

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

C. ITZYKSON

Champs de jauge sur un réseau

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1974, tome 21
« Conférences de : Y. Colin de Verdière, J. Faraut, D. Iagolnitzer, C. Itzykson, C.V. Stan-
jevic et W. Thirring », , exp. n° 5, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1974__21__A5_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAMPS DE JAUGE SUR UN RESEAU

par

C. ITZYKSON

En théorie des champs comme en mécanique statistique, s'introduisent naturellement des intégrales fonctionnelles. Il y a eu récemment des tentatives pour aborder le calcul de ces dernières en approchant les fonctions définies sur un espace temps continu à quatre dimensions, par leurs valeurs sur un réseau discret, de pas a . Ici nous avons en vue une théorie euclidienne qui implique un prolongement à une variable de temps imaginaire pure, afin de faire jouer à toutes les variables un rôle analogue. Wilson [1] a démontré qu'il est possible de formuler sur un tel réseau un problème possédant une invariance de jauge de seconde espèce. Nous avons consacré en compagnie de J.M. Drouffe et R. Balian à Saclay trois articles à l'étude de ce modèle [2] qui sera décrit ci-dessous dans le langage de la mécanique statistique. Donnons d'abord un tableau des équivalences ($\beta = (kT)^{-1}$)

Mécanique statistique	Théorie euclidienne des champs
Somme sur les configurations	Intégrale de chemin - Wiener-Kac-Feynman
$\beta \times$ énergie d'une configuration	Action classique
$\beta \times$ énergie libre	Fonctionnelle génératrice des fonctions de Green-connexes
Champ magnétique	Source extérieure classique
Magnétisation	Variable conjuguée de Legendre de la source classique, c'est-à-dire champ classique
Développement à basse température	Théorie des perturbations
Développement à haute température	
Transitions de phase	

Les modèles de mécanique statistique auxquels nous faisons allusion sont ceux qui ont été développés d'abord dans le contexte du ferro-magnétisme - modèle d'Ising ($n = 1$) et d'Heisenberg classique ($n \geq 2$).

Sur un réseau d-dimensionnel hypercubique, les variables dynamiques sont des vecteurs de longueur unité à n-dimensions, disposés aux noeuds du réseau, et la fonction de partition s'écrit

$$(1) \quad Z = \int \prod_x dk_x \exp\{\beta_\ell \sum_{(xy)} k_x^T \cdot K_y\}$$

$dk =$ mesure unitaire sur la sphère S_{n-1} .

L'énergie d'une configuration implique les produits scalaires des variables dynamiques en des sites voisins. Nous notons β_ℓ le produit de β par la constante de couplage et posons :

$$(2) \quad F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z$$

$N : L^d =$ taille du système, F à un facteur près : énergie libre.

Le modèle possède une invariance globale suivant les transformations du groupe orthogonal $O(n)$. Ce modèle est généralisé par l'introduction d'un champ de jauge $(x,y) \rightarrow O_{xy} \in O(n)$, où xy désigne un lieu orienté et $O_{xy}^{-1} = O_{yx}$. Soit χ le caractère réel d'une représentation irréductible de $O(n)$. Nous écrivons maintenant (dO mesure de Haar unitaire sur $O(n)$),

$$(3) \quad Z = e^{NF(\beta_\ell, \beta_p)} \int \prod_n dk_x \sum_{(xy)} dO_{xy} \exp\{\beta_\ell \sum_{(xy)} k_x^T O_{xy} k_y + \beta_p \sum_{(xyzt)} \chi(O_{xy} O_{yz} O_{zt} O_{tx})\}.$$

La somme sur les caractères est choisie de manière à respecter l'invariance locale

$$k_x \rightarrow O_x k_x, \quad O_{xy} \rightarrow O_x O_{xy} O_y^{-1}.$$

Elle implique une sommation sur tous les circuits élémentaires à 4 voisins $(xyzt)$ que nous appelons des plaquettes. Ce modèle généralise sur un réseau la théorie des champs de Yang-Mills. Pour cela notons (dans la limite $a \rightarrow 0$)

$$O_{xy} = T \exp ie \int_x^y du_{\alpha} \hat{A}_{\alpha}(u)$$

(T : opérateur d'ordre le long du segment infinitésimal xy) où \hat{A}_{α} désigne un vecteur à valeur dans l'algèbre de Lie de $O(n)$. Alors il est aisé de voir que ($y = x + an_{\mu}$)

$$k_x^T O_{xy} k_y = 1 - \frac{a^2}{2} (D_{\mu} k(x)^T)(D_{\mu} k(x)) + \dots \quad (D_{\mu} k)(x) = (\partial_{\mu} - ie \hat{A}_{\mu}(x))k(x)$$

$$\chi(O_{xy} O_{yz} O_{zt} O_{tx}) = C_1 - \frac{1}{2} a^4 e^2 C_2 \sum_{\alpha} (F_{\mu\nu}^{\alpha})^2 + \dots$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\alpha} \lambda_{\alpha} = \partial_{\mu} \hat{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \hat{A}_{\mu} + ie[\hat{A}_{\mu}, \hat{A}_{\nu}],$$

λ_{α} base de l'algèbre de Lie de $O(n)$ choisie pour diagonaliser la forme de Killing, C_1, C_2 constantes dépendant du caractère χ , $(\mu\nu)$: direction de la plaquette (xyzt). En reportant ces expressions dans (3) on reconnaît qu'à des constantes près l'énergie d'une configuration s'identifie à l'action de la théorie des champs après ajustement des constantes de couplage

$$S = - \int dx \frac{1}{2} \{ D_{\mu} k^T \cdot D_{\mu} k \} + \frac{1}{4} \{ \sum_{\alpha} F_{\mu\nu}^{\alpha} F_{\mu\nu}^{\alpha} \}.$$

En particulier, on notera que $\beta_{\ell} \sim e^{-2}$ et que si on considère que le fait d'imposer à k d'être unitaire équivaut à l'introduction d'un potentiel, β_{ℓ} est lui aussi inversement proportionnel à une constante de couplage. Si $\beta_{\ell} = 0$ le modèle de jauge est trivialement soluble en dimension 2 où les variables $O_p = O_{xy} O_{yz} O_{zt} O_{tx}$ sont indépendantes et F ne présente aucune singularité.

Exemple $n = 2, d = 2$

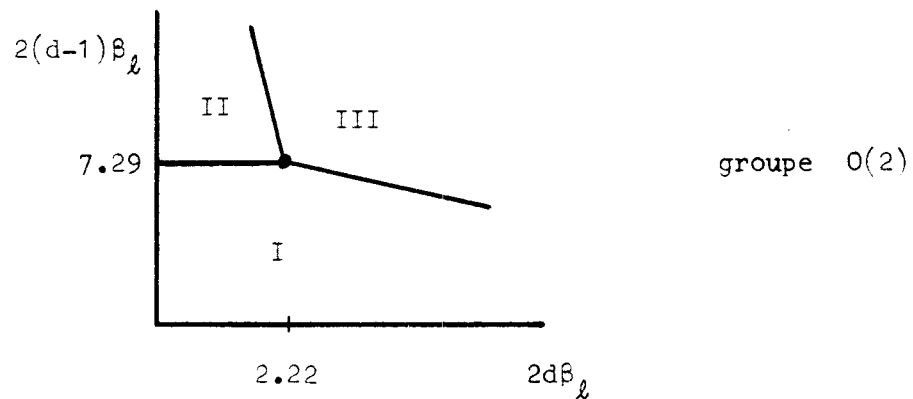
$$(4) \quad \begin{cases} Z = \int \sum_{(xy)} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp \beta_p \sum \cos(\varphi_{xy} + \varphi_{yz} + \varphi_{zt} + \varphi_{tx}) \\ F = \log I_0(\beta_p) \end{cases} \quad I_0 \text{ fonction de Bessel modifiée.}$$

On remarque dans ce cas que, si C désigne une courbe simple fermée sur le réseau, la valeur moyenne du produit des O_{xy} suivant les liens du réseau appartenant à C est proportionnelle à l'aire S bordée par C

$$(5) \quad C = \langle \chi_C(\prod_{xy} O_{xy}) \rangle = \left(\frac{I'_O(\beta_p)}{I_O(\beta_p)} \right) S$$

Dans cette même dimension et pour ce même groupe, on ne connaît pas de solution exacte pour le problème couplé.

Il est possible, en revanche, de développer une approximation conséquente en grande dimension, c'est celle du champ moyen [2]. Les résultats en sont résumés dans le diagramme de phase ci-dessous :



La courbe séparant la phase I (désordonnée) des phases II et III est celle d'une transition du 1er ordre (avec discontinuité des dérivées de F), celle qui sépare la phase II (champ de jauge ordonné) de la phase III (totalement ordonnée), celle d'une transition du 2me ordre. Cette dernière courbe est asymptote pour $\beta_p \rightarrow \infty$ à la valeur prédite par le champ moyen pour la transition du pur champ k à $2d\beta_\ell = 2$. En effet lorsque $\beta_p \rightarrow \infty$ seuls subsistent efficacement dans l'intégrale les termes tels que

$$\chi(O_{xy} O_{yz} O_{zt} O_{tx})$$

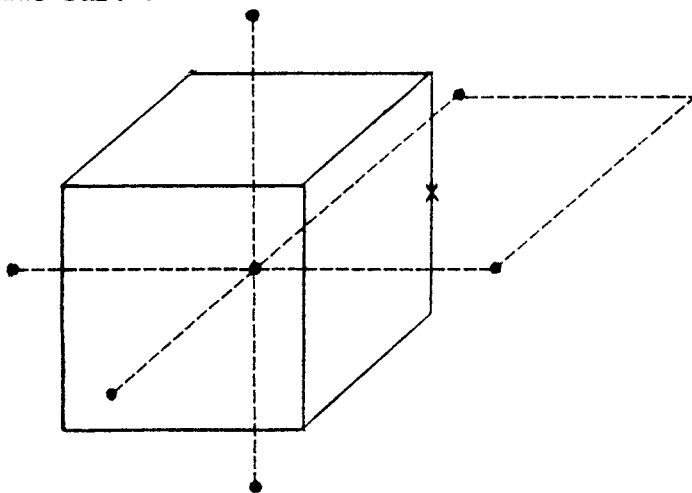
soit maximum pour toute plaquette, ce qui implique que $O_{xy} = O_x^{-1} O_y$ et en redéfinissant $k_x \rightarrow k'_x = O_x^{-1} k_x$ on retombe sur un modèle de Heisenberg classique pur.

La prédiction de l'approximation du champ moyen d'une transition du premier ordre pour le champ de jauge a aussi été notée par Wilson [1]. Nous allons voir cependant que dans le seul cas où on connaisse un résultat quasi-certain sur la nature de cette transition, en dimension basse, il est vrai, la transition est du second ordre ! Pour chercher des résultats plus précis, nous nous sommes restreints au cas du groupe de jauge discret $O(1) \sim Z_2$ à deux éléments ± 1 . Après une transformation de jauge, la fonction de partition prend la forme simplifiée

$$(6) \quad Z = 2^{-Nd} \sum_{\{A_{ij} = \pm 1\}} \exp\left\{ \beta_\ell \sum_{(\ell)} (A_{ij}) + \beta_p \sum_p (A_{ij} A_{jk} A_{kl} A_{li}) \right\} .$$

Notre raisonnement est fondé sur une transformation de dualité, comme dans le cas du modèle d'Ising à deux dimensions, généralisée récemment par Wegner [3].

Pour simplifier, exposons le cas $d = 3$. Nous introduisons un réseau dual obtenu par une translation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ à partir du réseau original. Il existe alors une correspondance naturelle entre un site, une arête, une plaquette, un cube du réseau initial et un cube, une plaquette, une arête et un site du réseau dual. Par exemple, une arête est associée à la plaquette du réseau dual qu'elle intersecte. Cette construction se généralise immédiatement en dimension arbitraire. Elle est utilisée comme suit :



(i) si d = 2 .

Nous développons (6) en

$$Z = 2^{-2N} (\text{ch } \beta_\ell)^N \text{ch } \beta_p^{2N} \sum_{\{A_{ij} = \pm 1\}} \prod_{\ell} (1 + \text{th } \beta_\ell A_{ij}) \prod_p (1 + \text{th } \beta_p A_{ij} A_{jk} A_{kl} A_{li})$$

et nous effectuons les sommes sur les variables $A_{ij} = \pm 1$. Les termes restants sont en correspondance biunivoque avec des configurations de P plaquettes distinctes choisies sur le réseau. La frontière de ces P plaquettes est l'ensemble des liens qui appartiennent à un nombre impair de plaquettes. Soit L le nombre de ces liens. La contribution est alors $\text{th } \beta_\ell^L \text{ th } \beta_p^P$. Si une plaquette appartient à la configuration, posons $S_i = -1$ sur le site du réseau dual correspondant et $S_i = +1$ autrement. Alors

$$P = \sum_i \frac{1 - S_i}{2}, \quad L = \sum_\ell \frac{1 - S_i S_j}{2}.$$

De ce fait

$$(7) \quad Z = \left(\frac{1}{4} \text{ch } \beta_p \text{ch}^2 \beta_\ell \right)^N \sum_{\{S_i = \pm 1\}} \exp \left\{ \sum_\ell \log \text{th } \beta_\ell (1 - S_i S_j) + \sum_i \frac{1}{2} \log \text{th } \beta_p (1 - S_i) \right\}$$

la sommation portant maintenant sur les sites et arêtes du réseau dual, isomorphe (aux effets de bord près) au réseau initial. A un facteur près nous reconnaissons la fonction de partition Z_I d'un modèle d'Ising à deux dimensions dans un champ extérieur proportionnel à $\log \text{th } \beta_p$. Donc pour β_p fini, F est analytique.

Pour $\beta_p \rightarrow \infty$, nous retrouvons la transition du modèle d'Ising seul dans la variable $\log \text{th } \beta_\ell$ comme expliqué ci-dessus.

$d = 3$. En répétant les raisonnements ci-dessus, nous trouvons en dimension trois que le modèle couplé est self-dual. La relation précise étant

$$(8) \quad F(\beta_\ell, \beta_p) = \frac{3}{2} \log(\text{sh } 2\beta_\ell \text{sh } 2\beta_p) + F\left(-\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_p, -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_\ell\right).$$

De cette relation, nous pouvons tirer la constante critique du pur champ de jauge à trois dimensions. En effet, si $\beta_\ell \rightarrow 0$, $-\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_\ell \rightarrow \infty$, or ceci joue le rôle d'un couplage de plaquettes dans l'expression duale. De ce fait, il y a une singularité dans la variable $-\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_p$ pour la valeur prédite par le modèle d'Ising à trois dimensions et calculée par Fischer [4]. Tous calculs faits,

on trouve

$$(9) \quad \beta_c = 0.7613 .$$

Notons que le consensus général veut que le modèle d'Ising tri-dimensionnel ait une transition du second ordre, ce qui serait donc aussi le cas du pur champ de jauge en dimension trois.

d = 4 . On trouve dans ce cas une relation du type

$$F(\beta_\ell, \beta_p) = 2 \log \frac{1}{2} \text{sh } 2 \beta_\ell + 3 \log 2 \text{sh } 2 \beta_p + F_*(\beta_{*\ell}, \beta_{*p})$$

où

$$\beta_{*\ell} = -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_p, \quad \beta_{*p} = -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_\ell$$

$$\exp NF_*(\beta_{*\ell}, \beta_{*p}) = 2^{-6N} \sum_{S_{ijkl} = \pm 1} \exp \left\{ \beta_{*\ell} \sum_{l,p} S_{ijkl} + \beta_{*p} \sum_{p,c} \prod_{\alpha=1}^6 S_{i_\alpha j_\alpha k_\alpha l_\alpha} \right\} .$$

Chaque plaquette $(ijkl)$ du réseau dual porte une variable $s_{ijkl} = \pm 1$. Ces variables sont combinées six par six le long des faces de cubes à trois dimensions pour donner l'interaction $\prod_{\alpha=1}^6 s_{i_\alpha j_\alpha k_\alpha l_\alpha}$. Si comme précédemment $\beta_\ell \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\beta_{*p}^* \rightarrow \infty$, quel que soit le cube, il faut que le produit en question vaille 1 pour que le terme correspondant subsiste dans F . Un théorème élémentaire de cohomologie implique alors que quelle que soit la plaquette $S_{ijkl} = S_{ij} S_{jk} S_{kl} S_{li}$. Il s'en suit une remarquable propriété de symétrie du pur champ de jauge à quatre dimension.

$$(10) \quad F(0, \beta_p) = 3 \log \text{sh } 2 \beta_p + F(0, -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta_p) .$$

Le point fixe de la transformation satisfait à $\beta = -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta$ soit

$$(11) \quad \beta = 0.4407\dots$$

C'est évidemment le meilleur candidat pour un point de transition dont la nature est cependant inconnue.

Dans le troisième article de la référence [2], nous avons développé des méthodes de calcul numérique fondées sur la resommation du développement à haute température (β petit). Ce développement n'a pas d'analogue en théorie des champs, où la limite $\beta \rightarrow 0$ correspondant à une théorie ultra-locale, le terme d'énergie cinétique étant traité perturbativement. La méthode combine un principe variationnel et un calcul perturbatif du noyau à varier. Il se trouve qu'à l'approximation d'ordre zéro les résultats coïncident avec ceux du champ moyen. A titre de comparaison, nous mentionnons le résultat des trois premières approximations pour la constante critique du pur champ de jauge ($O(1) \sim Z_2$) en dimension 4 qui convergent agréablement vers le résultat théorique (11)

	approximation	(1)	(2)	(3)	Exact
(12)	β	0.3355	0.4409	0.4407	0.4407

Nous avons donné par ailleurs dans [2] des valeurs numériques de constante critique pour d'autres groupes de jauge - continus - abéliens et non abéliens - en variant la dimension. Lorsque cette dernière grandit les corrections à l'approximation du champ moyen deviennent faibles.

Paramètre d'ordre et existence de la transition

Pour ce qui suit, nous supprimons le couplage au champ k en posant $\beta_k = 0$. Pour analyser la nature de la transition du pur champ de jauge, il est important de définir un paramètre d'ordre qui aura un comportement qualitativement discontinu au passage de la transition. En raison de la symétrie locale, le choix d'un tel paramètre d'ordre n'est pas immédiat. Le calcul présenté dans le cas soluble de $d=2$ suggère d'introduire la moyenne (thermodynamique) du caractère d'un produit ordonné des variables O_{xy} le long d'une courbe C . Dans le cas très simple où $n=1$, cette moyenne s'écrit :

$$(13) \quad C = \langle \pi_c A_{ij} \rangle .$$

A deux dimensions, nous avons vu que $\log C$ est proportionnel à l'aire S circonscrite par C . Or le cas à deux dimensions peut être considéré comme celui de la phase désordonnée de haute température. En dimension plus grande, nous avons la généralisation de ce fait grâce au théorème suivant [2].

THEOREME. Si $d \geq 3$. Soit S l'aire minimale circonscrite par C (constituée de plaquettes du réseau). Si β ($\equiv \beta_p$) est assez petit, il existe deux constantes positives a_1 et a_2 , telles que

$$(14) \quad a_2 \leq \frac{-\log C}{S} \leq a_1 .$$

La démonstration de ce théorème utilise deux types d'ingrédients. Tout d'abord, une estimation d'un nombre de surfaces à bord C , où le bord est défini par l'ensemble des liens qui appartiennent à un nombre impair de plaquettes de la surface. Ces surfaces généralisent les "self avoiding walks" du problème d'Ising à deux dimensions, qui avaient été estimées par Fisher [5]. Notre méthode, assez semblable à la sienne, doit surmonter le handicap qu'une telle surface ne peut être ordonnée, à la différence d'un chemin unidimensionnel. Le second type d'argument est fondé sur les inégalités de Griffiths-Kelly-Sherman [6].

Par ailleurs, nous obtenons une estimation (grossière) du domaine dans lequel les inégalités (14) sont satisfaites ce qui fournit une borne inférieure à la constante critique :

$$(15) \quad \text{th } \beta_c \geq \frac{1}{2d-3} .$$

On vérifie sur les exemples donnés que cette inégalité est bien satisfaite, il est amusant d'observer que pour $d = 2$, elle implique l'absence de transition. Enfin, lorsque $d \rightarrow \infty$, cette borne est en accord avec la prédiction $\beta_c \sim \frac{1}{2d}$ du

champ moyen. Pour compléter ce théorème, et par la même fournir une démonstration rigoureuse de l'existence de la transition, il serait suffisant de montrer que pour β assez grand, $\log C$ ne se comporte pas comme l'aire S . Nous n'avons pas réussi exactement dans cette tâche bien que nous ayons obtenu certains résultats dans cette direction. En effet, il suffit, en vertu des inégalités G.K.S. [6], de démontrer la propriété en dimension trois. Dans ce cas la transformation de dualité nous permet de relier la moyenne C à une quantité évaluée pour un modèle d'Ising équivalent de constante de couplage $-\frac{1}{2} \log \text{th } \beta \equiv \beta^*$. Si β est grand, β^* est petit, on peut espérer utiliser un développement en β^* . Plus précisément, il se trouve que

$$(16) \quad C = \exp - \{ \mathfrak{F}(\beta^*) - \mathfrak{F}'(\beta^*) \}$$

où \mathfrak{F} est l'énergie libre totale (et non par site) du modèle d'Ising équivalent, et \mathfrak{F}' la même quantité où l'on inverse le signe des couplages pour tous les liens transverses à une surface arbitraire s'appuyant sur C . On peut donner un développement en puissances de β^* de $\log C$ qui fait intervenir des chemins fermés tournant un nombre impair de fois autour de la courbe C . L'évaluation du nombre de ces chemins fait chaque fois intervenir un facteur proportionnel à la longueur L de C . Autrement dit, perturbativement tous les termes du développement de $\log C$ en puissances de β^* sont proportionnels à L .

Malheureusement, nous ne sommes pas parvenus à montrer que la série converge ! En résumé, il y a de bonnes raisons de penser que pour β assez grand, $C > \exp - \text{const} \times L$, pour $d = 3$ et donc aussi en dimension plus grande.

Ces résultats, dont une partie sont donc démontrés pour le groupe $O(1)$, se généralisent vraisemblablement aux autres groupes de jauge. Dans cet exposé, nous nous sommes bornés à présenter le cas des groupes orthogonaux. Rien n'empêche d'étendre le formalisme à un groupe compact arbitraire.

L'interprétation physique qui est suggérée est que lorsque la constante de couplage devient assez grande ($\beta \alpha \frac{1}{e^2}$ assez petit), le comportement des champs de jauge engendre des forces très grandes à longue portée susceptibles de fournir un mécanisme de confinement pour des particules chargées qui y seraient immergées. Un tel mécanisme serait le bienvenu aux yeux des physiciens qui aimeraient expliquer la structure des particules en termes de constituants élémentaires (quarks...) inobservables à l'état libre.

Un grand nombre de problèmes restent cependant ouverts dont nous pouvons dresser une liste (non exhaustive) :

- i) achever la démonstration de la transition de phase pour le modèle Z_2 ;
- ii) obtenir la forme analytique de l'énergie libre dans le cas symétrique (groupe Z_2 , $d = 4$) (??) ;
- iii) montrer que les résultats s'étendent au cas des groupes continus ;
- iv) démontrer que la théorie du champ moyen devient exacte à la limite $d \rightarrow \infty$ (ceci même dans le cas plus simple des systèmes ayant seulement une symétrie globale comme le modèle d'Ising) ;
- v) examiner l'effet de l'introduction de champs de fermions. Existe-t-il dans ce cas une solution exacte pour le modèle couplé dans le cas d'un groupe continu comme $O(2)$ en dimension 2, analogue à la solution de Schwinger pour l'électrodynamique à deux dimensions ?
- vi) étudier le passage à la limite continue et retrouver les prescriptions de calcul de la théorie des champs Yang Mills renormalisée perturbativement (??). Des résultats de cet ordre ont été récemment obtenus par E. Brezin et J. Zinn Justin dans le cas plus simple du modèle d'Ising.

