analysis and its applications 6(1972) p. 94 - 101.

[2] BERGER, GAUDUCHON et MAZET — Lectures, Notes n° 194 (1971). Springer.

[3] DUISTERMAAT — Comm. on Pure and Applied Maths. 27(1974) p.207 - 281.

[4] DUISTERMAAT et HÖRMANDER — Acta Math. 128 (1972) p. 183-269.

[5] DUISTERMAAT et GUILLEMIN — Proc. AMS. Summer institute on differential geometry Stanford (1973) .

[6] HÖRMANDER — Acta Mathematica 127 (1971) p.79 - 183.

[7] LAZUTKIN — Math. USSR Izv.7(1973) p. 185-214 et 439-466.

[8] VOROS — Preprint Saclay (1974).

[9] ABRAHAM — Foundations of Mechanics. (1967) Benjamin.

[10] Y. COLIN de VERDIERE — Preprint Université Paris VII (1975).

[11] BALIAN et BLOCH — Ann. of Physics. 69, 1 (1972) p. 76.160.

[12] CHAZARAIN — Inv. Math. 24 (1974) p. 65-82.

[13] HÖRMANDER — Acta Math. 121 (1968) p.193-218.

[14] Y. COLLIN de VERDIERE — Compositio Math. 27 (1973) p.159-184.

[15] MASLOV — Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.