Recherche Coopérative sur Programme n° 25

Jacques Faraut

Analyse harmonique sur un hyperboloïde à une nappe

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1974, tome 21
« Conférences de : Y. Colin de Verdière, J. Faraut, D. Iagolnitzer, C. Itzykson, C.V. Stanojevic et W. Thirring », , exp. n° 4, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1974__21__A4_0>

ANALYSE HARMONIQUE SUR UN HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE

par

Jacques FARAUT

Dans cet exposé, nous étudions l'espace homogène $O(1,3)/O(1,2)$. En nous inspirant de deux notes de V.F. Molcanov ([5] et [6]), nous définissons les noyaux sphériques. Ces noyaux sphériques sont l'analogue des fonctions sphériques de l'espace homogène $O(1,3)/O(3)$.

Dans la première partie, ces noyaux sphériques sont déterminés explicitement. Dans la deuxième partie, nous indiquons quels sont ceux qui sont de type positif et nous donnons une représentation intégrale des noyaux invariants de type positif. Finalement, la formule de Plancherel est établie.

Cette formule de Plancherel a été établie par des méthodes différentes dans [2], [7] et [8]. Cet exposé reprend l'étude que nous avions faite de l'espace homogène $O(1,2)/O(1,1)$ ([1]).

I. NOYAUX SPHERIQUES

1. Définitions.

Soit X l'hyperboloïde à une nappe

$$X = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} .$$

Le groupe $O(1,3)$ opère sur X transitivement et X est l'espace homogène G/H où H est le sous-groupe d'isotropie de $a = (0,1,0,0)$, isomorphe à $O(1,2)$.

Pour deux points x et y de R^4, on note

$$[x,y] = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 .$$

La trace de la forme bilinéaire $[x,y]$ sur chaque plan tangent à X induit une structure de variété pseudo-riemannienne de signature $(1,2)$. Le pseudo-laplacien associé Δ est la trace sur X du Dalembertien

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} .$$

Plus explicitement, soit f une fonction de classe C^2 sur X, $\tilde{f}$ la fonction définie sur l'ouvert

$$\{x \in R^4 \mid [x,x] > 0\}$$

homogène de degré 0 et égale à f sur X ; Δf est la restriction à X de $\square\tilde{f}$.

Si f est une fonction définie sur X, et g un élément de G, on pose

$$\tau_g f(x) = f(g^{-1}x) .$$

Nous avons

$$\Delta(\tau_g f) = \tau_g(\Delta f) .$$

On note $\mathcal{D}(X)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur X à support compact. On note dx la mesure invariante

$$dx = \frac{dx_1 \, dx_2 \, dx_3}{|x_0|} .$$

DEFINITION 1. <u>Un noyau sphérique est une application</u>

$$\Phi : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) \to \mathbf{C}$$

bilinéaire, bicontinue, vérifiant

(1) Φ est invariant par G :

$$\Phi(\tau_g f_1, \tau_g f_2) = \Phi(f_1, f_2)$$

(2) Φ est un "noyau propre" du pseudo-laplacien

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \Phi(\Delta f_1, f_2) = \lambda \Phi(f_1, f_2) \ .$$

En utilisant le théorème des noyaux de Schwartz et l'invariance par G, on montre que tout noyau sphérique relativement à la valeur propre λ est associé à une distribution T sur G biinvariante par H telle que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{D}(G)$

$$\Phi(f_1 * m_H, f_2 * m_H) = T(\check{f}_2 * f_1)$$

où m_H désigne une mesure de Haar de H considérée comme une mesure sur G. Une telle distribution est symétrique : $\check{T} = T$, et par suite, tout noyau sphérique est symétrique :

$$\Phi(f_1, f_2) = \Phi(f_2, f_1) \ .$$

Une telle distribution T peut être considérée comme une distribution sur X invariante par H, et elle vérifie

$$\Delta T - \lambda T = 0 \ .$$

Réciproquement à une distribution sur X invariante par H, solution de $\Delta T - \lambda T = 0$ correspond un noyau sphérique relativement à la valeur propre λ.

Ces noyaux sphériques admettent une représentation intégrale, faisant intervenir une transformation de Fourier que nous étudions au paragraphe suivant.

2. Transformation de Fourier.

Soit Ξ le cône asymptote de l'hyperboloïde X :

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid [\xi,\xi] = 0 \ , \ \xi \neq 0\} \ .$$

Si ξ est un point de Ξ , les applications

$$x \mapsto |[x,\xi]|^{-s}$$

$$x \mapsto |[x,\xi]|^{-s} \operatorname{sgn}([x,\xi])$$

sont pour $\operatorname{Re} s < -2$ des fonctions propres du pseudo-laplacien Δ pour la valeur propre $\lambda_s = s(2-s)$.

Soit f une fonction de $\mathcal{D}(X)$. Posons pour $\operatorname{Re} s < 1$

$$F_0(\xi,s) = \int_X |[x,\xi]|^{-s} f(x)dx$$

$$F_1(\xi,s) = \int_X |[x,\xi]|^{-s} \operatorname{sgn}([x,\xi]) \ f(x)dx \ .$$

Pour tout ξ de Ξ , l'application de X dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto [x,\xi]$$

a en tout point de x une différentielle non nulle. Par suite, la fonction

$$s \mapsto F_0(\xi,s)$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles simples pour $s = 1,3,5,\ldots$.
De même, la fonction

$$s \mapsto F_1(\xi,s)$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles simples pour $s = 2,4,6,\ldots$.

DEFINITION 2. La transformée de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{D}(X)$ est la fonction $\hat{f}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ définie sur $\Xi \times \mathbb{C}$ par

$$\hat{f}_0(\xi,s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} \int_X |[x,\xi]|^{-s} f(x)dx$$

$$\hat{f}_1(\xi,s) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{s}{2})} \int_X |[x,\xi]|^{-s} \operatorname{sgn}([x,\xi])\ f(x)dx\ .$$

PROPOSITION 1. <u>La transformation de Fourier possède les propriétés suivantes</u> :

1) <u>pour</u> ξ <u>fixé</u>, $\hat{f}$ <u>est holomorphe en</u> s ,

2) <u>pour</u> s <u>fixé</u>, $\hat{f}$ <u>est de classe</u> C^∞ <u>et homogène de degré</u> $-s$ <u>en</u> ξ , $\hat{f}_0(\cdot,s)$ <u>est paire</u>, $\hat{f}_1(\cdot,s)$ <u>est impaire</u>,

3) $\widehat{\Delta f}(\xi,s) = s(1-s)\ \hat{f}(\xi,s)$.

La propriété 1) provient de ce que les pôles des fonctions $F_0(\xi,\cdot)$ et $F_1(\xi,\cdot)$ sont simples. Les propriétés 2) et 3) se montrent directement pour $\operatorname{Re} s < -2$ et ensuite par prolongement analytique.

3. Représentation intégrale des noyaux sphériques.

Soit h une fonction continue sur Ξ homogène de degré -2 . Par définition, on pose

$$\oint h(\xi)d\mu(\xi) = \int_S h(\xi_u)du$$

où S désigne la sphère unité de R^3 , u un point de cette sphère, $\xi_u = (1,\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, du la mesure uniforme sur S de masse totale 1 . Si g est un élément de G , nous avons

$$\oint h(g\xi)d\mu(\xi) = \oint h(\xi)d\mu(\xi)$$

(pour la démonstration, voir [9], p. 525).

Pour tout nombre complexe s , nous posons, si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{D}(X)$

$$\Phi_s^0(f,g) = \oint \hat{f}_0(\xi,s)\ \hat{g}_0(\xi,2-s)d\mu(\xi)$$

$$\Phi_s^1(f,g) = \oint \hat{f}_1(\xi,s)\ \hat{g}_1(\xi,2-s)d\mu(\xi)\ .$$

THEOREME 2. Les noyaux Φ_s^0 et Φ_s^1 sont des noyaux sphériques pour la valeur propre $\lambda_s = s(2-s)$.

C'est une conséquence de la proposition 1 et de l'invariance de l'intégrale $\oint$.

Nous montrerons que les noyaux Φ_s^0 et Φ_s^1 constituent une base de l'espace des noyaux sphériques relativement à la valeur propre $\lambda_s = s(2-s)$ et vérifient

$$\Phi_{2-s}^0 = \Phi_s^0$$

$$\Phi_{2-s}^1 = \Phi_s^1\ .$$

4. Noyaux sphériques et distributions propres de Δ invariantes par H .

a) L'application M .

Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Nous lui associons la distribution T sur X définie par

$$(1) \qquad < T,f > = \int_X f(x)\ F(x_1)dx\ .$$

C'est une distribution sur X invariante par H . Nous allons étudier dans la suite comment on peut remplacer la fonction F par une distribution sur $\mathbb{R}$. La formule (1) peut s'écrire

$$< T,f > = \int Mf(t)\ F(t)dt$$

avec

$$Mf(t) = \int f\delta(x_1 - t) \; .$$

(On a utilisé ici la notation de Gelfand, en particulier si x_0 ne s'annule pas sur le support de f

$$Mf(t) = \int_{x_1 = t} f(x) \frac{dx_2 \, dx_3}{|x_0|} \; . \;)$$

En général, la fonction Mf n'est pas définie pour $t = 1$ et $t = -1$. Si f est nulle au voisinage de a et $-a$, alors Mf est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ $(a = (0,1,0,0)$, $-a = (0,-1,0,0))$. En suivant la méthode de Méthée ([4], § 4), on montre que l'application transposée

$$M' : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(X \setminus \{a,-a\})$$

est une bijection de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sur l'espace des distributions sur $X\setminus\{a,-a\}$ invariantes par H.

Pour étudier le comportement de Mf au voisinage de $t = 1$, considérons une fonction f de $\mathcal{D}(X)$ dont le support est contenu dans $\{x \in X \,|\, x_1 > 0\}$. Dans cet ouvert, nous pouvons prendre (x_0, x_2, x_3) comme système de coordonnées. Si nous posons

$$f_1(x_0^2, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, x_3) + f(-x_0, x_2, x_3)$$

et

$$f_2(x_0^2, r^2) = \int_0^{2\pi} f_1(x_0^2, r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$$

nous avons, pour $t > 1$,

$$Mf(t) = \int_0^{\infty} f_2(r^2 + \varepsilon, r^2) \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 + \varepsilon}}$$

avec $\varepsilon = t^2 - 1$, et en posant

$$f_3(x_0,r^2) = \int_0^{2\pi} f(x_0, r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)d\theta$$

nous avons pour $t<1$

$$Mf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x_0, x_0^2+\varepsilon)dx_0$$

avec $\varepsilon = 1-t^2$.

D'après les résultats de Méthée ([4], p. 249), nous avons au voisinage de $t = 1$, pour $t>1$,

$$Mf(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(f) + \sqrt{t^2-1}\, B_k(f)](t^2-1)^k$$

et pour $t<1$

$$Mf(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)(t^2-1)^k$$

où A_k et B_k sont des distributions sur X portées par $\{x\in X \mid x_1 = 1\}$. En particulier,

$$B_0(f) = 4\pi\, f(a)$$

$$B_k(f) = c_k\, \Delta^k f(a) .$$

b) Solutions distributions de $LS - \lambda S = 0$.

Soit F une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Nous lui associons la distribution T sur X définie par

$$T(f) = \int_X f(x)\, F(x_1)dx .$$

Nous avons

$$T(\Delta f) = \Delta T(f) = \int_X f(x)\, LF(x_1)dx$$

où L désigne l'opérateur différentiel

$$L = (1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - 3t\frac{d}{dt}$$

par transposition, nous en déduisons que

$$M\Delta f = L'Mf$$

où L' désigne l'opérateur différentiel

$$L' = (1-t^2)\frac{d^2}{dt^2} - t\frac{d}{dt} + 1 \; .$$

Par suite, toute distribution T sur $X' = X\setminus\{-a,a\}$ solution de $\Delta T - \lambda T = 0$ et invariante par H est de la forme $T = M'S$, où S est une distribution sur $\mathbb{R}$ solution de $LS - \lambda S = 0$. Sur chaque intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,\infty[$, S est solution ordinaire de $Lu - \lambda u = 0$. Sur $]-1,1[$, les solutions ordinaires de $Lu - \lambda u = 0$ sont de la forme

$$u(t) = A\,\frac{\cos\,(s-1)\theta}{\sin\,\theta} + B\,\frac{\sin\,(s-1)\theta}{\sin\,\theta}$$

avec $t = \cos\,\theta$, $\lambda = s(2-s)$. Sur $]1,\infty[$, elles sont de la forme

$$u(t) = A'\,\frac{\mathrm{ch}(s-1)r}{\mathrm{sh}\,r} + B'\,\frac{\mathrm{sh}(s-1)r}{\mathrm{sh}\,r}$$

avec $t = \mathrm{ch}\,r$. Pour de telles fonctions u, les expressions

$$u^{[0]}(t) = \sqrt{|1-t^2|}\,u(t)$$

$$u^{[1]}(t) = (1-t^2)u'(t) - tu(t)$$

ont des limites à droite et à gauche en $t = 1$ et $t = -1$. Si φ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, nous avons

$$\varphi Lu - uL'\varphi = \frac{d}{dt}\,\{[(1-t^2)u' - tu]\varphi - (1-t^2)u\,\varphi'\}$$

d'où

$$\int_{R} (\varphi Lu - uL'\varphi)dt = \varphi(-1)[u^{[1]}(-1-0) - u^{[1]}(-1+0)]$$
$$+ \varphi(1)\ [u^{[1]}(1-0) - u^{[1]}(1+0)] .$$

Ainsi, la fonction u sera solution distribution de $LS - \lambda S = 0$ si et seulement si $u^{[1]}$ est continue en -1 et 1. Comme l'équation $LS - \lambda S$ n'admet pas de solution distribution portée par $\{-1,1\}$, nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 3. Toute solution distribution S de $LS - \lambda S = 0$ est de la forme

$$S(\varphi) = \int \varphi(t)\ u(t)dt$$

où u est sur chaque intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,\infty[$ une solution ordinaire de $Lu - \lambda u = 0$ vérifiant

$$u^{[1]}(-1-0) = u^{[1]}(-1+0)$$
$$u^{[1]}(1-0) = u^{[1]}(1+0) .$$

Les solutions distributions de $LS - \lambda S = 0$ constituent un espace vectoriel de dimension 4.

c) Solutions distributions de $\Delta T - \lambda T = 0$ invariantes par H.

Soit S une distribution sur R solution de $LS - \lambda S = 0$. Elle est définie par une fonction u satisfaisant aux conditions de la proposition 3. Si f est une fonction de $\mathcal{D}(X)$, le produit $Mf.u$ est intégrable. Soit T la distribution sur X définie par

$$T(f) = \int Mf(t)\ u(t)dt .$$

Du comportement de Mf au voisinage de $t = 1$, il résulte que

$$\lim_{t\to 1+0} \sqrt{t^2-1}\ \frac{d}{dt} Mf(t) = -4\pi\ f(a)$$

$$\lim_{t \to 1-0} \sqrt{1-t^2} \frac{d}{dt} Mf(t) = 0$$

et par suite

$$(\Delta T - \lambda T)(f) = 4\pi f(-a) u^{[0]}(-1-0)$$
$$- 4\pi f(a)\, u^{[0]}(1+0) \; .$$

Ainsi pour que la distribution T soit solution de $\Delta T - \lambda T = 0$, il faut et suffit que $u^{[0]}(-1-0) = u^{[0]}(1+0) = 0$.

On montre que, réciproquement, toute solution distribution T de $\Delta T - \lambda T = 0$ invariante par H est de cette forme.

THEOREME 4. Toute distribution T sur X solution de $\Delta T - \lambda T = 0$ invariante par H est de la forme

$$T(f) = \int Mf(t)\; u(t)dt$$

où u est une solution ordinaire de $Lu - \lambda u = 0$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,\infty[$ vérifiant

$$u^{[1]}(-1-0) = u^{[1]}(-1+0)$$
$$u^{[1]}(1-0) = u^{[1]}(1+0)$$
$$u^{[0]}(-1-0) = 0 \; , \; u^{[0]}(1+0) = 0 \; .$$

Les solutions distributions de $\Delta T - \lambda T = 0$ invariantes par H constituent un espace vectoriel de dimension 2 .

Par suite, les noyaux sphériques relativement à la valeur propre λ constituent un espace vectoriel de dimension 2 . Les noyaux sphériques Φ_s^0 et Φ_s^1 en constituent une base avec $\lambda = \lambda_s = s(2-s)$. Comme $\lambda_{2-s} = \lambda_s$, nous avons $\Phi_{2-s}^0 = \Phi_s^0$ et $\Phi_{2-s}^1 = \Phi_s^1$.

5. Expressions explicites des noyaux sphériques.

Soient T_s^0 et T_s^1 les distributions sur X invariantes par H associées aux noyaux sphériques Φ_s^0 et Φ_s^1. D'après le théorème 4, elles sont de la forme

$$T_s^0(f) = \int Mf(t)\, \varphi_s^0(t)dt$$

$$T_s^1(f) = \int Mf(t)\, \varphi_s^1(t)dt$$

où φ_s^0 (resp. φ_s^1) est une solution paire (resp. impaire) de $Lu - s(2-s)u = 0$ sur chaque intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,\infty[$ vérifiant les conditions du théorème 4. Ainsi

$$\Phi_s^0(f,g) = \iint_{X \times X} \varphi_s^0([x,y])\, f(x)\, g(y)dx\, dy\, .$$

Posons pour $\operatorname{Re} s < 1$, $\operatorname{Re} \sigma < 1$

$$\varphi_{s,\sigma}^0(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1-s}{2})\,\Gamma(\frac{1-\sigma}{2})} \int_S |[x,u]|^{-s}\, |[y,u]|^{-\sigma} du$$

(on utilise les notations du paragraphe 3). C'est une fonction analytique de (s,σ) qui admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}^2$ et nous avons $\varphi_s^0([x,y]) = \varphi_{s,2-s}^0(x,y)$. Prenons $x = a = (0,1,0,0)$, $y = (0,0,1,0)$, nous obtenons

$$\varphi_{s,\sigma}^0(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3-s-\sigma}{2})}$$

et par suite

$$\varphi_s^0(0) = \frac{1}{2\pi}\, .$$

De façon analogue, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\, \varphi_s^1(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\, .$$

Nous en déduisons :

THEOREME 5. <u>Les fonctions</u> φ_s^0 <u>et</u> φ_s^1 <u>sont définies par</u>

a) <u>si</u> $|t| < 1$, $t = \cos\theta$

$$\varphi_s^0(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\cos(s-1)(\theta-\frac{\pi}{2})}{\sin\theta}$$

$$\varphi_s^1(\cos\theta) = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(s-1)(\theta-\frac{\pi}{2})}{(s-1)\sin\theta}$$

b) <u>si</u> $t > 1$, $t = \operatorname{ch} r$

$$\varphi_s^0(\operatorname{ch} r) = \frac{1}{2\pi}\sin(s-1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sh}(s-1)r}{\operatorname{sh} r}$$

$$\varphi_s^1(\operatorname{ch} r) = -\frac{1}{\pi}\cos(s-1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sh}(s-1)r}{(s-1)\operatorname{sh} r} .$$

II. NOYAUX SPHERIQUES DE TYPE POSITIF. FORMULE DE PLANCHEREL.

1. Noyaux sphériques de type positif.

En utilisant la représentation intégrale des noyaux sphériques Φ_s^0 et Φ_s^1 (I.3.), il est possible de déterminer les noyaux sphériques Φ qui sont de type positif, c'est-à-dire ceux qui vérifient

$$\forall\, f \in \mathcal{D}(X) \ , \ \Phi(f,\overline{f}) \geq 0 .$$

THEOREME 6. a) <u>Pour</u> $s = 1+i\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$, <u>les noyaux</u> Φ_s^0 <u>et</u> Φ_s^1 <u>sont de type positif</u>.

b) <u>Pour</u> $0 \leq s \leq 2$, <u>les noyaux</u> Φ_s^0 <u>et</u> Φ_s^1 <u>sont de type positif</u>.

c) <u>Pour</u> $s = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}^*$ <u>ou</u> $s = -(2p-1)$, $p \in \mathbb{N}^*$, <u>le noyau</u>

<u>sphérique</u> $(-1)^p \Phi_s^0$ <u>est de type positif</u>.

<u>Pour</u> $s = 2p+2$, $p \in \mathbb{N}^*$ <u>ou</u> $s = -2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, <u>le noyau sphérique</u> $(-1)^p \Phi_s^1$ <u>est de type positif</u>.

Ce théorème se démontre de la même manière que le théorème II.3. de [1].

2. Représentation intégrale des noyaux invariants de type positif.

Soit B un noyau invariant de type positif sur $\mathcal{D}(X)$, c'est-à-dire une forme bilinéaire, bicontinue et invariante sur $\mathcal{D}(X)$ telle que

$$\forall\ f \in \mathcal{D}(X)\ ,\ B(f,\bar{f}) \geq 0\ .$$

Munissons $\mathcal{D}(X)$ du produit scalaire

$$(f|g) = B(f,\bar{g})$$

et soit $\mathfrak{F}$ l'espace préhilbertien quotient de $\mathcal{D}(X)$ par le noyau de B et $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert obtenu par complétion. Les transformations τ_g se prolongent à $\mathcal{H}$ en une représentation unitaire π . L'opérateur Δ peut être considéré comme un opérateur non borné sur $\mathcal{H}$ de domaine $\mathfrak{F}$ et on peut montrer que l'opérateur $(\mathfrak{F},\Delta)$ est essentiellement auto-adjoint. Notons (D_A,A) le plus petit prolongement fermé de $(\mathfrak{F},\Delta)$. C'est un opérateur auto-adjoint. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ étant séparable, d'après le théorème spectral de Von Neumann ([3], p. 55 et 56), il existe une mesure positive σ sur $\mathbb{R}$ et une famille K_λ de noyaux tels que

$$\forall\ u,v \in \mathcal{H}\ ,\ (u|v) = \int K_\lambda(u,v)d\sigma(\lambda)$$

et si u appartient au domaine D_A

$$(Au|v) = \int \lambda K_\lambda(u,v)d\sigma(\lambda)\ .$$

Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{D}(X)$, posons

$$\Phi_\lambda(f,\bar{g}) = K_\lambda(\dot{f},\dot{g})$$

où $\dot{f}$ et $\dot{g}$ désignent les classes de f et g ($\dot{f}$ et $\dot{g}$ sont des éléments de $\mathfrak{F}$). De l'invariance de la forme bilinéaire B et de l'opérateur Δ , de la nucléarité de l'espace $\mathcal{D}(X)$, il résulte que pour presque tout λ (par rapport à la mesure σ), le noyau Φ_λ est un noyau sphérique de type positif si bien que nous pouvons énoncer :

THEOREME II.2. <u>Tout noyau</u> B <u>invariant de type positif sur</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>admet la représentation intégrale suivante</u> :

$$\begin{aligned} B(f,g) = &\int_{[0,\infty[} \Phi^0_{1+i\nu}(f,g)d\sigma^0_1(\nu) + \int_{[1,2]} \Phi^0_s(f,g)d\sigma^0_2(s) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \, a^0_p \, \Phi^0_{2p+1}(f,g) \\ &+ \int_{[0,\infty[} \Phi^1_{1+i\nu}(f,g)d\sigma^1_1(\nu) + \int_{[1,2]} \Phi^1_s(f,g)d\sigma^1_2(s) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \, a^1_p \, \Phi^1_{2p+2}(f,g) \ . \end{aligned}$$

L'existence des mesures et des constantes provient du théorème spectral. Le fait que ces mesures soient des mesures de Radon provient de ce que pour tout s , il existe des fonctions f et g de $\mathcal{D}(X)$ telles que

$$\Phi^0_s(f,g) \neq 0 \ , \ \Phi^1_s(f,g) \neq 0 \ .$$

3. Formule de Plancherel.

Considérons le noyau invariant de type positif B défini par

$$B(f,g) = \int_X f(x)\, g(x)dx \ .$$

D'après le théorème II.2., il admet une représentation intégrale qui n'est autre que la formule de Plancherel. Nous allons dans ce paragraphe déterminer explicitement les mesures σ_1^0 , σ_2^0 , σ_1^1 , σ_2^1 et les constantes a_p^0 et a_p^1 .

THEORÈME II.3. (Formule d'inversion). Soit g une fonction de $\mathcal{D}(X)$, posons $h = Mg$ et

$$\hat{h}_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \varphi_s^0(t)dt$$

$$\hat{h}_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \varphi_s^1(t)dt \ .$$

Alors

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \hat{h}_0(1+i\nu)\, \frac{\nu}{\operatorname{sh} \nu\frac{\pi}{2}}\, d\nu + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p\, p\, \hat{h}_0(2p+1)$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} \hat{h}_1(1+i\nu)\, \frac{\nu^2}{\operatorname{ch} \nu\frac{\pi}{2}}\, d\nu + \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p(2p+1)^2\, \hat{h}_1(2p+2) \ .$$

a) Supposons d'abord que la fonction g est paire $(g(-x) = g(x))$. Dans ce cas, h est paire et $\hat{h}_1 = 0$. Nous avons

$$\hat{h}_0(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h(\cos\theta)\, \cos(s-1)(\theta - \frac{\pi}{2})d\theta$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sin(s-1)\, \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} h(\operatorname{ch} r)\, \operatorname{sh}(s-1)r\, dr \ .$$

Posons

$$H_0(s) = \frac{1}{\pi}\sin(s-1)\, \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} h(\operatorname{ch} r)\, \operatorname{sh}(s-1)r\, dr \ .$$

Nous avons

$$H_0(1+i\nu) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{sh}\,\nu\frac{\pi}{2}\int_0^\infty h(\mathrm{ch}\ r)\ \sin \nu r\ dr\ .$$

En effectuant une intégration par partie, nous avons, pour $\nu \neq 0$,

$$-\pi\,\frac{H_0(1+i\nu)}{\mathrm{sh}\ \nu\,\frac{\pi}{2}} = \frac{h(1)}{\nu} + \frac{1}{\nu}\int_0^\infty \cos \nu r\ h'(\mathrm{ch}\ r)\ \mathrm{sh}\ r\ dr\ .$$

Or d'après le comportement de $h = Mg$ au voisinage de $t = 1$, nous avons (paragraphe I.4.a))

$$\lim_{t\to 1+0} \sqrt{t^2-1}\ h'(t) = -4\pi\ g(a)\ .$$

La formule d'inversion de la transformation de Fourier usuelle donne

$$4\pi\ g(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\pi\nu\,\frac{H_0(1+i\nu)}{\mathrm{sh}\ \nu\,\frac{\pi}{2}} + h(1)\Big]d\nu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_0(1+i\nu)\,\frac{\nu}{\mathrm{sh}\,\nu\frac{\pi}{2}}\,d\nu + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\int_0^\pi [h(1)-h(\cos\theta)]\ \mathrm{ch}\ \nu\ (\theta-\tfrac{\pi}{2})d\theta\Big\}$$

$$\times \frac{\nu}{\mathrm{sh}\,\nu\frac{\pi}{2}}\,d\nu\ .$$

Pour le calcul de la deuxième intégrale, il est possible d'intervertir l'ordre des intégrations pour le calcul du deuxième terme. Comme nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{ch}\ \nu(\theta-\tfrac{\pi}{2})\,\frac{\nu}{\mathrm{sh}\ \pi\frac{\nu}{2}}\,d\nu = \frac{2}{\sin^2\theta}$$

nous obtenons

$$4\pi\ g(a) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_0(1+i\nu)\,\frac{\nu}{\mathrm{sh}\,\nu\frac{\pi}{2}}\,d\nu + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [h(1)-h(\cos\theta)]\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\ .$$

D'autre part,

$$\hat{h}_0(2p+1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi h(\cos\theta)\ \cos 2p(\theta-\tfrac{\pi}{2})d\theta$$

$$= \frac{(-1)^p}{2\pi} \int_0^\pi h(\cos\theta)\ \cos 2p\,\theta\, d\theta \ .$$

En utilisant le développement en série de Fourier de $h(\cos\theta)$, nous obtenons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [h(1) - h(\cos\theta)]\ \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = 8 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p\, p\, \hat{h}_0(2p+1)$$

d'où finalement

$$g(a) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_0(1+i\nu)\ \frac{\nu}{\operatorname{sh}\nu\frac{\pi}{2}}\, d\nu + \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p\, p\, \hat{h}_0(2p+1) \ .$$

b) Supposons maintenant que la fonction g soit impaire $(g(-x) = -g(x))$. Dans ce cas, h est impaire et $\hat{h}_0 = 0$. La méthode est la même que dans le cas d'une fonction paire. Indiquons seulement les principales étapes du calcul.

Nous avons

$$\hat{h}_1(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(\cos\theta)\ \frac{\sin(s-1)(\theta-\frac{\pi}{2})}{s-1}\, d\theta$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos(s-1)\ \frac{\pi}{2}\int_0^\infty h(\operatorname{ch} r)\ \frac{\operatorname{sh}(s-1)r}{s-1}\, dr \ .$$

Posons

$$H_1(1+i\nu) = -\frac{2}{\pi}\operatorname{ch}\nu\frac{\pi}{2}\int_0^\pi h(\operatorname{ch} r)\ \frac{\sin\nu r}{\nu}\, dr \ .$$

Nous obtenons

$$4\pi\ g(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi\nu}{2}^2\ \frac{H_1(1+i\nu)}{\operatorname{ch}\nu\frac{\pi}{2}} + h(1)\right] d\nu$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_1(1+i\nu)\ \frac{\nu^2}{\operatorname{ch}\nu\frac{\pi}{2}}\, d\nu$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[h(1) + \frac{1}{2}\ \frac{\nu^2}{\operatorname{ch}\nu\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi h(\cos\theta)\ \frac{\operatorname{sh}\nu\,(\theta-\frac{\pi}{2})}{\nu}\, d\theta\right] d\nu \ .$$

Or, nous avons

$$\frac{1}{2}\,\frac{\nu^2}{\mathrm{ch}\,\nu\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\cos\theta\,\frac{\mathrm{sh}\,\nu\,(\theta-\frac{\pi}{2})}{\nu}\,d\theta=\frac{1}{1+\nu^2}-1$$

d'où

$$4\pi\ g(a)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_1(1+i\nu)\,\frac{\nu^2}{\mathrm{ch}\,\nu\frac{\pi}{2}}\,d\nu+h(1)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{1}{2}\,\frac{\nu^2}{\mathrm{ch}\,\pi\frac{\nu}{2}}\int_0^{\pi}[h(\cos\theta)-h(1)\cos\theta]\,\frac{\mathrm{sh}\,\nu\,(\theta-\frac{\pi}{2})}{\nu}\,d\theta\}d\nu\ .$$

Pour le calcul de la deuxième intégrale, il est possible d'intervertir l'ordre des intégrations. Comme

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nu\,\frac{\mathrm{sh}\,\nu\,(\theta-\frac{\pi}{2})}{\mathrm{ch}\,\pi\,\frac{\nu}{2}}\,d\nu=-\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

nous obtenons

$$4\pi\ g(a)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_1(1+i\nu)\,\frac{\nu^2}{\mathrm{ch}\,\nu\frac{\pi}{2}}\,d\nu+h(1)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[h(\cos\theta)-h(1)\cos\theta]\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta\ .$$

D'autre part,

$$\hat{h}_1(2p+2)=\frac{(-1)^p}{(2p+1)\pi}\int_0^{\pi}\cos(2p+1)\theta\ h(\cos\theta)d\theta\ .$$

En utilisant le développement en série de Fourier de $h(\cos\theta)$, nous obtenons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[h(\cos\theta)-h(1)\cos\theta]\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta=2\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p(2p+1)\,\hat{h}_1(2p+2)\times[\pi-(2p+1)\pi]\ .$$

D'où, finalement,

$$4\pi\ g(a)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_1(1+i\nu)\,\frac{\nu^2}{\mathrm{ch}\,\nu\frac{\pi}{2}}\,d\nu+2\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p(2p+1)^2\,\hat{h}_1(2p+2)\ .$$

COROLLAIRE II.4. (Formule de Plancherel). <u>Soit</u> f <u>une fonction de</u> $\mathcal{D}(X)$

$$\int_X |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Phi^0_{1+i\nu}(f,\bar{f}) \, \frac{\nu}{\operatorname{sh} \nu \frac{\pi}{2}} \, d\nu$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \, p \, \Phi^0_{2p+1}(f,\bar{f})$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \Phi^1_{1+i\nu}(f,\bar{f}) \, \frac{\nu^2}{\operatorname{ch} \nu \frac{\pi}{2}} \, d\nu$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (2p+1)^2 \, \Phi^1_{1+i\nu}(f,\bar{f}) \; .$$

Si f est une fonction de $\mathcal{D}(X)$, nous pouvons écrire

$$f = f_1 * m_H$$

où f_1 est une fonction de $\mathcal{D}(G)$. Posons

$$g = \tilde{f}_1 * f_1 * m_H \; , \quad (\tilde{f}_1(u) = \overline{f_1(u^{-1})}) \; .$$

La fonction g appartient à $\mathcal{D}(X)$ et

$$g(a) = \int_X |f(x)|^2 dx \; .$$

De plus, si $h = Mg$,

$$\hat{h}_0(s) = \Phi^0_s(f,\bar{f})$$

$$\hat{h}_1(s) = \Phi^1_s(f,\bar{f}) \; .$$

La formule de Plancherel s'obtient en appliquant la formule d'inversion à la fonction g .

B I B L I O G R A P H I E

[1] J. FARAUT — Noyaux sphériques sur un hyperboloïde à une nappe. Prépublication, Tunis (1974).

[2] I.M. GUELFAND, M.I. GRAEV, N.J. VILENKIN — Les distributions. Tome 5. Dunod, Paris (1970).

[3] K. MAURIN — General eigenfunctions expansions and unitary representations of topological groups. Warszawa (1968).

[4] P.D. METHEE — Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. Commentarii Mathematici Helvetici, 28 (1954), p. 225-269.

[5] V.F. MOLCANOV — Harmonic analysis on a hyperboloïd of one sheet. Soviet. Math. Dokl. 7 (1966), p. 1553-1556.

[6] V.F. MOLCANOV — Analogue of the Plancherel formula for hyperboloïds. Soviet Math. Dokl. 9 (1968), p. 1382-1385.

[7] T. SCHINTINI — On the decomposition of regular representation of the Lorentz group on a hyperboloïd of one sheet. Proc. Japan Acad. 43 (1967), p. 1-5.

[8] R.S. STRICHARTZ — Harmonic analysis on hyperboloïds. J. of Functional Analysis, 12 (1973), p. 341-383.

[9] N.J. VILENKIN — Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Dunod, Paris (1971).
