Paul Krée

Théorie des prodistributions et applications à la physique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1975, tome 22
« Exposés de : H. Araki, H.J. Borchers, J.P. Ferrier, P. Krée, J.F. Pommaret, D. Ruelle, R. Stora et A. Voros », , exp. n° 3, p. 1-60
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1975__22__A3_0>

THEORIE DES PRODISTRIBUTIONS ET APPLICATIONS A LA PHYSIQUE

Par Paul KREE (Université de Paris VI)

Soit k un nombre entier $\geqslant 0$ ou égal à $+\infty$. Soit X une variété banachique réelle de classe $\mathcal{C}^k$ modelée sur un espace de Banach. On suppose X muni d'une famille $(R_i)_{i \in I}$ de relations d'équivalence.

On pose $X_i = X / R_i$ et l'on note s_i la surjection canonique de X sur X_i. Si R_i entraine R_j, ce que l'on note $i \geqslant j$, on a alors une sujection canonique σ_{ij} de X sur X_j. Les axiomes vérifés par (R_i) seront précisés en (22) mais on suppose que l'ordre $\geqslant$ est filtrant croissant et que chaque X_i est de dimension finie. Une fonction numérique sur X est dite cylindrique si elle se factorise à travers un espace X_i, c'est-à-dire si elle s'écrit $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$ pour un certain i, φ étant définie sur X_i.

La théorie quantique des champs fait intervenir des fonctions et des promesures définies sur X, desstructures hilbertiennes sur des espaces de telles "fonctions", des équations ou systèmes différentiels vérifiés par ces "fonctions". De même l'étude des phénomènes de fluctuations et des solutions stochastiques d'équations aux dérivées partielles relatives à $\mathbb{R}^4$ conduit à l'écriture d'équations aux dérivées fonctionnelles (e.d.f.) vérifiées par la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur X. Il y a encore d'autres exemples en géométrie différentielle (variété des lacets d'une variété riemannienne) et en mécanique statistique.

Nous suivons la méthode suivante pour étudier ces problèmes ([20]).

A) Définition et étude des prodistributions sur X, ou systèmes cohérents de distributions sur les espaces X_i ; et interprétation de ces systèmes cohérents (ou projectifs) comme formes linéaires sur certains espaces $F_{cyl}(X)$ de fonctions cylindriques.

B) Complétion de ces espaces pour certaines topologies et introduction du dual $F'(X)$ de $F_{cyl}(X)$ ainsi topologisé. Il se pose alors un problème du choix de ces topologies, de façon à obtenir un complété suffisamment riche $\widehat{F_{cyl}}(X)$ de $F_{cyl}(X)$. Comme la seule considération de fonctions cylindriques est insuffisante dans les applications, l'étape a) doit être considérée comme une étape préliminaire, fournissant seulement un cadre facilitant les applications ultérieures.

C) Association à chaque e.d.f. linéaire d'un opérateur linéaire de $\widehat{F_{cyl}}(X)$ et de l'opérateur linéaire transposé opérant dans $F'_{cyl}(X)$. Application des théorèmes d'analyse fonctionnelle à cette situation de dualité.

L'intérêt pratique de cette méthode est de remplacer une situation peu maniable en dimension infinie par un système cohérent de situations simples bien connues relatives à la dimension finie. On peut ainsi "remonter" du fini à l'infini. Citons à ce propos la technique très efficace consistant à utiliser des systèmes infinis d'inégalités relatives à la dimension finie, les constantes intervenant dans un tel système étant indépendantes de la dimension.

La mise en forme de cette idée n'est pas encore achevée. En effet, les applications visées correspondent à des raisonnements qui sont tous rendus possibles en dimension finie par la théorie des distributions. Mais en dimension infinie, ce concept se diversifie en six concepts différents :

1. - Notion de promesures (de signe quelconque) et plus généralement de prodistributions. D'où un cadre agréable pour définir les opérations usuelles, sauf la dérivation.

2. - Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la dérivée $D^{\ell}T$ d'ordre ℓ est définie par la collection des distributions :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} T \qquad \text{avec } |\alpha| = \Sigma\alpha_j = \ell .$$

Cette technique ne permet pas de définir les dérivées d'une prodistribution. D'où la necessité d'introduire la notion de protenseur distribution ou systèmes cohérents de tenseurs distributions sur les X_i.

3. - Sur $\mathbb{R}^n$, toute distribution d'ordre zéro est une mesure. Et sur un Banach X , il est bien connu que toute probabilité cylindrique n'est pas forcément une mesure σ - additive sur X . D'où la necessité d'introduire des classes particulières de prodistributions. Il en est ainsi par exemple de l'espace $\mathcal{B}'^k(X)$ des distributions bornées d'ordre k ; toute T de $\mathcal{B}'^k(X)$ définissant une forme linéaire sur un espace contenant l'ensemble $\mathcal{B}^k(X)$ des fonctions k fois continuement Frechet dérivables à dérivées bornées jusqu'à l'ordre k . Ainsi si $k = 0$, on retrouve l'espace $\mathcal{B}'^o(X)$ des mesures de Radon bornées sur X .

4. - De même que 2°) est une généralisation vectorielle de 1°) , la notion de tenseur distribution est une généralisation vectorielle nécessaire de la notion de distribution. Tout tenseur distribution est un protenseur distribution.

5. - Espace du type Sobolev $K^s(X)$ avec s réel quelconque ; ces espaces ont été introduits d'abord par Frolov dans le cas particulier où s est un entier positif.

6. - Espaces de Sobolev vectoriels $K^s(X, \ell)$.

Dans l'exposé oral nous avions tenté de donner un aperçu de toute cette théorie et de ses applications mais ceci est impossible dans ce texte.

Nous nous contentons donc de donner un aperçu du formalisme des prodistributions. Nous insistons sur le partie concernant l'intégration et les classes de Lebesgue L^p car ces notions sont très utilisées en théorie constructive des champs sous des formes diverses.

On montre aussi comment l'on peut donner un sens précis aux opérateurs différentiels à une infinité de variables utilisés en seconde quantification et trouver des domaines de définition maximaux de certains opérateurs non bornés.

La théorie des distributions sur les espaces de Banach n'est pas du tout abordée ici. Le lecteur désirant un aperçu général de cette théorie et de ses applications pourra consulter [25] .

Rappels sur la théorie des distributions en dimension finie [32]

On va surtout insister sur l'aspect géométrique, c'est-à-dire qu'on ne supposera pas que l'espace réel X_i de dimension finie ni sur lequel on travaille, est muni d'une mesure de Lebesgue fixée, ou qu'il est rapporté à une base fixée.

L. SCHWARTZ définit une distribution T_i sur X_i comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(X_i) = \mathcal{E}^{\infty}_{o}(X_i)$. Comme la théorie de l'intégration fournit une forme bilinéaire de dualité entre fonctions numériques et mesures, <u>une distribution T_i sur X_i n'est pas une fonction généralisée, mais une mesure généralisée.</u>
Si d'ailleurs on voulait définir des fonctions généralisées comme formes linéaires continues sur un certain espace vectoriel topologique E , on peut utiliser l'espace E des formes différentielles à support compact et de degré maximum : voir [17] .

(1) Distribution bornées

Soit k un nombre entier positif ou égal à $+\infty$ et soit Ω un ouvert de X_i .
On va définir l'espace $\mathcal{B}'^{k}(\Omega)$ des distributions bornées d'ordre au plus k sur Ω (ces distributions sont dites "intégrables"dans [32] ; on modifie donc ici la terminologie de L. SCHWARTZ). A cet effet, pour tout ℓ compris entre 0 et k , on note $\mathcal{D}^{o}(\Omega), \ell)$ l'espace des fonctions fonctinues sur Ω à support compact, et à valeurs dans $\underset{\ell}{\odot} X_i'^{c}$. Cet espace de dimension finie étant muni d'une norme quelconque, on munit $\mathcal{D}^{o}(\Omega, \ell)$ de la norme de la convergence uniforme. C'est un sous-espace normé de l'espace normé $\mathcal{B}^{o}(\Omega, \ell)$ des fonctions continues bornées sur Ω à valeurs dans $\underset{\ell}{\odot} X_i'^{c}$.
On a une injection naturelle

(2) $$\mathcal{D}^{k}(\Omega) \longrightarrow \prod_{l=o}^{k} \mathcal{D}^{o}(\Omega,\ell)$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi, D\varphi , \ldots , D^{k}\varphi)$$

de $\mathcal{D}^{k}(\Omega)$ dans le produit des espaces normés $\mathcal{D}^{o}(\Omega, \ell)$. On définit $\mathcal{B}'^{k}(\Omega)$ comme le dual de $\mathcal{D}^{k}(\Omega)$ muni de la topologie induite par ce produit.
Si $k = +\infty$, on écrit $\mathcal{B}'(\Omega)$ au lieu de $\mathcal{B}'^{\infty}(\Omega)$. Vu le théorème de Hahn Banach, pour toute $T \in \mathcal{B}'^{k}(\Omega)$, il existe k' fini $\leq k$ et des mesures bornées vectorielles $\mu_\ell \in \mathcal{B}'^{o}(\Omega, \ell)$ à valeurs dans $\underset{\ell}{\odot} X_i^{c}$ telles que

(3) $$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{k}(\Omega) \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{\ell=o}^{k} < \mu_\ell , D^{\ell}\varphi \rangle .$$

Or pour tout $\ell = 1 , , \ldots , k'$, l'opérateur de divergence

(4) $$\mathcal{D}'(\Omega, \underset{\ell}{\odot} X_i^c) \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{D}'(\Omega_i, \underset{\ell-1}{\odot} X_i^c)$$

est au signe près, le transposé de l'opérateur de dérivation

(5) $$\mathcal{D}(\Omega_i , \underset{\ell-1}{\odot} X'^c_i) \xrightarrow{D} \mathcal{D}(\Omega_i , \underset{\ell}{\odot} X'^c_i) .$$

D'où $$\langle \mu_\ell , D^\ell \varphi \rangle = - \langle \text{div}\, \mu_\ell , D^{\ell-1} \varphi \rangle .$$

En itérant ℓ fois ce procédé, on obtient finalement

$$\langle \mu_\ell , D^\ell \varphi \rangle = (-1)^\ell \langle \text{div}_\ell\, \mu_\ell , \varphi \rangle .$$

En reportant dans (3), on obtient

(6) $$T = \sum_{\ell=o}^{k'} (-1)^\ell \,\text{div}_\ell\, \mu_\ell$$

cette égalité étant une égalité au sens des distributions vectorielles sur Ω . Si maintenant on rapporte X_i à une base, chaque mesure vectorielle bornée μ_ℓ $\Omega \to \underset{\ell}{\odot} X_\ell^c$ est caractérisée par la collection de ses composantes, autrement dit par une collection de mesures scalaires bornées, $\underset{\ell}{\odot} X_i^c$ étant rapporté à la base associée à la base choisie dans X_i . Donc, en trouve au lieu de (6), la représentation suivante de T :

(7) $$T = \sum_{|\alpha| \leq k'} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \mu_\alpha \quad ; \quad \text{avec} \quad \mu_\alpha \in \mathcal{B}'^o(\Omega)$$

c'est la représentation donnée dans [32], et cette représentation est équivalente à (6). L. SCHWARTZ a noté que cette formule permet d'étendre canoniquement toute $T \in \mathcal{B}'^k(\Omega)$ en une forme linéaire sur le sous-espace $\mathcal{B}^k(\Omega)$ de $\mathcal{E}^k(\Omega)$, formé par les fonctions dont chaque dérivée d'ordre au plus k est uniformément bornée sur Ω . C'est ce fait qui motive la notation $\mathcal{B}'^k(\Omega)$ et la modification de la terminologie de [32].

(8) Remarque -

Si Ω est un ouvert d'un espace de Banach de dimension infinie, l'espace $\mathcal{D}^k(\Omega)$ est nul. En vue des applications à la dimension infinie, il est intéressant de définir $\mathcal{B}'^k(\Omega)$ en se passant de $\mathcal{D}^k(\Omega)$. On cherche donc à définir $\mathcal{B}'^k(\Omega)$ comme dual de $\mathcal{B}^k(\Omega)$ muni d'une topologie convenable t^k .

A cet effet, on utilise l injection naturelle

$$\mathcal{B}^k(\Omega) \longrightarrow \prod_{\ell=0}^{k} \mathcal{B}^{o}(\Omega, \ell)$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi, D\varphi, \ldots, D^k\varphi) .$$

Munissant $\mathcal{B}^k(\Omega)$ de la topologie t^k induite par la topologie produit , on est amené à chercher pour tout ℓ une topologie localement convexe θ_ℓ sur $\mathcal{B}^o(\Omega, \ell)$ de façon que le dual de $\mathcal{B}^o(\Omega, \ell)$ ainsi topologisé soit l'espace $\mathcal{B}'^{o}_{s}(\Omega, \ell)$ des mesures de Radon bornées sur Ω à valeurs dans $\bigodot_\ell X_i^c$. Il suffit d'utiliser des résultats connus sur la théorie des mesures de Radon (voir [9] par exemple) : on peut prendre pour θ_ℓ la topologie localement convexe la plus fine qui coincide sur la boule unité B_ℓ de $\mathcal{B}^o(\Omega, \ell)$ avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de Ω .

(9) Image d'une distribution par une application $\mathcal{E}^\infty$

Soit $T \in \mathcal{D}'(X_i)$ et s_{ij} une application $\mathcal{E}^\infty$ de X_i dans l'espace vectoriel réel X_i de dimension finie. On définit usuellement la distribution $s_{ij}(T)$ en supposant que l'application s_{ij} est propre. Ce résultat est inutilisable ici puisque s_{ij} sera linéaire surjective, et non bijective en général.

a) Si T est une distribution bornée et si chaque dérivée $D^\ell s_{ij}$ de s_{ij} est uniformément bornée sur X_i , alors la définition de $s_{ij}(T)$ s'effectue en transposant l'application linéaire continue

(10) $$(\mathcal{B}(X_j), t^\infty) \longrightarrow (\mathcal{B}(X_i), t^\infty)$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi \circ s_{ij} .$$

Autrement dit, on pose

(11) $$\forall \varphi \in \mathcal{B}(X_j) \quad \langle s_{ij}(T), \varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ s_{ij} \rangle .$$

b) Dans le cas général, utilisant une partition de l'unité sur X_j , on est ramené à définir la restriction U_ω de $U = s_{ij}\ T$ à tout ouvert ω de X_j d'adhérence compacte dans X_j . On peut donc remplacer Ω par $\Omega' = s_{ij}^{\ -1}(\omega)$. Le raisonnement qui précède peut être adapté en supposant que la restriction de T à Ω' est bornée et que toutes les dérivées de s_{ij} sont uniformément bornées sur Ω' . Cette dernière condition est vérifiée si s_{ij} est linéaire.

(12) Remarques sur les opérations relatives aux distributions -

On ne peut jamais faire le produit de convolution de deux fonctions. Mais l'on peut sous certaines conditions définir :

- le produit de convolution de deux distributions, le résultat étant une distribution.

- Le produit de convolution d'une distribution et d'une fonction, le résultat de l'opération étant une fonction.

- Si l'on ne fait pas le choix d'une mesure de Lebesgue sur X_i , la transformée de Fourier (T.F.) d'une distribution sur X_i n'est pas une distribution, mais un être géométrique relatif à X_i' qui a la variance tensorielle d'une fonction.

(13) Espace $\mathcal{O}_M(X_i)$ des fonctions à croissance lente et son dual -

On introduit ci-après des espaces de distributions agissant sur des fonctions non bornées. Dans cette perspective, on recommence la théorie des distributions bornées, mais en introduisant des poids. L. SCHWARTZ a défini l'espace $\mathcal{O}_M(X_i)$ des fonctions à croissance lente sur X_i comme l'espace des $\varphi \in \mathcal{E}^\infty(X_i)$ telles que pour tout ℓ, $D^\ell \varphi$ soit une fonction à croissance lente.

Autrement dit, pour tout ℓ, $D^\ell \varphi \in \varinjlim_{k} \mathcal{L}_k^o\ (X_i, \ell)$ où $\mathcal{L}_k^o\ (x_i, \ell)$ est l'espace des fonctions continues $\psi_\ell : X_i \longrightarrow \bigodot X_i^{'c}$ telles que

$$\|\psi_\ell\| = \sup_x \frac{\|\psi_\ell(x)\|}{1+\|x\|^k} < \infty \ .$$

On peut munir cet espace de la topologie convexe la plus fine coincidant sur la boule $\|\psi_\ell\| \leq 1$ avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties compacts de X_i. Puis l'on peut munir

$$\mathcal{L}^o(X_i, \ell) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^o_k(X_i, \ell)$$

de la topologie limite inductive σ_ℓ. On considère alors le plongement suivant

$$\mathcal{O}_M(X_i) \hookrightarrow \prod_{\ell=0}^{k} (\mathcal{L}^o(X_i, \ell), \sigma_\ell)$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi, D\varphi, D^2\varphi, \ldots, D^k\varphi)$$

et l'on muni $\mathcal{O}_M(X_i)$ de la topologie t^k induite par la topologie produit. Le dual $\mathcal{O}'_M(X_i)$ de cet espace est l'espace des distributions à décroissance très rapide. Ces distributions s'écrivent

(14) $$T = \sum_{j=0}^{k'} (-1)^j \operatorname{div}_j \vec{\mu}_j$$

où chaque μ_j est une mesure vectorielle à décroissance rapide, cela signifie que l'on a pour tout k :

(15) $$\int (1 + \|x\|^k)\, d\,|\mu_j|\,(x) < \infty\ .$$

Naturellement, on peut reprendre ces définitions en remplaçant les poids $x \to 1 + \|x\|^k$ sur X_i par des poids exponentielles ou même plus généraux.

(16) <u>Espace</u> $\mathcal{O}_c(X_i)$ <u>des fonctions $\mathcal{E}^\infty$ à croissance très lente</u>.

A. GROTHENDIECK introduit dans [16] l'espace $\mathcal{O}_c(X_i)$ des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^\infty(X_i)$ qui peuvent s'écrire $\varphi = \psi\,.\,P$ où P est un polynôme de degré arbitraire et où φ appartient à l'espace $\dot{\mathcal{B}}(X_i)$ des fonctions $\mathcal{E}^\infty$ sur X_i dont toutes les dérivées tendent vers 0 à l'infini. On munit $\mathcal{O}_c(X_i)$ d'une topologie de limite inductive stricte car

(17) $$\mathcal{O}_c(X_i) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (1 + \|x\|^2)^k \quad \mathcal{B}_{\bullet}(X_i)$$

$\mathcal{B}_{\bullet}(X_i)$ étant un espace de Fréchet. Le dual de $\mathcal{O}_c(X_i)$ est l'espace des distributions à décroissance rapide sur X_i . Une telle distribution T est telle que pour tout k , il existe un entier k' et des mesures vectorielles $\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_k$, telles que l'on ait (14) et (15). Toute distribution à décroissance très rapide est à décroissance rapide mais la réciproque est fausse :

(18) Lemme-

Soit X_i euclidien de dimension n_i rapporté à une base orthonormée. Pour $\lambda > 0$, on définit la distribution de Feymann sur X_i comme étant la mesure non bornée $\omega_\lambda(x)dx$ de densité

(19) $$\omega_\lambda(x) = (2\pi\lambda\sqrt{-1})^{-\frac{n_i}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\lambda\sqrt{-1}}\right)$$

avec $x = x_1, \ldots, x_n)$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $\|x\|^2 = \sum_1^n x_j^2$.

Alors ω_λ est à décroissance rapide mais n'est pas à décroissance très rapide.

Dans (19), la racine carrée de $2\pi\lambda\sqrt{-1}$ est définie par prolongement continu de la détermination principale de $\sqrt{2\pi z}$ définie dans le demi-plan où $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Démonstration.

Pour $\dim X_i = 1$, ce résultat figure dans [17]

Pour n quelconque, on note que ω_λ est une distribution radiale. Autrement dit, pour $\varphi \in \mathcal{D}(X_i)$ si $\tilde{\varphi}$ est la radialisée de φ , on a

$$\langle \omega , \varphi \rangle = a_n(2\pi\lambda\sqrt{-1})^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{n-1} e^{\frac{r^2\sqrt{-1}}{2}} \tilde{\varphi}(r)\, dr$$

où a_n est l'aire de la sphère unité de X_i . Il suffit alors de faire un nombre suffisant d'intégrations par parties.

2. - PRODISTRIBUTION -

(20) Image d'une distribution par une application $\mathscr{C}^k$.

Soient V_i et V_j deux variétés réelles de dimension finie de classe $\mathscr{C}^k$ et σ_{ij} un morphisme de V_i dans V_j.

(21) On suppose que pour tout ouvert W de V_j d'adhérence compacte, σ_{ij} et ses dérivées d'ordre 1 ... k plus k sont bornées sur $\sigma_{ij}^{-1}(W)$.

On se propose de définir l'image $V = \sigma_{ij}(T)$ par σ_{ij} d'une distribution T sur V_i. Pour cela, on suppose que σ_{ij} est T-propre c'est-à-dire que pour tout $W \Subset V_j$, la restriction de T_i à $\sigma_{ij}^{-1}(W)$ est une distribution bornée.

Dans ces conditions on définit la restriction de U à W_i par :

$$\forall \psi \in \mathscr{D}(W_i) \quad \langle U, \psi \rangle = \langle T, \psi \circ \sigma_{ij} \rangle .$$

La propriété de transitivité s'énonce ainsi:

Soit π une application $\mathscr{C}^k$ de V_j dans V_k telle que X et $\pi \circ \sigma$ vérifient une condition analogue à (21). Alors si σ est T-propre et si $\sigma \circ T$ est T propre, alors π est $\sigma(T)$-propre et $\pi(\sigma(T)) = (\pi \circ \sigma)(T)$. Notons que si σ est T- propre et si π est $\sigma(T)$- propre, ceci n'entraine pas forcément que $\sigma \circ \pi$ est T- propre.

(22) Les hypothèses sur la famille $F = (R_i)_{i \in I}$ d'équivalences-

(i) On suppose que chaque R_i est une relation d'équivalence régulière sur V, c'est-à-dire qu'il existe sur chaque V_i une structure de variété $\mathscr{C}^k$ telle que σ_i soit une submersion : [5]. Notons que cette structure de variété sur V_i est unique et que σ_i est ouverte. De plus si i entraine j, σ_{ij} est une submersion de V_i sur V_j.

(i)' . Chaque V_i est de dimension finie si $k \geq 1$ (et de dimension quelconque si $k = 0$).

(ii) On suppose que la famille $(R_i)_i$ est filtrante croissante : quels que soient R_i et R_j, il existe R_k entrainant R_i et R_j. On a donc un système projectif (V_i, σ_{ij}) de variétés de dimension finie.

(iii) On suppose que les relations R_i séparent les points de V.

(iv) Pour tout couple (i, j) tel que $i > j$, la surjection σ_{ij} vérifie (21).

Cette dernière condition (iv) permet de définir la cohérence d'un système de distribution T_i sur les V_i.

(23) Définition d'une prodistribution sur V -

L'espace $\mathscr{D}'^k_{cyl}(X)$ des prodistributions sur V est l'ensemble des familles $T = (T_i)_i$ de distributions sur les V_i, qui sont cohérentes au sens suivant. Pour tout couple (i, j) tel que $i > j$, l'application σ_{ij} est T_i-propre et l'on a $\sigma_{ij}(T_i) = T_j$.

Si $k = 0$, on dit aussi que T est une promesure.

Si toutes les distributions T_i sont bornées, ont dit que T est une prodistribution bornée. L'ensemble de ces prodistributions est noté $\mathscr{B}'^k_{cyl}(X)$ et simplement $\mathscr{B}'_{cyl}(X)$ si $k = +\infty$. Notons que les espaces $\mathscr{B}^k(V_i)$ forment un système inductif, car pour $i > j$, on a une injection $\psi \to \psi \circ s_{ij}$ de $\mathscr{B}^k(V_j)$ dans $\mathscr{B}^k(V_i)$.

On pose $\mathscr{B}^k_{cyl}(X) = \bigcup_i \mathscr{B}^k(V_i)$

et l'on voit que l'on peut définir encore une prodistribution sur V comme une forme linéaire sur $\mathscr{B}^k_{cyl}(X)$ dont la restriction à chaque $\mathscr{B}^k(V_i)$ est représentée par une distribution $T_i \in \mathscr{B}'^k(V_i)$

On pose

(24) $\langle T, \widetilde{\varphi}_i \rangle = \int \widetilde{\varphi}_i(x)\, dT(x) = \langle T_i, \varphi_i \rangle$.

La condition de cohérence entraine que la définition de $\langle T, \widetilde{\varphi}_i \rangle$ ne dépend pas de la base choisie pour la fonction cylindrique $\widetilde{\varphi}_i$. Dans (24), le signe d'intégration désigne seulemement un accouplement (ou forme bilinéaire séparante) entre prodistributions et fonctions cylindriques. Certains physiciens emploient la notation

(25) $\int \tilde{\varphi}_i\,(x)\ T(x)\ dx$.

Nous n'employons pas cette notation car dx représente une mesure de Lebesgue en dimension finie, et en dimension infinie la notation est moins claire.

(26) Pour simplifier l'exposé on se limite dès lors presque exclusivement au cas où V est un espace de Banach réel X . La famille (R_i) de relations d'équivalences est alors donnée par une bonne famille $F = (A_i)$ de sous-espaces fermés de codimension finie de X , c'est-à-dire par une famille (A_i) vérifiant les conditions suivantes :

a) La famille A_i étant munie de l'ordre $A_i > A_j$ si $A_i \subset A_j$, on suppose que l'ordre est filtrant croissant : quels que soient j et j' , il existe $A_k \subset A_j \cap A_j$

b) L'intersection des sous-espaces A_i est réduite à l'origine.

On pose donc $X_i = X/A_i$ et pour $i > j$, on a une surjection canonique s_{ij} de X_i sur X_j . Comme la définition (23) d'une prodistribution fait intervenir la famille F, on dira que T est une F.prodistribution "et simplement une prodistribution dans le cas où F est maximale c'est-à-dire égale à la famille de tous les sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de X .

On dit que T est une F. prodistribution à décroissance rapide si pour tout i , $T \in \mathcal{O}'_c\,(X_i)$. L'ensemble de ces F- prodistributions est noté $\mathcal{O}'_{c\,cyl}(X)$.

On définit de même l'espace $\mathcal{O}'_{Mcyl}(X)$ des F- prodistributions à décroissance très rapide, l'espace $\mathcal{O}'^{k}_{Mcyl}(X)$ des prodistributions à décroissance très rapide d'ordre au plus k .

(27) <u>Exemples de bonnes familles F de sous-espaces</u> -

a) La famille de tous les sous-espaces fermés de codimension finie de X .

b) Soit X hilbertien réel rapporté à une base orthonormée $e_1, e_2, \dots$.

Pour tout $n \geqslant 1$, A_n désigne le sous-espace fermé engendré par les e_k pour $k \geqslant n$. La famille $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est appelée la famille de Visik et elle est symbolisée par la lettre V . Elle est utile quand on veut seulement travailler avec un ensemble dénombrable d'indices.

c) La famille $(A_n)_{n \geqslant 2}$ est notée TV. Elle sert lorsqu'on veut étudier des problèmes d'évolution. En effet si $x = \Sigma\, x_j\, e_j$ est le point générique de X . On pose $x = te_1 + x'$ avec $t = x_1$ et $x' = \sum\limits_2^\infty x_j\, e_j$.

Si l'on veut par exemple étudier l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta'$, on est amené à considérer la collection des opérateurs différentiels

$$\partial_t - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad n = 1, 2 \ldots$$

et de leurs solutions élémentaires usuelles

$$E^n(t, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

sur les espaces $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $n = 1, 2 \ldots$. Ces solutions élémentaires définissent une TV- prodistribution mais elles ne définissent pas une V-prodistribution : ceci tient au fait que les E^n sont de masse infinie.

(28) Transformation de Fourier -

En transposant les surjections s_i et s_{ij} , on obtient des injections

$$X' \xleftarrow{s'_i} X'_i \xleftarrow{s'_j} X'_j \quad .$$

On voit alors que les X'_i forment un système inductif d'espaces vectoriels, dont la limite inductive s'identifie à un sous-espace dense de X' noté $\bigcup_i X'_i$.

La transformée de Fourier de la F-prodistribution bornée T est la fonction $\widehat{T}$ sur $\bigcup_i X'_i$ définie par :

$$\forall \xi \in \bigcup_i X'_i \qquad \hat{T}(\xi) = \int e^{-\sqrt{-1}(x,\ \xi)} dT(x) \ .$$

(29) Inversement d'ailleurs, si l'on se donne une fonction numérique Φ sur UX'_i telle que la restriction de Φ à tout espace X'_i soit la T.F. d'une distribution bornée T_i sur X_i, alors Φ est la T.F. de la F-prodistribution $(T_i)_i$.

(30) <u>Exemples</u> -

a) Une fonction polynomiale homogène Q de degré m sur X' définit un opérateur différentiel homogène à coefficients constants sur X . Plus précisément, pour tout sous-espace U_i de dimension finie de X', T_i est une distribution sur $X_i = X / (U_i^{\perp})$ qui est une somme de dérivées de la masse de Dirac à l'origine. Plus explicitement si l'on rapporte X_i à une base on a

$$T_i = \sum_{x = m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \quad ; \quad \text{avec} \quad a_\alpha \in \mathbb{C} \ .$$

b) Soit X un espace de Hilbert séparable identifié à son dual et soit $\lambda > 0$. La promesure normale (gaussienne) sur X de variance λ a pour transformée de Fourier

$$\hat{\nu}_\lambda (x) = \exp(- \frac{1}{2} \lambda \|x\|^2) \ .$$

Cette promesure notée ν_λ est représentée par la collection des lois normales suivantes sur les sous-espaces X_i de dimension finie de X

$$\nu_{\lambda,\ i}(x) = (2\pi \lambda)^{-\frac{n_i}{2}} \quad \exp(-\frac{\|x\|^2}{2\lambda})dx$$

avec $n_i = \dim X_i$, dx étant la mesure de Lebesgue canonique de l'espace euclidien X_i . En fait lorsque λ décrit le demi-plan complexe où $\mathrm{re}\lambda > 0$, ν_λ décrit un ensemble de promesures sur X . On peut faire tendre λ vers l'axe imaginaire:

b) Cécil B. de Witt [6] a défini la pseudo-mesure de Feynman W_λ sur l'espace de Hilbert X comme la collection des distributions $W_{\lambda, i}$ sur les sous-espaces X_i de dimension finie de X , $W_{\lambda,i}$ ayant pour T.F. la restriction à X_i de la fonction

$$\hat{W}_\lambda (x) = \mathrm{esp}(- \frac{\lambda\sqrt{-1}}{2} \|x\|^2) .$$

Il faut bien noter que $(W_{\lambda,i})_i$ n'est pas un système projectif de mesures car les W^i_λ ont des masses infinies. Cependant il résulte de (18) que $(W_{\lambda,i})_i$ est un système projectif de distributions bornées, et même à décroissance rapide. Par conséquent $W_\lambda = (W_{\lambda,i})_i$ est une prodistribution.

(31) Remarques -

a) Une prodistribution T définit une F-prodistribution pour tout famille F vérifiant (26 a) et b)) , puisqu'il suffit de restreindre le système projectif des T_i . Mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Par exemple utilisant les notations (27.c) , la fonction polynôme

$$\hat{T}(x) = x_1 + (x_2)^2 + (x_3)^3 + \dots \quad \text{sur} \quad \bigcup_n^\infty A_n$$

est la T.F. de la V-prodistribution $T = (T_n)$ avec

$$T_n = (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n})^n) \, \delta_o \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, \dots$$

et ce système projectif ne s'étend pas naturellement dans le cadre choisi ici.

b) Ceci tient au fait que la fonction $\hat{T}$ définie sur $\bigcup_n A_n$ ne s'étend pas naturellement en une fonction polynome sur X. Au contraire si l'on a une V-prodistribution U sur X telle que $\hat{U}$ se prolonge par continuité à tout l'espace X en une fonction Φ , et si pour tout i , Φ restreint à X_i est la T.F. d'une distribution bornée, alors U s'obtient par restriction d'une prodistribution admettant Φ comme transformée de Fourier.

Opérations simples sur les prodistributions -

Ce sont en particulier les opérations que l'on définit usuellement pour les probabilités cylindriques. Pour simplifier l'exposé on suppose que la famille F est maximale.

(32) Image par une application linéaire -

Soient X et Y deux espaces de Banach réel et soit ℓ une application linéaire continue de X dans Y . Vérifions d'abord que $\widetilde{\psi}_j \circ \ell \in \mathcal{B}_{cyl}(Y)$ pour toute $\widetilde{\psi}_j$ de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$. En effet soit $(B_j, j \in J)$ la famille des sous-espaces fermés de codimension finie de Y et supposons que $\widetilde{\psi} = \psi_j \circ t_j$ avec $Y_j = Y / B_j$, $\psi_j \in \mathcal{B}(Y_j)$, t_j étant la surjection canonique de Y sur Y_j . Il suffit alors d'introduire $A_i = \ell^{-1}(B_j)$, $X_i = X / A_i$ et de considérer le diagramme commutatif

(33)
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\ \ell\ } & Y & & \\ \big\downarrow{\scriptstyle s_i} & & \big\downarrow{\scriptstyle t_j} & \searrow^{\widetilde{\psi}_j} & \\ X_i & \xrightarrow{\ \ell_{ij}\ } & Y_j & \xrightarrow{\ \psi_j\ } & \mathbb{C} \end{array}$$

Donc $\widetilde{\psi}_j = \ell = \varphi \circ s_i$ avec $\varphi = \psi_j \circ \ell_{ij}$. On a donc une application $\widetilde{\psi} \to \widetilde{\psi} \circ \ell$ de $\mathcal{B}_{cyl}(Y)$ dans $\mathcal{B}_{cyl}(X)$. En transposant cette application, on définit l'image $\ell(T)$ de toute prodistribution bornée T sur X .

(34)
$$\int_Y \widetilde{\psi}\, d(\ell(T)) = \int_X \widetilde{\psi} \circ \ell \, dT .$$

On peut vérifier que la T.F. de $\ell(T)$ se construit facilement à l'aide de la T.F. de T :

(35)
$$\forall \eta \in Y' \qquad \widehat{\ell T}(\eta) = \widehat{T}(\ell' \eta) .$$

(36) Produit tensoriel -

Soient T et U deux prodistributions sur X et Y respectivement ; elles définissent des formes linéaires notées T et U sur $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ et $\mathcal{B}_{cyl}(Y)$ respectivement. Par produit tensoriel on en déduit une forme linéaire $T \otimes U$ sur

$\mathcal{B}_{cyl}(X) \otimes \mathcal{B}_{cyl}(Y)$. On peut voir que l'on a une injection α de cet espace dans $\mathcal{B}_{cyl}(X \times Y)$, que $T \otimes U$ se prolonge en une forme linéaire β sur $\mathcal{B}_{cyl}(X \times Y)$, et que $\beta \in \mathcal{B}'_{cyl}(X \times Y)$. En effet soient (X_i, s_{ij}) et $(Y_i, s_{i'j'})$ les sytèmes projectifs d'espaces vectoriels associés à X et Y respectivement. Alors

$$(X_i \times X_{i'} , s_{ij} \times s_{i'j'})$$

est un système cofinal dans le système projectif d'espaces vectoriels de dimansion finie de $Z = X \times Y$.

L'application linéaire α est définie par

(37) $$\mathcal{B}_{cyl}(X) \otimes \mathcal{B}_{cyl}(Y) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}_{cyl}(Z)$$

$$(\varphi_i \circ s_i) \otimes (\psi_{i'} \circ s_{i'}) \longmapsto (\varphi_i \times \psi_{i'}) \circ (s_i \times s_{i'}) .$$

La forme linéaire $T \otimes U$ définit une prodistribution sur Z car toute $\tilde{f} \in \mathcal{B}_{cyl}(Z)$ peut s'écrire

$$\tilde{f} = f \circ (s_i \times s_{i'}) \qquad \text{avec} \qquad f \in \mathcal{B}\,(X_i \times Y_{i'})$$

avec i et i' convenables. On définit alors le prolongement β de $T \otimes U$ par

(38) $$\langle \beta , \tilde{f} \rangle = \langle T_i \otimes U_i , f \rangle$$

On utilise ici le fait que le produit tensoriel de deux distributions bornées est une distribution bornée : ceci résulte de la représentation (7) des distributions bornées. On peut voir que cette définition de β ne dépend pas de la base choisie pour $\tilde{f}$. Pour simplifier l'écriture, on écrit $\beta = T \otimes U$.

(39) <u>Produit de convolution de deux prodistributions bornées</u> -

Si T et U sont deux prodistributions bornées sur l'espace de Banach réel X , on définit $T * U$ comme étant l'image de $T \otimes U$ par l'application somme :

$$X \times X \longrightarrow X$$
$$(x\ ,\ y) \longmapsto x + y$$

Par exemple, pour tout a de X , la translatée de T par le vecteur a de X est définie par

(40) $\forall \widetilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{cyl}(X) \quad \langle \delta_a * T, \widetilde{\varphi} \rangle = \int_X \widetilde{\varphi}(x - a)\, dT(x)$.

Si X est hilbertien identifié à son dual, on définit le laplacien de T par $\Delta\,\delta_o * T$, ou $\Delta\,\delta_o$ est la prodistribution de transformée de Fourier $-\|x\|^2$.

(41) Convolution d'une prodistribution bornée T et d'une fonction cylindrique $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{cyl}(X)$

Ce produit de convolution est la fonction cylindrique $T * \widetilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{cyl}(X)$ définie par

$$(T * \widetilde{\varphi})(x) = \int_Y \widetilde{\varphi}(x - y)dT(y) \ .$$

On peut en particulier définir le laplacien d'une fonction cylindrique si X est hilbertien. On voit donc que le formalisme des prodistributions permet de définir des opérateurs différentiels scalaires dans $\mathcal{B}'_{cyl}(X)$ et $\mathcal{B}_{cyl}(X)$, mais qu'il ne permet pas de définir des opérateurs différentiels vectotiels tels que la dérivation $\varphi \longmapsto D\varphi$.

(42) Produit d'une prodistribution par une fonction cylindrique -

Pour $\widetilde{f} \in \mathcal{B}_{cyl}(X)$ et $T \in \mathcal{B}'_{cyl}(X)$, on définit la prodistribution $\widetilde{f}\,T$ par $\langle \widetilde{f}\,T\,,\widetilde{\varphi}\rangle = \langle T\,,\widetilde{f}\,\widetilde{\varphi}\rangle$.

Promesures et mesures de Radon -

(43) Mesures de Radon bornées sur X -

Soit $\mathcal{B}^o(X)$ l'espace des fonctions numériques continues bornées sur X et soit B_o la boule unité fermée de cet espace. Si l'on cherche à définir l'ensemble $\mathcal{B}'^o(X)$ des mesures de Radon Bornées sur X comme dual de $\mathcal{B}^o(X)$, on est tenté de munir $\mathcal{B}^o(X)$ de la topologie t_∞ de la convergence uniforme ou de la topologie t_k de la convergence uniforme sur les parties compactes de X. En fait t_∞ est trop fine car $(\mathcal{B}^o(X), t_\infty)$ est isométrique à l'espace normé des fonctions continues sur le compactifié de Stone Cech de X. Et t_k n'est pas assez fine : [12]. C'est pourquoi les spécialistes ont introduit la topologie stricte t^o sur $\mathcal{B}^o(X)$: c'est la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^o(X)$ qui coincide avec t_k sur la boule unité β_o de $\mathcal{B}^o(X)$ L'intérêt est que $\mathcal{B}'^o(X)$ est le dual de $\mathcal{B}^o(X)$ muni de cette topologie t^o. On peut aussi montrer ([12]) que $\mathcal{B}^o_{cyl}(X)$ est un sous-epace dense de $(\mathcal{B}^o(X), t^o)$. Par conséquent toute mesure de Radon μ sur X est définie par la restriction à $\mathcal{B}^o_{cyl}(X)$ de la forme linéaire associée à μ. Autrement dit, μ est caractérisée par une promesure. On a aussi construit une injection de $\mathcal{B}'^o(X)$ dans $\mathcal{B}'^o_{cyl}(X)$. Une partie importante de la théorie des promesures est consacrée à l'étude des applications linéaires transformant promesures de probabilité (ou probabilités cylindriques) en probabilités de Radon. On utilise à cet effet le point de vue "dual" des processus linéaires.

(44) Processus linéaires -

Un processus linéaires R basé sur le dual X' de X et relatif à l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1)$ est une application linéaire de X' dans l'espace $L^o(\Omega_1)$ des variables aléatoires relatives à Ω_1. Soit $0 < p < \infty$; on dit que R est de type p si R est une application linéaire continue de X' dans la classe de Lebesgue $L^p(\Omega_1)$. On dit que le processus linéaire R est décomposé par une variable aléatoire vectorielle $f : \Omega_1 \to X$ si

(45) $\forall x' \in X' \qquad Rx' = x' \circ f$

soit : $(Rx')(\omega) = \langle x', f(\omega) \rangle$ presque surement

(46) Ces définitions étant posées on voit :

a) Tout processus linéaire basé sur un e.v. de dimension finie E est décomposé par une v.a. unique à valeurs dans E^* : ceci se démontre facilement en rapportant E à une base, et E^* à la base duale.

b) Soit U_i un sous-espace de dimension finie de X'. Appliquant a) à la restriction R_i de R à U_i, on voit qu'il existe une v.a. f_i à valeurs dans $X_i = R/(U_i^\perp) \simeq U_i^*$, f_i décomposant R_i. De plus si $U_i \supset U_j$, il existe f_j décomposant la restriction de R à U_j et $f_j = s_{ij} \circ f_{ij}$: on dit que la famille des f_i est cohérente. Il est équivalent de se donner

- le processus linéaire R basé sur X'
- ou la famille $(R_i)_i$ de ses restrictions aux sous-espaces U_i de dimension finie
- ou la famille cohérente $(f_i)_i$ des applications $f_i : \Omega \to X_i$.

c) Posant $\mu_i = f_i(P)$, on associe à R une probabilité cylindrique (μ_i) sur X. Réciproquement si l'on se donne une probabilité cylindrique (μ_i) sur X, il existe un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1)$ et un système cohérent de v.a. $f_i : \Omega \to X_i$ tel que $\mu_i = f_i(P_1)$ pour tout i ; la construction de Ω_1 et des f_i s'effectue par exemple en utilisant le théorème de Kolmogoroff.

(47) Un résultat typique de la théorie des applications radonifiantes [33]

Soient X et Y deux espaces de Banach et ℓ une application p-sommante $(p>1)$ de X dans Y c'est-à-dire telle que

$$\exists C \quad \forall n \quad \forall x_1 \dots x_n \in X \qquad \sum_i \| \ell(x_i) \|^p \leq C \sup_{|x'| \leq 1} \sum_i |(x', x_i)|^p .$$

On suppose que X a la propriété d'approximation métrique. Soit R un processus linéaire de type p basé sur X'. Alors le processus linéaire $R \circ \ell$ est décomposé, par une variable aléatoire f à valeurs dans Y.

Soit μ la probabilité cylindrique associée à R. On peut voir que $\ell(\mu)$ est une probabilité sur Y et cette probabilité est la loi de f. D'après un théorème classique, ([30]) si Y est séparable, alors $\ell(\mu)$ est une mesure de Radon.

(48) Ajoutons une information sur l'application $R \to \mu$ définie en 46-c).
Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, P_2)$ deux espaces probabilisés. Soient R et R' deux processus linéaires basés sur X' : R étant relatif à Ω_1 et R' étant relatif à Ω_2. On dit que R et R' sont isonomes si pour tout n et tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de n points de X les deux v.a. vectorielles

$$(R\, x_1, \ldots, R\, x_n) \quad \text{et} \quad (R'\, x_1, \ldots, R'\, x_n)$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ont même loi. On définit ainsi une équivalence notée $\sim$ sur les processus linéaires basés sur X'. On voit facilement que deux processus linéaires isonomes correspondent à la même probabilité cylindrique, et que la propriété "type p" correspond en fait à une propriété des probabilités cylindriques.

(49) <u>La situation fondamentale</u> -
Soit $1 < p < \infty$. On se donne deux espaces de Banach X et Ω et une injection p-sommante λ à image dense de X dans Ω. Par transposition de λ, Ω' s'identifie à un sous-espace dense de X'. Soit μ une probabilité cylindrique de type p sur X et soit $P = \lambda(\mu)$ la probabilité correspondante sur Ω :

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{\lambda} & \Omega \\ X' & \xleftarrow{\lambda'} & \Omega' \end{array}$$

On va construire un processus linéaire R basé sur X' correspondant à μ et à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ où $\mathcal{T}$ est la tribu de Baire faible de Ω.
Si $x' \in \Omega'$, on définit $R\,x'$ comme étant la forme linéaire continue sur Ω associée à x'. On définit ainsi une application linéaire r de Ω' dans $L^p(\Omega)$.
Cette application est continue si l'on munit Ω' de la norme induite par celle de X'. Donc on peut définir R par prolongement continu de r.

Comme la donnée d'un processus linéaire est équivalente à la donnée d'une famille cohérente de v.a., on a prouvé qu'il existe un système cohérent de classes d'applications mesurables $f_i : \Omega \to X_i$ telles que l'on ait $\mu_i = f_i(P)$ pour tout i. D'où le diagramme "commutatif"

(50)
$$\begin{tikzcd}
\mu \text{ sur } X \arrow[r, hook, "\lambda"] \arrow[d, "s_i"] \arrow[dd, bend right, "s_j"'] & \Omega \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
X_i \arrow[d, "s_{ij}"] & \\
X_j &
\end{tikzcd}$$

(51) <u>Rabiots</u> - Ω est supposé réflexif séparable

a) Les applications f_i engendrent (aux ensembles négligeables près) la tribu de Baire faible $\mathcal{C}$ de Ω : ceci résulte de la proposition 3 exposé 3 de [1] .

b) Remplaçons le système projectif (X_i, s_{ij}) par le système projectif associé à une bonne famille $(A_j)_{j \in J}$ de X telle que $A_j^{\perp} \subset \mathrm{Im}\, \ell'$, $\forall j \in J$ Alors les applications f_j correspondantes engendrent encore $\mathcal{C}$: il suffit d'adapter la preuve de la proposition citée en a)

c) Supposons que l'on a l'inégalité ;

$$\exists\ C > 0 \quad \forall\ x' \in X' \qquad \| R\, x' \|_{L^p} \geq C\, \| x' \|$$

Alors l'espace banachisable X' est isomorphe à un sous-espace fermé de $L^p(\Omega)$. Par exemple si X est hilbertien, $\mu = \nu_\lambda$, $p = 2$, $X \simeq X'$ est même isométrique à un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$. Alors tout $x' \in X' \simeq L^p(\Omega)$ est limite d'une suite $(x'_n)_n$ avec $x'_n \in \Omega$. De cette suite, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout. Et comme les x'_n sont des formes linéaires sur Ω , il en résulte que x' est une forme presque sûrement linéaire sur Ω . On obtient ainsi une dualité "mesurable" entre Ω et X' , cette dualité prolongeant la dualité usuelle entre Ω et Ω' .

(52) Remarque -

Partant de la promesure μ sur X , on a construit Ω et prouvé l'existence de la probabilité P sur Ω en utilisant la théorie des applications radonifiantes. Mais on aurait pu arriver au même résultat par d'autres moyens. La méthode la plus simple consiste à utiliser la remarque (46 - b) et à utiliser le théorème fondamental (Kolmogoroff) de la théorie des probabilités. En effet, choisissant une base algèbrique $(e_k)_{k\in K}$ de X' , on obtient ainsi une identification de X' à $\mathbb{R}^{(K)}$. La recherche de l'espace probabilisé Ω équivaut à celle des variables aléatoires f_i , dont on connait les lois et le système des lois marginales. Le théorème de Kolmogoroff donne $\Omega = \mathbb{R}^K$, espace vectoriel isomorphe à X'^* . C'est cette méthode qui est utilisée dans [34].

3. - PROTENSEURS DISTRIBUTIONS -

(53) Protenseurs distributions ℓ fois covariants

Un protenseur distribution ℓ fois covariant est une application linéaire T de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ dans $\otimes X'^c$ dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i)$ est représentée par une distribution bornée $T_i \in \mathcal{B}'(X_i, \underset{\ell}{\otimes} X_i'^c)$.

On posera encore

(54) $$(T, \widetilde{\varphi}) = \int \widetilde{\varphi}(x)\, d\,T(x) \in (\underset{\ell}{\otimes} X'^c) .$$

On définit naturellement la transformation de Fourier

(55) $$\forall \xi \in X' \quad \widehat{T}(\xi) = \int e^{-i(x,\, \xi)}\, d\,T(x) .$$

C'est une fonction à valeurs vectorielles. On peut étudier les opérations usuelles et en particulier, on peut convoler une prodistribution scalaire avec une fonction scalaire et un protenseur distribution .

(56) Exemple -

Soit ℓ en entier ≥ 0 . Le protenseur distribution $D^\ell \delta_o$ est défini par ses restrictions aux sous-espaces $\mathcal{B}(X_i)$ de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X_i) &\longrightarrow \otimes X_i'^c \\ \varphi &\longmapsto (-1)^\ell D^\ell \varphi . \end{aligned}$$

Agissant dans $\mathcal{B}_{cyl}(X)$, l'opérateur de convolution par $D^\ell \delta_o$ est la dérivation d'ordre ℓ

$$D^\ell \delta_o * \varphi = D^\ell \varphi \,.$$

Et de même pour toute $T \in \mathcal{B}'_{cyl}(X)$, on pose

$$D^\ell T = T * D^\ell \delta_o \,.$$

C'est un protenseur distribution ℓ fois covariant.

(54) Protenseurs distribution ℓ fois contravariants -

Soit $\mathcal{B}(X_i, \underset{\ell}{\otimes} X_i^{\prime c})$ l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à dérivées bornées de X_i , à valeurs dans $\underset{\ell}{\otimes} X_i^{\prime c}$. Lorsque i varie, ces espaces forment un système inductif ; la limite inductive est notée $\mathcal{B}_{cyl}(X, \ell)$. Remplaçant dans ce qui précède $\otimes$ par $\odot$ on obtient $\mathcal{B}_{s\ cyl}(X, \ell)$: c'est un espace de fonctions vectorielles sur X , à valeurs dans $\odot X^{\prime c}$.

(55) Exemple -

Soit $\varphi \in \mathcal{B}(X_i)$ et $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i$

Alors $D^\ell \tilde{\varphi}\,(x\,;\,\Delta x_1, \ldots, \Delta x_\ell) = D^\ell \varphi\,(s_i x\,;\, s_i \Delta x_1, \ldots, s_i \Delta x_\ell)$

Par conséquent $D^\ell \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{s\ cyl}(X\,,\,\ell)$ et l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "D^\ell \tilde{\varphi}"] \arrow[d, "s_i"'] & \odot X^{\prime c} \\ X_i \arrow[r, "D^\ell \varphi"] & \odot X_i^{\prime c} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(56) Définition -

Un protenseur distribution ℓ fois contravariant est une forme linéaire sur $\mathcal{B}_{cyl}(X, \ell)$ telle que pour tout i , la restriction de T à $\mathcal{B}(X_i, \odot X_i^{\prime c})$ est représentée par une distribution $T_i \in \mathcal{B}'(X_i, \odot X_i^c)$

Si les T_i sont des mesures, on dit que T est un protenseur mesure.

(57) Autre formulation de cette définition et relation avec la notion de protenseur distribution covariant -

On peut voir que

$$\mathcal{B}_{cyl}(X, \ell) \simeq \mathcal{B}_{cyl}(X) \otimes (\odot X'^c)$$

Vue la propriété universelle du produit tensoriel, T définit une application linéaire de $\mathcal{B}_{cyl}(X)$ dans $(\underset{\ell}{\otimes} X'^c)^*$, dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i)$ est représentée par une distribution $T_i \in \mathcal{B}'(X_i, \underset{\ell}{\otimes} X_i^c)$. Dans le cas hilbertien on a une injection stricte des protenseurs distributions ℓ fois covariants dans l'espace des protenseurs distributions ℓ fois contravariants.

(58) Protenseurs mixtes - Contraction.

On peut définir un protenseur distribution une fois contravariant et une fois covariant comme une application linéaire

$$\mathcal{B}_{cyl}(X) \xrightarrow{U} (X'^c)^* \otimes X'^c$$

dont la restriction à chaque $\mathcal{B}(X_i)$ est représentée par une distribution $U_i \in \mathcal{B}'(X_i, X_i^c \otimes X_i'^c)$. En composant cette application linéaire U avec la contraction

$$X'^c \otimes X'^c \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\sum_{j=1}^{N} e'_j \otimes e_j \longmapsto \sum_{j=1}^{N} \langle e'_j , e_j \rangle$$

on obtient une prodistribution sur X , c'est-à-dire un protenseur distribution zéro fois contravariant et zéro fois covariant.

(59) Illustrons ceci sur un exemple. Soit $p \geq 1$.

Soit T un protenseur distribution p fois contravariant. Alors D T est un protenseur distribution p fois contravariant et une fois covariant qui est déduit de T par convolution avec le protenseur distribution $D\,\delta_o$ une fois covariant. Par contraction, on déduit de D T le protenseur div T qui est (p-1) fois contravariant.

4. - CLASSES L^p DE PROTENSEURS CONTRAVARIANTS -

Nous proposons ci-après une représentation commode de certaines classes de Lebesgue vectorielles. Examinons d'abord les divers formalismes existants relatifs au cas scalaire :

- Dans [34], I. Segal a défini la classe $L^2(X)$ relative à l'espace hilbertien X en complétant l'espace des fonctions polynomiales cylindriques sur X ; les éléments de $L^2(X)$ s'identifiant à des classes de fonctions sur le dual algébrique X'^* de X.

- Dans [10], K.O. Friedrichs et H.N. Shapiro modifient cette définition en considérant seulement des fonctions F-cylindriques et affirment que la classe $L^2_F(X)$ ainsi construite est indépendante de la bonne famille F.

- Dans [13], Gelfand et Vilenkin travaillent sur le dual d'un espace nucléaire. Ceci a l'avantage de réaliser la promesure gaussienne comme une mesure de Radon sans introduire un nouvel espace. Mais ceci a l'inconvénient de faire disparaitre la structure hilbertienne, et de perdre ainsi la représentation de Fock-Cook des relations de commutation.

- Dans [7], P. Kristensen et L. Mejlbo proposent une variante de ce dernier résultat, mais ils remplacent le symbole

$$(f \mid g) = \int_{\varphi \in X} f(\varphi)\ \overline{g(\varphi)}\ d\nu\ (\varphi)$$

du produit scalaire des deux fonctionnelles f et g sur X par le symbole

$$\int f(\varphi)\ \overline{g(\varphi)}\ e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2}\ d\,\varphi$$

où $d\,\varphi$ évoque la mesure de Lebesgue. Comme il n'y a pas de mesure invariante sur un e.v. de dimension infinie, il nous semble préférable d'éviter ce type de notation.

- Dans [4], Berezin définit des systèmes cohérents de fonctions φ_i définies sur des sous-espaces X_i de dimension finie de X.

Mais Berezin définit la classe L^2 en faisant intervenir des mesures de Lebesque sur les espaces X_i .

Nous proposons ci-après une représentation de tout élément de $L^2(X)$ par un système cohérent de fonction φ_i définies sur les espaces X_i , les fonctions φ_i étant de carré sommable par rapport à des mesures μ_i définissant une promesure fixée μ sur X . Cette représentation très commode a l'avantage d'être indépendante de la réalisation de μ comme vraie mesure. Le théorème (66) montre l'équivalence de cette représentation avec la définition usuelle des classes de Lebesgue.

On fixe p $(1 \leq p \leq \infty)$. On considère la situation (50) , les f_i étant associés aux éléments d'une bonne famille F quelconque de sous-espaces de X . La F-promesure $\mu = (\mu_i)$ sur X est supposée de type p_o fixé. On fixe un entier positif ℓ et on prend $g \in L^p(\Omega, \hat{\bigotimes_\ell} X^c)$, le signe $\triangle$ signifiant que $\bigotimes_\ell X$ a été complété pour la norme de produit tensorial hilbertien.

On a pour tout i une surjection canonique σ_i de $\hat{\bigotimes_\ell} X^c$ sur $\bigotimes_\ell X_i^c$.

On note φ_i l'espérance conditionnelle de $\sigma_i \circ g$ par rapport à f_i ; d'où la figure :

(60
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\lambda"] \arrow[d, "s_i"'] & \Omega \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "f_i"] & \hat{\bigotimes_\ell} X'^c \arrow[d, "\sigma_i"] \\
X_i \arrow[rr, "\varphi_i"] & & \bigotimes X_i^c
\end{tikzcd}$$

Comme le conditionnement réalise une contraction dans L^p on a

(61)
$$\sup_i \int_{X_i} \|\varphi_i\|^p \, d\mu_i \leq \int_\Omega \|g\|^p \, dP .$$

La condition (51-a) entraine que cette inégalité est en fait une égalité.
De plus, en utilisant la définition des espérances conditionnelles, on peut voir que les mesures vectorielles $\varphi_i \nu_i$ sont cohérentes , c'est-à-dire qu'elles définissent un F-protenseur ℓ fois contravariant.

(62) explicitons la relation de cohérence entre les φ_i dans le cas scalaire (c'est-à-dire $\ell = 0$) , et lorsque μ est la promesure normale canonique $\nu = (\nu_i)$ sur l'espace de Hilbert X . Pour tout couple (i, j) d'indices tels que $i > j$ on a

$$X_i = X_j + X'_j \quad \text{avec} \quad X'_j = X_i \ominus X_j \ .$$

Notant ν'_j la loi normale réduite sur l'espace euclidien X'_j , on voit que ν_i est une mesure produit :

$$\nu_i = \nu_j \times \nu'_j$$

Comme $\varphi_j = \mathcal{E}(\varphi_i | s_{ij})$ on a pour tout borelien β de X_j

$$\int_\beta \varphi_j \, d\,\nu_j = \int_{s_{ij}^{-1}(\beta)} \varphi_i \, d\,\nu_i \ .$$

(63) d'où $$\varphi_j(x') = \int_{X'_j} \varphi_i(x', x'') \, d\,\nu'_i(x'')$$

pour presque tout x' de X_j . Autrement dit, pour tout couple (i, j) tel que $i \geqslant j$, φ_j se déduit de φ_i "par intégration sur la fibre verticale située au-dessus de presque tout point de X_j" . Nous sommes ainsi conduit à représenter toute g de $L^p(\Omega, \hat{\bigotimes}_\ell X^c)$ par des systèmes cohérents (φ_i) de fonctions définies sur des espaces de dimension finie ; autrement dit, par des éléments de l'espace $L^p(X, \ell)$ défini ci-après. Le théorème (66) donné ci-après montre que l'on obtient une bijection isométrique.

(64) DEFINITION. - On considère la situation (60) et soit ℓ un entier ≥ 0. On suppose donc que l'espace de Banach X est muni d'une promesure fixée $\mu = (\mu_i)$ de type p_o avec $1 \leq p_o < \infty$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $L^p(X,\ell)$ l'espace des protenseurs contravariants de degré ℓ du type $T = \psi_i \mu_i$ où les ψ_i sont des fonctions vectorielles $X_i \to \underset{\ell}{\otimes} X_i^c$ telles que

(65) $$\|T\|_p = \sup_i \int \|\psi_i(x)\|^p \, d\mu_o(x) < \infty .$$

Cet espace ainsi normé est complet.

(66) THEOREME. - Avec les hypothèses précédentes, l'application

$$L^p(\Omega, \hat{\underset{\ell}{\otimes}} X'^c) \longrightarrow L^p(X,\ell)$$

$$g \longmapsto (\psi_i \mu_i) \quad \text{avec} \quad \psi_i = \mathcal{E}(\sigma_i \circ g | f_i)$$

est une bijection isométrique.

Dans le cas particulier où $\ell = 0$, on écrit simplement $L^p(\Omega)$ et $L^p(X)$ au lieu de $L^p(\Omega, \underset{o}{\otimes} X'^c)$ et de $L^p(X,0)$ respectivement.

On obtient des énoncés analogues en remplaçant le produit tensoriel $\otimes$ par le produit tensoriel symétrique $\odot$ ou par le produit tensoriel antisymétrique.

Démonstration. - La continuité de l'application linéaire α résulte du fait que le conditionnement réalise une contraction dans L^p pour tout $p \in [1,\infty]$. Le fait que α est injective et isométrique résulte de (51.a). La surjectivité de α pour $1 < p < \infty$ résulte du fait que tout (ψ_i) de $L^p(X,\ell)$ est une base de filtre sur la boule unité de $L^p(\Omega, \hat{\underset{\ell}{\otimes}} X^c)$. Comme cette boule est faiblement compacte, cette base de filtre a au moins un point adhérent g ; et l'on peut voir alors que (ψ_i) converge faiblement et fortement vers g ; et que

$(\psi_i)_i = \alpha g$. On peut aussi utiliser un argument de martingale vectorielle : voir [27] . L'avantage de cette deuxième démonstration est qu'elle s'applique pour $p = 1$ ou $p = +\infty$, l'espace de Hilbert $\hat{\otimes}_{\mathcal{L}} X^c$ pouvant être remplacé par un espace Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym.

(67) VARIANTE. - Soit g mesurable positive sur Ω . Posons

$$g_i = \mathcal{E}(g \mid f_i)$$

(68) $$\text{Alors} \quad \int g \, dP = \sup_i \int g_i \, d\mu_i$$

Cette variante donne un procédé très commode pour voir si une fonction est intégrable et aussi pour calculer l'intégrale d'une fonction. Notons d'ailleurs que la bonne famille $(A_i)_{i\in I}$ intervenant dans ces énoncés est quelconque, ce qui permet de choisir une bonne famille adaptée à l'étude de la fonction g étudiée.

(69) Exemple.

L'espace de Hilbert réel séparable X est muni de la promesure normale ν . On considère la situation (49) et un vecteur quelconque a de X . Notant $a(\omega)$ la classe de $L^2(\Omega)$ définie par a , on a

(70) $$\int e^{-a(\omega)} \, dP(\omega) = e^{\frac{1}{2}\|a\|^2}$$

En effet, utilisant la technique précédente, on se ramène au cas où X est de dimension finie, et alors (70) résulte d'un calcul facile.

De ceci, il résulte que la promesure $d\nu(x+a)$ déduite de ν par la translation de vecteur a est représentée par une mesure de Radon sur Ω , absolument continue par rapport à P et de densité $\exp(-a(\omega) - \frac{1}{2}\|a\|^2)$. Autrement dit, la promesure normale canonique d'un Hilbert est quasi invariante.

(71) LEMME DE DENSITE. - Soit $1 \leq p < \infty$. Soit pour tout i un sous-espace vectoriel E_i dense dans $L^p_{\mu_i}(X_i)$. Alors le sous-espace de $L^p(X)$ engendré par la réunion des E_i est dense dans $L^p(X)$.

Ceci résulte du fait que pour toute g de $L^p(X)$ la base de filtre des $\mathcal{E}(g|f_i)$ converge vers g dans $L^p(X)$. On a un résultat analogue pour les classes L^p vectorielles.

On peut encore insister sur le fait que (66) donne une représentation de $L^2(X)$ qui est indépendante de la manière dont on a réalisé la promesure μ comme une mesure sur un espace plus grand que X. Autrement dit, la structure hilbertienne de l'espace L^2 intervenant en théorie quantique des champs ne dépend que de X et de la promesure choisie μ sur X. Lorsqu'on réalise μ comme une mesure en utilisant le théorème de Kolmogoroff, ou le théorème de Minlos, ou la théorie des triplets de Wiener de L. Gross, ou la théorie des applications radonifiantes..., on obtient toujours des espaces de Hilbert isomorphes.

§ 5. - DERIVATION DE DENSITE DES PROTENSEURS PRODISTRIBUTIONS.

Evoquons d'abord la théorie de la dérivation des distributions sur un espace X_i de dimension finie. Comme X_i est muni d'une mesure remarquable (à savoir la mesure de Lebesgue dx) L. Schwartz "identifie" l'espace $L^1_{loc}(X_i)$ à un espace de distributions sur X_i par l'application $\varphi_i \to \varphi_i\, dx$. Puis il définit la dérivation au sens des distributions de manière à "prolonger" la dérivation des fonctions. Comment transposer cette théorie en dimension infinie ? Nous supposons X muni d'une F-promesure fixée $\mu = (\mu_i)_i$. Pour des raisons techniques, nous supposons X hilbertien, chaque μ_i admettant une densité C^∞ strictement positive par rapport à la mesure de Lebesgue canonique de l'espace euclidien X_i :

(72) $$\mu_i = \alpha_i(x)\, dx \quad ; \quad \alpha_i \in C^\infty(X_i) \ .$$

Nous supposons aussi que pour tout couple (i,j) tel que $i > j$, μ_i est le produit tensoriel de μ_j et d'une mesure μ'_j sur $X_i \theta X_j$. Pour fixer les idées, notons que ν satisfait à ces conditions et que pour toute $g = (\varphi_j) \in L^1(X)$, la relation de cohérence entre φ_i et φ_j s'exprime par une formule analogue à (63) :

$$(73) \qquad \varphi_j(x') = \int_{X'_j} \varphi_i(x',x'')\, d\mu'_j(x'')$$

Rapportons X_i à une base orthonormée dont les n' premiers éléments forment une base orthonormée de X_j . Si donc $\dim X_i = n$, $\dim X_j = n'$, $\dim X'_j = n''$, on a :

$$X_i \sim R^n_x \quad ; \quad X_j \sim R^{n'}_{x'} \quad ; \quad X'_j \sim R^{n''}_{x''} \quad .$$

Dans le cas particulier où φ_i et φ_j sont de classe C^1 , les dérivées de φ_i et de φ_j sont définis par leurs composantes

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \quad (k = 1 \ldots n) \quad ; \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\ell} \qquad (\ell = 1, \ldots n') \quad .$$

Par dérivation de chaque membre de (73) par rapport à x_ℓ $(1 \leq \ell \leq n')$, on obtient :

$$(74) \qquad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\ell}(x') = \int \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\ell}(x',x'')\; d\mu'(x'') \quad ; \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\ell} = \mathcal{E}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\ell} \mid s_{ij}\right) \quad .$$

Autrement dit, la collection des tenseurs $\mu_i(D\,\varphi_i)$ définit un F - protenseur distribution contravariant de degré un . A la prodistribution $g\nu$, on a donc associé un F - protenseur distribution noté $\widetilde{D}(g\,\mu)$ ou simplement $\widetilde{D}g$. Il faut noter que $g\mu \mapsto \widetilde{D}(g\mu)$ n'est pas un opérateur de convolution car $\widetilde{D}(g\mu)$ diffère de $D(g\mu)$.

Si l'on veut étendre la définition de Dg à une "fonction" quelconque de $L^1(X)$, sans supposer que les fonctions $\varphi_i = \mathcal{E}(g \mid f_i)$ sont continuement dérivables, on voit qu'il faut procéder en deux étapes.

Etape 1.

Reformulation de la théorie de la dérivation des distributions sur un espace X_i de dimension finie, en remplaçant la mesure dx par $\mu_i = \alpha_i(x)\,dx$, et en cherchant une formulation indépendante du choix particulier d'une base dans l'espace X_i. Cette reformulation s'effectue en deux demi-étapes. D'abord, on définit la dérivée de densité d'une distribution $T_i \in \mathcal{D}'(X_i)$ dans une direction d'axe Ox_k.

Pour simplifier les notations, on pose

$$(75) \qquad \partial_\ell = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \qquad \text{et} \qquad \check{\partial}_\ell = \alpha_i^{-1}\,\partial_\ell\,\alpha_i \ .$$

Si $\varphi_i \in C^1(X_i)$ et pour $\psi \in \mathcal{D}(X_i)$, on a

$$\begin{aligned} <(\partial_\ell\,\varphi_i)\mu_i\,,\,\psi> &= \int \psi\,\partial_\ell\,\varphi_i\,d\mu_i = \int \psi\,\alpha_i(\partial_\ell\,\varphi_i)\,dx \\ &= -\int \varphi_i\,\partial_\ell(\psi\,\alpha_i)\,dx = -<\varphi_i\,\mu_i, \check{\partial}_\ell\,\psi> . \end{aligned}$$

Donc, dans le cas particulier où φ_i est C^1, la dérivée de densité $\tilde{\partial}_\ell\,T_i = (\partial_\ell\,\varphi_i)\,\mu_i$ de la distribution $T_i = \varphi_i\,\mu_i$ est telle que

$$(76) \qquad \forall\,\psi \in \mathcal{D}(X_i) \quad ; \quad <\tilde{\partial}_\ell\,T_i\,,\,\psi> \;=\; -<T_i\,,\,\check{\partial}_\ell\,\psi> \ .$$

Dans le cas général, on définit $\tilde{\partial}_\ell\,T_i$ à l'aide de cette relation. Autrement dit, l'opérateur $\tilde{\partial}_\ell$ de dérivation de densité est défini par transposition de l'opérateur linéaire $-\check{\partial}_\ell$ de $\mathcal{D}(X_i)$.

Dans une deuxième demi-étape, on définit la dérivée de densité $\tilde{D}\,T_i$ d'une distribution $T_i \in \mathcal{D}'(X_i)$. A cet effet, on note d'abord que pour toute $\varphi_i \in C^1(X_i)$ et toute $\vec{\psi}$ dans $\mathcal{D}(X_i, X_i)$, on a

$$(77) \qquad <(D\,\varphi_i)\mu, \psi> \;=\; -<\varphi_i\,\mu_i\,,\,\check{\operatorname{div}}\,\psi>$$

où l'opérateur $\check{\operatorname{div}} : \mathcal{D}(X_i, X_i) \to \mathcal{D}(X_i)$ est déduit de l'opérateur usuel de divergence en remplaçant les dérivées directionnelles ∂_ℓ par les dérivées $\check{\partial}_\ell$.

Donc, dans le cas particulier où $T_i = \varphi_i\, \mu$ avec φ_i continuement dérivable, la distribution vectorielle $\tilde{D}\, T_i = (D\, \varphi_i)\, \mu_i$ est telle que

$$\forall\, \psi \in \mathcal{D}(X_i) \quad ; \quad \langle \tilde{D}\, T_i\, ,\, \psi \rangle = -\langle T_i\, ,\, \check{\operatorname{div}}\, \psi \rangle \quad .$$

Dans le cas général, on définit l'opérateur $\tilde{D} : \mathcal{D}'(X_i) \to \mathcal{D}'(X_i, X_i)$ en transposant l'opérateur $-\check{\operatorname{div}} : \mathcal{D}(X_i, X_i) \to \mathcal{D}(X_i)$.

<u>Etape 2</u>. - Etude du cas de la dimension infinie.

Cette étude s'effectue en partant d'une F - prodistribution $T = (T_i)_i$ sur X , en construisant comme indiqué précédemment des opérateurs différentiels dans les espaces $\mathcal{D}'(X_i)$, puis en examinant les relations de cohérence entre ces opérateurs différentiels.

On suppose que pour tout i , l'opérateur $\tilde{D}$ opère dans les distributions à décroissance rapide et on se limite à la considération de prodistributions à décroissance rapide.

Si $T = (T_i)$ est une telle prodistribution, on note que les $\tilde{D} T_i$ sont cohérents, c'est-à-dire qu'ils définissent un protenseur distribution contravariant. Plus généralement, si $T = (T_i)$ est un protenseur distribution q fois contravariant, les $\tilde{D}\, T_i$ définissent un protenseur distribution $(q+1)$ fois contravariant appelé dérivée de densité de T . Dans le cas particulier où $T = g\mu$ avec $g \in L^1(X,q)$ on écrit

$$\tilde{D}(g\,\mu) = (Dg)\,\mu$$

ou même simplement $D g$, ce qui revient à "identifier" prodistribution et fonctions. L'opérateur $\tilde{D}$ peut être itéré.

Exemples.

a) Dans le cas particulier où $T = g\mu$, g étant Frechet dérivable à dérivée bornée, on peut voir que $\tilde{D}T$ se déduit simplement de la dérivée au sens de Frechet de g . On a donc ainsi défini une extension du calcul différentiel de Frechet. On peut voir aussi que cette notion de dérivation prolonge aussi la dérivation définie dans [15] par L. Gross.

b) Opérateur différentiel scalaire $P(\frac{1}{\sqrt{-1}}\tilde{D})$ associé à une fonction polynôme P sur X' .

Comme toute fonction polynôme sur X est une somme finie de fonctions polynômiales homogènes, on peut supposer P homogène de degré ℓ . On examine d'abord le cas de la dimension finie. Soit P_i la restriction de P à X' identifié à X . Pour toute $T_i \in \mathcal{O}'_c(X_i)$, on définit la distribution

(78) $$U_i = P_i(\frac{1}{\sqrt{-1}}\tilde{D})T_i = P_i(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\tilde{\partial}}{\partial x})T_i$$

par la forme linéaire obtenue en composant l'application linéaire :

(79) $$\mathcal{O}'_c(X_i) \xrightarrow{(\frac{1}{\sqrt{-1}})^{\ell}\tilde{D}^{\ell}T} \odot X_i'^{c}$$

avec la forme linéaire $\odot X_i'^{c} \longrightarrow C$ associée par la propriété universelle du produit tensoriel symétrique au polynôme P_i . Soit alors $T = (T_i) \in \mathcal{O}'_{c\,cyl}(X)$. On définit $P(\frac{1}{\sqrt{-1}}\tilde{D})T$ comme la forme linéaire sur $\mathcal{O}'_{c\,cyl}(X)$ dont la restriction à $\mathcal{O}'_c(X_i)$ est représentée pour tout i par la distribution U_i .

c) Dérivations sur un espace de Hilbert complexifié $X^c = X + \sqrt{-1}\,X$

Soit d'abord X_i un e.v. réel de dimension finie et X_i^c son complexifié. Toute fonction φ_i définie sur X_i^c peut s'écrire $\varphi_i(z,\bar{z})$ avec

$$z = x + \sqrt{-1}\;y \qquad \text{et} \qquad \bar{z} = x - \sqrt{-1}\;y \;.$$

L'opérateur D_i de dérivation des fonctions et des distributions définies sur X_i^c s'écrit classiquement

$$D_i = D'_i + D''_i \qquad \text{avec } D'_i = \frac{\partial}{\partial z} \qquad D''_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

De la même manière, l'opérateur $\tilde{D}_i$ de dérivation de densité des distributions sur X_i^c, se décompose de la manière suivante :

$$\tilde{D}_i = \tilde{D}'_i + \tilde{D}''_i \qquad \text{avec} \quad \tilde{D}'_i = \frac{\tilde{\partial}}{\partial z} \qquad \text{et } \tilde{D}''_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

On dit qu'une prodistribution T_i sur X_i^c a une densité holomorphe si $\tilde{D}''_i\, T_i = 0$. Les opérateurs $\tilde{D}'_i$ et $\tilde{D}''_i$ peuvent être étendus aux protenseurs distributions contravariants antisymétriques.

Soit maintenant X^c le complexifié d'un espace de Hilbert réel X. On peut considérer X^c comme un espace vectoriel réel muni d'une bonne famille F^c obtenue en complexifiant une bonne famille F de sous espaces de X. On voit alors qu'on peut définir les opérateurs $\tilde{D}'$ et $\tilde{D}''$ agissant dans les F^c - protenseurs distributions contravariant antisymétriques à décroissance rapide.

§ 6. - Classes K^s du type Sobolev.

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et s entier positif. On rappelle que l'espace de Sobolev $W^{p,s}(R^n)$ peut être défini comme l'espace des fonctions g de $L^p(R^n)$ dont toutes les dérivées distributions d'ordre inférieur ou égal à s, appartiennent à $L^p(R^n)$. D'une manière plus propice à la généralisation en dimension infinie, on peut aussi définir $W^{p,s}(R^n)$ comme l'espace des g de $L^p(R^n)$ telles que

$$D^j g \in L^p(R^n, \underset{j}{\odot} C^n) \quad ; \qquad \text{pour} \quad j = 0,1\ldots s \; .$$

On constate alors que l'on a fait dans les deux paragraphes précédents tout ce qu'il fallait pour généraliser ceci en dimension infinie ; en effet, on a défini les classes L^p vectorielles et la dérivation au sens des prodistributions.

Mais le cas particulier le plus important est celui où l'on a $\mu = \nu$ et $p = 2$. Dans ce cas, on va donner une définition plus directe des classes de Sobolev en utilisant une technique de séries de Fourier.

LA TECHNIQUE DES SERIES DE FOURIER

On sait que les fonctions $(e^{in\theta})_{n\in Z}$ forment une base orthonormée de L^2 du tore et que toute distribution T sur le tore est caractérisée par sa série de Fourier

(80) $$T(\theta) \sim \Sigma\, T_n\, e^{in\theta}$$

la suite $(T_n)_{n\in Z}$ étant à croissance lente. Cette représentation est très utile : elle a permis , par exemple, à L. Schwartz de démontrer le théorème des noyaux, et elle permet aussi l'étude locale des espaces de Sobolev. Nous allons développer une technique de série de Fourier en dimension infinie pour caractériser d'abord simplement les espace K^s du type Sobolev introduits par Frolov puis L. GROSS [14] pour s entier politif seulement, puis pour étendre la définition de ces espaces pour s réel quelconque.

(81) Une base orthonormée de $L^2_\nu(X)$.

L'emploi de cette base remonte à Wiener et à Cameron Martin.

Raisonnons d'abord dans un espace euclidien X_n de dimension n , rapportée à une base orthonormée. Dans $L^2_\nu(X_n)$, on a une base orthonormée fermée par les polynômes

(82)
$$\mathcal{H}_\alpha(x) = \mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1 \dots x_n) = \mathcal{H}_{\alpha_1}(x_1) \dots \mathcal{H}_{\alpha_n}(x_n)$$
$$\text{avec } \mathcal{H}_{\alpha_i}(x_i) = 2^{-\alpha_i/2}(\alpha_i!)^{-\frac{1}{2}} H_{\alpha_i}(2^{-\frac{1}{2}} x_i)$$

Faisons à présent varier n et utilisons la bonne famille V définie en (27.b) . Posons

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha \, \nu = (\mathcal{H}_\alpha \, s_n)\nu \quad .$$

Comme $\mathcal{H}_0(t) \equiv 1$, ceci nous conduit à identifier pour tout n et pour tout $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ les fonctions cylindriques suivantes

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{H}}_{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, 0}$$

Moyennant cette identification, les prodistributions $\widetilde{\mathcal{H}}_\alpha \, \nu$ forment une base orthonormée de $L^2_\nu(X)$. Toute $T = g\nu$ de $L^2_\nu(X)$ est caractérisée par la suite de ses coefficients de Fourier

(83)
$$a_\alpha(T) = (T, \widetilde{\mathcal{H}}_\alpha \, \nu) = (T \mid \widetilde{\mathcal{H}}_\alpha \, \nu)$$

et l'on a

(84)
$$\|T\|_0^2 = \sup_n \sum_\alpha |a_\alpha(T)|^2$$

(85) Coefficients de Fourier d'une V. prodistribution à décroissance ultra rapide.

Une V.prodistribution $T = (T_n)$ est dite à décroissance ultra rapide si pour tout n , $\hat{T}_n$ est une fonction analytique. Pour une telle prodistribution, un multi-indice $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ étant fixé, posons

(86) $$a_\alpha(T) = (T_n \mid \mathcal{H}_\alpha) = < T_n , \overline{\mathcal{H}}_\alpha >$$

Notons que

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(T) = a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,0}(T) \quad .$$

Chaque T_n est caractérisée par la suite des nombres $a_\alpha(T)$, α décrivant l'ensemble des multi-indices d'ordre n . En effet, supposons que T_n telle que ces nombres soient tous nuls. Ceci entraîne que toutes les dérivées de $\hat{T}_n$ s'annulent à l'origine, par conséquent $T_n = 0$.

Faisons, à présent, varier n . On voit que toute V.prodistributionàà décroissance ultra-rapide est caractérisée par la suite de ses coefficients de Fourier.

(87) Espaces $K^s(X)$ du type Sobolev

Supposons d'abord que s est entier $\geq D$ et que X est de dimension finie n . $K^s(X) = \{ g \in L^2_\nu(X) \ , \ \tilde{D}^\ell g \in L^2_\nu(X, \bigodot_\ell X^c)$ pour $\ell = 0 \ldots s\}$
On munit ce sous-espace de $L^2_\nu(X_n)$ de la norme

(88) $$\|g\|_s = \left(\sum_{\ell=0}^{s} \int \| D^\ell g(x) \|^2 \, d\nu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Un calcul qui est exposé entièrement dans[21] montre que les éléments de $K^s(X)$ sont simplement caractérisables par leurs coefficients de Fourier.

(89) $$K^s(X) = \{g = \Sigma \, q_\alpha \, \mathcal{H}_\alpha \ , \ \|g\|'_s = (\Sigma_\alpha(1+|\alpha|^s)\,|a_\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty)$$

De plus il existe une constante C positive ne dépendant que de s mais indépendante de la dimension n de X telle que

(90) $$\forall g \in K^s \quad C^{-1}\|g\|'_s \leq \|g\|_s \leq C\|g\|'_s$$

Ceci nous permet de définir $K^s(X)$ pour s quelconque, dim X étant toujours fini. Dès à présent, on utilise toujours la même norme $\|.\|'_s$.

De plus, pour $s > 0$, on a des injections à image dense

$$\mathcal{D} \hookrightarrow K^s \hookrightarrow L^2_\nu$$

Par adjonction, on obtient les injections à image dense

$$L^2_\nu \hookrightarrow '(K^s) \hookrightarrow '\mathcal{D} .$$

On peut voir ainsi que pour $s \geq 0$, $K^{-s}(X_n)$ est isométrique à l'antidual de $K^s(X_n)$. Supposons à présent s quelconque et X de dimension quelconque rapporté à une base orthonormée. On définit ${}_\nu K^s(X)$ comme l'espace des V. prodistributions $T = (T_n)$ sur X, à décroissance ultra rapide et telles que

(91) $$\sup_n \|T_n\|'_s < \infty$$

C'est un espace de Hilbert. En vue d'étudier la T.F., on utilise des espaces de fonctions holomorphes introduits dans [8]

(92) DEFINITION. - <u>Soit</u> s <u>réel</u>, $\rho > 0$ <u>et</u> X^c <u>le complexifié de l'espace de Hilbert</u>. X. <u>On définit</u> $F^s_\rho(X^c)$ <u>comme l'espace des fonctions entières</u> f <u>sur</u> X^c <u>dont toutes les dérivées à l'origine</u> $f(0)\ldots D^\ell f(0)\ldots$ <u>sont des polynômes du type Hilbert Schmidt vérifiant la majoration</u>

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|D^\ell f(0)\|^2_{HS}\rho^k(1+\ell)^s}{k\,!} < \infty$$

Si $\rho = s$ et $s = 0$. On écrit simplement $F(X^c)$ au lieu de $F^0_0(X^c)$. On définit aussi $\bar{F}^s_\rho(X^c)$ et $\bar{F}(X^c)$ en remplaçant les fonctions holomorphes par des fonctions anti-holomorphes.

C'est un espace de Hilbert. L'inégalité de Cauchy Schwarz montre la convergence normale de la série de Taylor de f car pour tout $z \in X^c$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|D^{\ell} f(0,z)\|}{\ell!} \leq \sum \frac{\|D^{\ell} f(0)\| \rho^{\frac{k}{2}} (1+\ell)^{\frac{s}{2}}}{\ell!^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\|z\|^{\ell}}{\ell!^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{k}{2}} (1+\ell)^{s/2}}$$

$$\leq \|f\| \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|z\|^{2\ell}}{\ell! \, \rho^{k} (1+\ell)^{s/2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Un calcul effectué dans [21] montre la

(94) PROPOSITION. - <u>L'espace de Hilbert</u> X <u>est muni de la promesure normale</u> ν_λ <u>et il est rapporté à une base orthonormée fixée</u>. Soit ${}_V F^s_\rho(X^c)$ <u>l'espace des restrictions des éléments de</u> $F^s_\rho(X^c)$ à $\bigcup_n X^c_n$. <u>Alors la transformation de Fourier réalise une isométrie de</u> $({}_V K^s(X)$ sur ${}_V F^s_{1/\lambda}(X^c)$.

On mélange alors ce résultat avec (29) et l'on obtient alors

(95) DEFINITION de $K^s(X)$. - <u>L'espace de Hilbert réel séparable</u> X <u>est muni de la promesure normale réduite. Pour tout</u> s <u>réel</u>, <u>on note</u> $K^s(X)$ <u>l'espace des prodistributions sur</u> X <u>admettant les éléments de</u> $F_s(X^s)$ <u>pour transformées de Fourier</u>.

(96) THEOREME. - <u>Pour toute</u> $T = (T_i)$ <u>de</u> $K^s(X)$, <u>on pose</u> $\|T\| = \|FT\|$. <u>Alors</u>

$$\|T\| = \sup_i \|T_i\|_{K^s(X_i)}$$

On a pour tout $s \geq 0$ une troïka de Gelfand

(97) $$K^s(X) \subset L^2(X) \subset K^{-s}(X)$$

(98) <u>Application aux</u> e.d.f.

a) L. Gross utilise la technique des opérateurs non bornés, prolongeant ainsi en dimension infinie la technique utilisée en dimension finie par K.O. Friedrichs. Cette technique utilise seulement la structure hilbertienne de $L^2(X)$ et la densité de $\mathrm{Pol}_{cyl}(X)$ dans $L^2(X)$. Par exemple , l'application

$$\varphi \xrightarrow{-\tilde{\Delta}} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

définit un opérateur non borné symétrique positif de $L^2_\nu(X)$ de domaine $Pol_{cyl}(X)$. Le théorème de K.O. Friedrichs montre alors que $-\tilde{\Delta}$ admet une extension autoadjointe. La "théorie" des semi-groupes montre que $-\sqrt{-1}\,\tilde{\Delta}$ est le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire, correspondant au champ libre de bosons. Léonard GROSS [4] a démontré une inégalité prolongeant à l'espace $K^1(X)$ l'inégalité de Sobolev ; et ce résultat combiné à la théorie de perturbation des semi-groupes permet d'étudier certains types d'interaction.

La technique des coefficients de Fourier permet de montrer que $K^2(X)$ est contenu dans le domaine de $-\tilde{\Delta}$. De plus pour tout $a>0$, $-\tilde{\Delta}+a$ est un isomorphisme de l'espace hilbertisable $K^2(X)$ sur $L^2(X)$: voir [26] .

b) <u>Utilisation de la troïka</u> (97)

On sait que l'existence de troïka du type (97) en dimension finie a permis de vastes développements concernant :

- les théorèmes d'existence concernant les problèmes aux limites variationnels pour certaines équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques
- l'étude des inéquations variationnelles
- les équations non linéaires monotones
- les méthodes d'approximation
- le contrôle optimal

...

Tous ces développements pourraient être repris en dimension infinie. En particulier ceci permet de résoudre le problème du contrôle optimal des équations aux dérivées partielles à une infinité de variables, problème posé dans [28]

c) Théorie L^2 des équations aux dérivées fonctionnelles

Un théorème de L. Hormander montre que tout opérateur différentiel à coefficients constants $P \neq 0$ sur R^n est surjectif dans $L^2(R^n)$. On peut montrer un résultat analogue en dimension infinie pour $P = P(\frac{1}{\sqrt{-1}} \tilde{D})$, P étant un polynôme du type Hilbert Schmidt, la mesure de Lebesgue étant remplacée par la promesure normale sur l'espace de Hilbert séparable X .

En dimension finie, l'équation $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g = f$ entre formes différentielles a été étudiée par L. Hörmander en utilisant des inégalités a priori. Ces résultats ont été étendus en dimension infinie par Coeuré et Raboin (à paraître) en utilisant les classes $L^2_a(X,\ell)$ définies au paragraphe 4 , et en utilisant les définitions de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ donné précédemment.

L'étude locale des espaces K^s est effectuée dans [26]. Cette étude permet par exemple de prouver un théorème d'unicité dans $K^\infty(X)$ pour le problème de Cauchy - Kowalevska (B. Lascar) .

Remarques sur la théorie des champs de bosons.

On montre comment ce formalisme s'applique à la théorie des champs de bosons et à l'électrodynamique quantique. Des applications à la théorie relativiste des champs quantiques avec interaction sont en cours d'élaboration en collaboration avec R. Raczka.

7.A Le formalisme de I. SEGAL [6]

Pour quantifier un système à n degrés de liberté, on introduit classiquement l'espace $H = L^2(X_n)$ des classes de Lebesgue relative à la mesure dx sur X_n . Dans cet espace, on a les représentations unitaires $t \to Q(t)$ et $t \to P(t)$ du groupe additif X_n . Ces représentations sont telles que pour toute $g = g(q)$ dans $H = L^2(R^n_q)$, on a

(101) $$Q(t)g = e^{i(t,q)} g(q)$$

(102) $$P(t)g = g(q+t)$$

On a $$P(t)\,Q(s) = e^{i(t,s)}\,Q(s)\,P(t)$$

On peut rapporter X_n à une base orthonormée et introduit les restrictions des groupes $Q(t)$ et $P(t)$ au k^e axe de coordonnées avec $1 \leq k \leq n$. Notant iq_k et $i\,p_k$ les générateurs infinitésimaux de ces groupes, on a

(103) q_k = opérateur de multiplication par la coordonnée x_k

(104) $$p_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

et $[q_k , p_k] = i\,I\,\delta_{k\ell}$ pour k et $\ell = 1,\ldots,n$.

où I est l'identité et où $\delta_{k\ell}$ est le symbole de Kronecker.

Si l'on introduit le groupe de Weyl de dimension $2n+1$:

$$W_n = X_n \times X_n \times T$$

muni de la loi de composition

(105) $$(x,y,\alpha)(x',y',\alpha') = (x+x',\ y+y',\ \alpha\alpha'\ e^{-i(x',y)})$$

on en déduit une représentation unitaire du groupe de Weyl en posant

(106) $$T_g = \alpha\,P(x)\,Q(y) \quad \text{pour tout} \quad g = (x,y,\alpha) \quad \text{de} \quad W_n .$$

D'ailleurs si l'on pose $z = t+is$ et

$$W(t+is) = P(t)\,Q(s)\,e^{-\frac{i}{2}(t,s)}$$

on a

(107) $$\boxed{W(z)\,W(z') = e^{-\frac{i}{2}\operatorname{Im}(z,z')}\,W(z+z')}$$

Comme il n'y a pas de mesure de Lebesgue en dimension infinie, ces résultats ne se transposent pas directement en dimension infinie.

Pour effectuer cette transposition, I. Segal utilise l'isométrie naturelle de $H = L^2(R^n)$ sur

$$H_1 = \{g_1 \ ; (\pi)^{-n/2} \int_{X_n} |g_1(q)|^2 \ e^{-|q|^2} \ dq \subset \infty\}$$

et il transporte par cette isométrie, les représentations P et Q de Schrödinger. Plus précisément l'application

$$\alpha : f_1 \rightarrow (\pi)^{-n/4} f_1(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

réalise une isométrie de H_1 sur H . Et α^{-1} transporte les représentations unitaires P et Q de X_n et les représentations unitaires P^1 et Q^1 avec

(108) $$Q^1(t) = \alpha^{-1} \ Q(t) \alpha : \ g_1 \rightarrow g_1(q) \ e^{i(q,t)}$$

(109) $$P^1(t) = \alpha^{-1} \ P(t) \alpha : \ g_1 \rightarrow g_1(q+t) \ e^{-\frac{|t|^2}{2} - (t,q)}$$

Naturellement ceci fournit une représentation équivalente du groupe de Weyl. On peut rapporter X_n à une base orthonormée et introduire les restrictions Q^1_k et P^1_k des représentaires unitaires Q^1 et P^1 au $k^{\text{ème}}$ axe de coordonnée. Alors les générateurs infinitésimaux de ces groupes sont $i \, q^1_k$ et $i \, p^1_k$ avec

(110) (q^1_k) = opérateur de multiplication par la coordonnée q_k

(111) $$(p^1_k) : g \longmapsto \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} - q_k g \right)$$

On voit à présent que l'extension en dimension infinie est possible : c'est le résultat fondamental de [34] . Formulons ces résultats dans notre langage.

On remplace X_n par un espace de Hilbert réel séparable X que l'on équipe de la bonne famille maximale et de la promesure normale $\nu_{\frac{1}{2}}$ de variance $\frac{1}{2}$. On travaille avec l'espace $L^2(X)$.

On voit que l'on peut définir les représentations unitaires Q_1 et P_1 à valeurs dans $L^2(X)$ du groupe additif de X par les formules (108) et (109) . En effet :

- $Q^1(t)$ est naturellement définie par (108) pour g polynomiale cylindrique. Comme $Q^1(t)$ est alors isométrique inversible, on obtient l'extension unitaire à $L^2(X)$ par prolongement continu.

- Le fait que $P^1(t)$ définie par (109) se prolonge en un opérateur unitaire de $L^2(X)$ résulte de (69).

D'ailleurs en utilisant la propriété (5I - c) , on obtient les expressions explicites de $Q^1(t)g$ et $P^1(t)g$ pour g quelconque dans $L^2(\Omega)$

(112) $$Q^1(t) : g \to g(\omega)\, e^{i(t,\omega)}$$

(113) $$P^1(t) : g \to g(\omega+t)\, e^{-\frac{\|t\|^2}{2}-(t,\omega)}$$

Si l'on rapporte X à une base orthonormée, on voit que la théorie des prodistributions permet de donner un sens aux opérateurs P^1_k définis par (111) , et ceci pour tout g dans $L^2(\Omega)$. De plus, la théorie des prodistributions et des espaces de Sobolev permet de trouver un domaine non trivial pour l'hamiltonien quantique

(114) $$\tilde{\Delta} = -\Sigma\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) + \Sigma\, x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Il suffit de prendre $K^2(X)$. De même $K^{+\infty}(X)$ est un domaine de $(\tilde{\Delta})^k$

Il nous semble important de noter que la règle pratique du "normal ordering" consiste à faire d'abord l'opérateur de dérivation de densité, puis l'opérateur de divergence. Evidemment, s'il n'intervenait en théorie quantique des champs que des opérateurs autoadjoints ou des générateurs infinitésimaux de semi-groupes, le formalisme des prodistributions serait peu utile, car on pourrait utiliser la théorie des opérateurs non bornés.

Mais ce n'est pas le cas et par exemple, il faut faire un raisonnement pour prouver que l'adjoint de

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k^1 + i\, p_k^1) \quad \text{est} \quad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k^1 - i\, p_k^1)$$

6.B. ETUDE D'UN ESPACE DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

Opérateurs d' et d" .

On se limite à la considération de X^c , complexifié de l'espace de Hilbert réel séparable X . Comme X^c a aussi une structure réelle, tout ce qui a été fait jusqu'ici peut être appliqué à X^c . Munissons X^c de la pro-mesure ν^d de transformée de Fourier

$$z \longrightarrow \widehat{\nu^d}(z) = \exp(-\frac{1}{4d}\,\|z\|^2)$$

où d est un nombre positif fixé. On considère ν^d comme une u-promesure où la bonne famille $F_u(X^c)$ est obtenue par complexification d'une bonne famille relatif à X . Si $s^c_{ij} : X^c_i \longrightarrow X^c_j$ est une surjection canonique, les bases orthonormées de X_i et X_j, sont aussi des bases orthonormées des complexifiées X^c_i et X^c_j de X_i et X_j . Les coordonnées complexes correspondantes sont notées $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1,\dots,n$. On pose $\bar{z}_k = x_k - iy_k$. On a

$$s^c_i(\nu^d) = \bigotimes_1^n m = \beta_i dxdy \;;\; s^c_j(\nu^d) = \bigotimes_1^{n'} m = \beta_j dx'dy'$$

où m est la mesure gaussienne sur la droite complexe $u + iv = p$

$$m = d\pi^{-1} \exp(-d\, p\, \bar{p}) \,.\, du \quad dv \;.$$

On pose comme d'habitude

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \;;\; \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right) .$$

L'opérateur D se scinde en deux opérateurs d' et d'' que l'on explicite par exemple dans le cas des fonctions

$$\mathcal{D}(X_i^c) \xrightarrow{d'} \mathcal{D}(X_i^c) \otimes X_i^c \;;\; \mathcal{D}(X_i^c) \xrightarrow{d''} \mathcal{D}(X_i^c) \otimes X_i^c$$

$$\varphi \longrightarrow \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\, dz_k \qquad \varphi \longmapsto \sum \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_k}\, \overline{dz_k}$$

On introduit les opérateurs de divergence $\check{\mathrm{div}}'$ et $\check{\mathrm{div}}''$

$$\mathcal{D}(X_i^c) \xleftarrow{\check{\mathrm{div}}'} \mathcal{D}(X_i^c) \otimes X_i^c \qquad \mathcal{D}(X_i^c) \xleftarrow{\check{\mathrm{div}}''} \mathcal{D}(X_i^c) \otimes X_i^c$$

$$\sum \frac{\check{\partial}\psi_k}{\partial z_k} \longleftarrow\!\!\shortmid\; \psi = \sum \psi_k\, dz_k \qquad \sum \frac{\check{\partial}\psi_k}{\partial \bar{z}_k} \longleftarrow\!\!\shortmid\; \sum_k \psi_k \;\; dz_k$$

avec
$$\frac{\check{\partial}}{\partial z_k} = \beta_i^{-1}\,\frac{\partial}{\partial z_k}\,\beta_i \quad \text{et} \quad \frac{\check{\partial}}{\partial \bar{z}_k} = \beta_i^{-1}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\,\beta_i \;.$$

On obtient les formules d'intégration par parties

$$(\psi, d'\varphi) = -\,(\check{\mathrm{div}}'\psi, \varphi) \quad (\psi, d''\varphi) = -\,(\check{\mathrm{div}}''\psi, \varphi) \;.$$

En procédant par transposition comme au § 5 , on étend les opérateurs d', d'', $\check{\mathrm{div}}'$, $\check{\mathrm{div}}''$ aux distributions. Ces extensions sont notées $\tilde{d}'$, $\tilde{d}''$, div', div'' . On fait maintenant varier i . Soit $T = (T_i)$ une u-prodistribution sur X^c . On définit $\tilde{d}''T$ comme le u-protenseur distribution de bidegré (0,1) représenté pour tout i par le tenseur distribution :

$$\tilde{d}''\, T_i \;,$$

de coordonnées $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k} T \;;\; 1 \leq k \leq n$.

On dit que T est holomorphe au sens des prodistributions si $\tilde{d}''T = 0$; autrement dit si chaque T_i a une densité holomorphe par rapport à la mesure $\nu_i^d = \overset{n}{\underset{1}{\otimes}} m$.

Relation entre deux notions d'holomorphie.

On utilise les notations du paragraphe 4 et l'on travaille avec la bonne famille maximale de X . La complexifiée ℓ^c de ℓ transforme la promesure ν^d sur X^c en une probabilité P^d sur Ω^c . On rappelle d'abord la définition des classes $F^e(X^c)$ de fonctions holomorphes introduites par DWYER [8] . Comme les restrictions aux espaces X_i^c de toute fonction de $F^e(X^c)$ définissent un système cohérent de mesures, on peut montrer que $F^e(X^c)$ est isométrique à une classe de fonctions holomorphes introduites par I.E. SEGAL [35] . D'où l'existence de prodistributions holomorphes sur X^c qui sont définies par des fonctions non continues sur Ω^c .

(117) Définition des classes $F_s^e(X^c)$ de fonctions holomorphes du type Fock.

Soit $e > 0$ et s réel. On définit $F_s^e(X^c)$ comme l'espace des fonctions entières f sur X^c telles que

(118)
$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{D^\ell f(0,z)}{\ell!}$$

la suite des dérivées à l'origine de f vérifiant

(119)
$$\|f\|_{e,s} = \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|D^\ell f(0)\|^2}{\ell!} e^\ell (1+\ell)^s \Big)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

où $\|D^\ell f(0)\|$ désigne la norme de $D^\ell f(0)$ dans le produit tensoriel symétrique hilbertien complété $\hat{\otimes}_\ell X^c$.

Pour simplifier l'écriture, on écrit $F^e(X^c)$ au lieu de $F_o^e(X^c)$.

(120) Remarques. -

a) La série (118) converge car en utilisant l'inégalité de Gauchy Scharz, il vient

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|D^{\ell} f(0,z)\|}{\ell!} = \Sigma \frac{\|D^{\ell} f(0)\|}{\ell!^{\frac{1}{2}}} e^{\ell/2}(1+\ell)^{s/2} \cdot \frac{\|z\|^{\ell}}{\ell!^{\frac{1}{2}} e^{\ell/2}(1+\ell)^{s/2}}$$

$$= \|f\|_{e,s} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\|z\|^{2\ell}}{\ell!\ e^{\ell}(1+\ell)^{s}} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

La somme $f(z)$ de la série (5.4) définit une fonction holomorphe sur tout X^c car f est bornée sur tout borné et sa restriction à toute droite affine est holomorphe.

b) Notons que $F_s^e(X^c)$ est un espace de Hilbert complexe dans lequel les fonctions polynomiales cylindriques sont partout denses.

c) Soient $\tilde{P} = P \circ s_i$ et $\tilde{Q} = Q \circ s_i$ deux fonctions polynomiales cylindriques sur X^c se factorisant à travers X_i^c. Cet espace étant rapporté à une base orthonormée, les polynômes P et Q peuvent s'écrire

$$P(z) = \Sigma\, a_{\alpha} \frac{(-i)^{|\alpha|} d^{|\alpha|/2}}{\alpha!^{\frac{1}{2}}} z^{\alpha} \ ; \ Q(z) = \Sigma\, b_{\beta} \frac{(-i)^{|\beta|} d^{|\beta|/2}}{\beta!^{\frac{1}{2}}} z^{\beta}$$

avec $d > 0$, les a_{α} et b_{β} étant des coefficients. Il résulte de (3.8) que le produit scalaire dans $F^{1/d}(X^c)$ de $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ est égal à

$$(\tilde{P}|\tilde{Q}) = \Sigma\, a_{\alpha}\, \bar{b}_{\alpha} .$$

d) Soient k et ℓ deux entiers ≥ 0. Dans $L_m^2(C)$ le produit scalaire des monomes p^k et p^{ℓ} est égal à

$$\iint_C p^k\, \bar{p}^{\ell}\, dm(p) = \frac{d}{\pi} \iint r^{k-\ell+1} \exp(-dr^2 + i\,(k-\ell)\theta)\, dr d\theta = d^{-k} k!\ \delta_k^{\ell} .$$

e) Avec cette relation on peut calculer le produit scalaire dans $L^2_{\nu^d}(X^c)$ des promesures $\tilde{P}\ \nu^d$ et $\tilde{Q}\ \nu^d$,

$$(\tilde{P}\ \nu^d | \tilde{Q}\ \nu^d) = \int_{X_i^c} P(z)\ \overline{Q(z)}\ d\ \nu^d(z) = \Sigma\, a_\alpha \overline{b}_\alpha .$$

(122) Donc $(\tilde{P}|\tilde{Q})_{F^{1/d}} = (\tilde{P}\ \nu^d | \tilde{Q}\ \nu^d)_{L^2_{\nu d}(X^c)}$.

Comme les fonctions polynomiales cylindriques sont denses dans $F^{1/d}(X^c)$, on voit que cet espace est isométrique à un sous-espace fermé de $L^2_{\nu^d}(X^c)$.

(123) PROPOSITION et DEFINITION de $W^d(X^c)$.

a) <u>Soit</u> $d > 0$. <u>On note</u> $W^d(X^c)$ <u>l'adhérence dans</u> $L^2_{\nu^d}(X^c)$ <u>du sous-espace décrit par les</u> $\tilde{P}\ \nu^d$, $\tilde{P}$ <u>décrivant les fonctions polynomiales cylindriques sur</u> X^c .

b) <u>L'application</u> $\tilde{P} \to \tilde{P}\ \nu^d$ <u>définit par prolongement continu une isométrie</u> I <u>de</u> $F^{1/d}(X^c)$ <u>sur</u> $W^d(X^c)$.

La proposition suivante donne une définition plus complète de l'isométrie I et une caractérisation des éléments de $F^{1/d}(X^c)$ appartenant à $W^d(X^c)$.

(124) PROPOSITION. -

a) <u>Soit</u> $\Phi \in F^{1/d}(X^c)$ <u>et</u> Φ_i <u>la restriction de</u> Φ à X_i^c . <u>Alors la famille de mesures</u> $(\Phi_i\ \nu_i^d)_i$ <u>est cohérente, et elle définit la promesure</u> $I(\Phi)$.

b) <u>Soit</u> $g \in L^2_{\nu^d}(X^c)$. <u>Alors, pour que</u> $g \in W^d(X^c)$ <u>il faut et il suffit que</u> g <u>soit holomorphe au sens des prodistributions</u>.

<u>Démonstration</u> :

a) La cohérence se démontre en utilisant (5.6d) . On remarque :

$$\sup_i \int |\Phi_i(z)|^2 \, d\,\nu_i^d(z) = \|\Phi\|^2_{F^{1/d}} < \infty \,.$$

Vue la proposition (3.5), la promesure $T = (\Phi_i \nu_i^d)$ appartient à $L^2_{\nu^d}(X^c)$ et l'application $\Phi \to T$ est une isométrie J de $F^{1/d}$ sur W^d. On a $J = 1$ car ces isométries coïncident sur une partie dense de $F^{1/d}$.

b) Tout $g \in W^d$ définit une promesure $(\Phi_i \nu_i^d)$ telle que les Φ_i soient holomorphes, donc g est holomorphe au sens des prodistributions. Réciproquement tout g de $L^2_{\nu^d}$ définit une promesure $(\varphi_i \nu_i^d)$ sur X telle que

$$* \qquad \sup_i \int |\varphi_i|^2 \, d\,\nu_i^d < \infty \,.$$

Si g est holomorphe, les φ_i sont holomorphes. La cohérence des $\varphi_i \nu_i^d$ entraîne que les φ_i se raccordent et définissent ainsi une fonction Φ sur X^c. La condition * entraîne $\Phi \in F^{1/d}$.

(125) <u>Remarque.</u> -

Utilisons une notation définie au point (51 - c). On voit que la fonction $z(w)$ de $L^2(\Omega^c)$ associée à tout point z de $X^c \setminus (\Omega^c)'$ est holomorphe au sens des prodistributions, sans être continue.

<u>La représentation de Fock-Cook et la représentation de Bargmann Segal des relations de commutation.</u>

Fock avait donné le principe de construction d'une autre représentation des relations de commutation. Cette construction effectuée par Cook utilise l'espace de Fock

$$H' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\hat{\otimes}_n X^c)$$

Le passage de la représentation de Fock Cook à la représentation de Segal a été donné par I. Segal en utilisant une construction imaginée par Wiener pour l'étude du mouvement brownien.

Cette construction est basée sur des méthodes probabilistes, et est encore utilisée aujourd'hui en théorie constructive des champs : (voir par exemple [29]) pour obtenir une isométrie de H' sur H^1 .

Nous allons voir que cette isométrie de l'espace de Segal $H^1 = L^2(X)$ sur l'espace de Fock H' est tout simplement fournie par la transformation de Fourier.

En effet, il suffit de poser pour toute g cylindrique de $L^2(X)$

$$(\theta g)(\bar{z}) = \int_X g(q)\, e^{-\frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}(\bar{z},q)} d\nu_{\frac{1}{2}}(q)$$

θ se prolonge en une isométrie de $L^2(X)$ sur $\bar{\bar{F}}(X^c)$. En transportant par θ les groupes unitaires P^1 et Q^1 de $L^2(X^c)$, on obtient les représentations unitaires suivantes P^2 et Q^2 du groupe additif de X :

$$P^2(t) = \theta^{-1}P^1(t)\,\theta : \Phi \mapsto e^{-\frac{|t|^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{z},t)}\,\Phi(\bar{z} + \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$Q^2(t) = \theta^{-1}Q^1(t)\,\theta : \Phi \mapsto i^{-1}\,\Phi(\bar{z} + \frac{it}{\sqrt{2}})\, e^{\frac{i(t,\bar{z})}{\sqrt{2}} - \frac{|t|^2}{2}}$$

Rapportant X à une base orthonormée $e_i, e_r \ldots$, on peut considérer les restrictions de ces représentations à la droite de X engendrée par e_k . Les générateurs infinitésimaux de ces groupes sont $i\,p_k^2$ et $i\,q_k^2$ avec

$$p_k^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{z}_k - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})$$

$$q_k^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{z}_k + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})$$

On est ainsi amené à considérer les combinaisons de Fock-Dirac de ces opérateurs :

$$a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k^2 - i\ p_k^2) = \bar{z}_k$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k^2 + i\ p_k^2) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

Cette notation est justifiée car a_k^* est l'adjoint de l'opérateur non borné a . On a ainsi obtenu la représentation de Fock-Cook car l'application qui à toute f de $\bar{F}(X^c)$ fait correspondre son développement de Taylor à l'origine est une isométrie de $\bar{F}(X^c)$ sur l'espace de Fock.

Etats cohérents - Seconde quantification.

En électronique quantique, les physiciens effectuent des raisonnements relatifs à l'espace de Fock $\bar{F}(C)$ ou $\bar{F}(C^n)$, en effectuant des passages à la limite formels lorsque n tend vers $+\infty$: voir par exemple [3] page 138 .

Les raisonnements qui précèdent fournissent une méthode permettant de rendre rigoureux ces passages à la limite.

Indiquons le début de la procédure.

Noyau reproduisant de $\bar{F}(X^c)$

Si Y est un ensemble quelconque, l'espace C^Y des fonctions à valeurs complexes sur Y est muni de la topologie produit , c'est-à-dire, de la topologie de la convergence simple. Le dual $C^{(Y)}$ de cet espace est identifiable à l'espace des combinaisons linéaires finies de masses de Dirac sur Y . Un noyau reproduisant sur Y est une forme quadratique positive Q sur $C^{(Y)}$. Plus précisément la forme bilinéaire symétrique définissant Q est la forme bilinéaire associée à un opérateur symétrique positif N de $C^{(Y)}$ vers C^Y ; avec la terminologie de L.Schwartz c'est un noyau positif et ce noyau est défini par la fonction suivante sur Y x Y

$$A(y,y') = (N\,\delta_{y'} \,|\, \delta_y)$$

D'après la théorie de Bargmann - Aronszajn, l'ensemble de ces noyaux positifs est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des sous-espace hilbertiens de C^Y ; le sous-espace hilbertien H associé à N étant

$$\forall \Phi \in H ; (\Phi \mid A(\bullet, y)) = \Phi(y)$$

En particulier, si $\Phi = A(\bullet, y')$, on en déduit

$$(A(\bullet, y') \mid A(\bullet, y)) = A(y, y')$$

C'est la propriété de reproduction. Appliquons ces résultats et ces notions à $Y = X^c$.

(133) PROPOSITION. -

a) Pour toute Φ de $\bar{F}(X^c)$ et pour tout z de X^c , on a la formule de représentation intégrale

(134) $$\Phi(\bar{z}) = \int \Phi(\bar{\omega}')\, e^{(\bar{z}, \omega')} dP(\omega')$$

b) Le sous-espace hilbertien $\bar{F}(X^c)$ est défini par le noyau reproduisant

$$A(z, z') = \exp + (z, \bar{z}')$$

Démonstration : Il suffit de prouver a) . La formule est vraie pour Φ polynomiale cylindrique d'après les résultats connus relatifs à la dimension finie. Pour en déduire (134) pour Φ quelconque, on note que pour $\bar{z}$ fixé, les deux membres de (134) définissent des formes linéaires continues sur $\bar{F}(X^c)$ qui coïncident sur un sous-espace dense. Ces deux formes coïncident donc partout.

(135) Etats cohérents.

Pour tout $z \in X^c$, la fonction $A(z, \bullet)$ est appelée état cohérent associé à z . Cette fonction θ_z est telle que :

On a

$$\|\theta_z\|^2 = \int e^{(z,\bar{\omega}')+(\bar{z},\omega')}dP(\omega) = e^{+\|z\|^2}$$

L'état cohérent normalisé associé à z est par définition

$$|z> = e^{(z,\bar{\omega}) - \|z\|^2/2}$$

On peut voir que les états cohérents forment un système total dans $\bar{F}(X^c)$ et qu'ils correspondent par transformation de Fourier à des paquets d'ondes $C \exp(C'x)$ dans l'espace de Segal $L^2(X)$.

On peut calculer le produit scalaire de deux états cohérents .

Représentation intégrale des opérateurs non bornés de l'espace de Segal et de l'espace de Fock.

En mécanique quantique usuelle, un procédé de quantification associe à toute fonction $f(q,p)$ sur l'espace de phase un opérateur non borné $\hat{f}$ de $L^2(R^n)$: on dit que $\hat{f}$ est l'observable quantique associé à l'observable classique f . Par exemple H. Weyl a donné un procédé de quantification utilisant la représentation de f comme intégrale de Fourier ; puis il en déduit une représentation intégrale pour $\hat{f}$. Les travaux récents de Kostant et de J.M. Souriau aboutissent à des formules du même genre.

Il semble donc utile de trouver des formules analogues en dimension infinie. Ce problème est résolu dans un travail en cours, effectué en collaboration avec R. Raczka [19] .

B I B L I O G R A P H I E

[1] A. BADRIKIAN : Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. Lectures Notes in mathematics n° 139. Springer Berlin (1970) .

[2] F.A. BEREZIN : Representation of operators by means of functionals Transl. Moscow Math. Society n° 17 pp. 129 - 218 (1967) .

[3] V. BARGMANN : Comm. Pure Appl. Math. 14 187 (1961) .

[4] V. BARGMANN Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 48 p. 199-201 (1962) .

[5] N. BOURBAKI : Variétés différentielles et analytiques. Livre XXXIII - Fascicule de résultats. Paragraphes 1 à 7 - Hermann Paris (1967) .

[6] C.B. de WITT : Feynman's Path integral. Comm. Math. Phys. 28 p. 47 - 67 (1972) .

[7] P. KRISTENSEN and L. MEJLBO : On a Fourier transform in infinitely many dimensions Symp. on Probability methods in analysio. Lecture Notes in mathematics n° 31 Springer Verlag p. 187 - I96 (1967) .

[8] T.A.W. DWYER III : Bull. Amer. Math. Soc. 77 n° 5 Sept. 1971 pp. 725 - 730 .

[9] D.H. FREMLIN, D.J.H. GARLING et R.C. HAYDON : Bounded measures on topological spaces. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 25 p. 115-136 (1972) .

[10] K.O. FRIEDRICHS and H.N. SHAPIRO : Integration over Hilbert space and outer extensions. Proc. N.A.S. United States vol.43 1957 - pp. 336-378

[11] FROLOV : Soviet Doklady

[12] D.J.H. GARLING : A generalized form of inductive limit topology for vector spaces. London Math. Soc. (3) . 14. pp. 1 - 28 . (1964) .

[13] I.M. GELFAND et VILENKIN : Les fonctions généralisées. tome 4. Dunod Paris

[14] L. GROSS : Logarithmic Sobolev inequalities (to appear) .

[15] L. GROSS : Potential theory on Hilbert space. Journal of Functional Analysis - I - p. 123 - 181 (1967) .

[16] A. GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mémoire n° 16 de l'A.M.S. Providence 1966 .

[17] L. Hormander : Linear partial differential operators. Springer Verlag (1963) .

[18] D.R. KLAUDER et E.C.G. SUDARSHAN : Fundamentals of quantum optics. Benjamin Inc. New York Amsterdam (1968) .

[19] P. KREE et R. RACZKA : (en préparation) .

[20] P. KREE : Courants et courants cylindriques sur les variétés de dimension infinie. Linear operators an approximation. Oberwolfach 1971. Birkhauser. Bâle .

[21] M. KREE Propriété de trace d'espaces du type Sobolev en dimension infinie - Comptes rendus t. 279 série A. p. 157 - 160 (1976)

[22] P. KREE : Exposé (multigraphie) au Collège de France. Séminaire J. Leray (Janvier 1973) .

[23] P. KREE : Extension du calcul différentiel en dimension infinie - Comptes Rendus. tome 280. série A . pp. 7 - 9 (6 Janvier 1975) .

[24] P. KREE : Distributions sur un espace de Banach - Comptes Rendus (Juin 1975) .

[25] P. KREE : Application de la théorie des distributions aux équations aux dérivées fonctionnelles. Conférence au Colloque de Lyon de Géométrie en dimension infinie (Mai 1975) .

[26] B. LASCAR : Propriétés locales des espaces du type Sobolev en dimension infinie. Note aux Comptes Rendus série A. Mai 1975 .

[27] Y. LE JEAN : Note aux Comptes Rendus (en préparation) .

[28] J.L. LIONS : Leçon inaugurale au Collège de France (Déc. 1973) .

[29] E. NELSON : Probability theory and euclidean field theory p. 94 - 124 dans Constructive Quantun Field theory. Lecture Notes in Physics n° 25. Springer Verlag (1973) .

[30] J. NEVEU : Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson Paris (1970) .

[31] C. POUETSCH : Comptes Rendus (en préparation) .

[32] L. SCHWARTZ : Théorie des distributions. Hermann Paris (1951) .

[33] L. SCHARTZ : Les applications radonifiantes. Séminaire de l'Ecole polytechnique. Paris (1970-1971) .

[34] I. SEGAL : Tensor algebras over Hilbert spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956) p. 106-134 .

[35] I. SEGAL : Illinois J. of. Math. 6. 500 (1962) .