David Ruelle

Formalisme thermodynamique en théorie ergodique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1975, tome 22
« Exposés de : H. Araki, H.J. Borchers, J.P. Ferrier, P. Krée, J.F. Pommaret, D. Ruelle, R. Stora et A. Voros », , exp. n° 4, p. 1-28

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1975__22__A4_0>

FORMALISME THERMODYNAMIQUE EN THEORIE ERGODIQUE

David RUELLE

I H E S - 91440 Bures-sur-Yvette

0. INTRODUCTION.

Le formalisme de la mécanique statistique classique de l'équilibre a envahi depuis quelques années des domaines mathématiques nouveaux. Il s'agit, en particulier, de la théorie ergodique des difféomorphismes et des flots différentiables, théorie qui n'a apparemment aucun rapport avec la mécanique statistique. Le but des exposés qui vont suivre est de donner une idée des développements qui ont eu lieu. Ces développements sont dûs principalement à Sinai, Walters, Bowen et moi-même.

Voici maintenant un sommaire des matières que nous allons discuter.

I. Nous allons d'abord refaire rapidement la théorie des systèmes classiques de spins sur un réseau : états de Gibbs, entropie, pression, principe variationnel, états d'équilibre, etc...

Il faut remarquer que pour les applications que nous avons en vue on pourra se restreindre aux systèmes sur un réseau à une dimension. Les changements de phase n'apparaîtront pas dans nos considérations, alors qu'ils jouent un rôle central dans la mécanique statistique en dimension supérieure à un.

Exposés faits à la rencontre du 22 au 24 Mai 1975 de la R.C.P. n° 25 à Strasbourg.

II. Une partie de la théorie de I s'étend au cas où l'ensemble des configurations du système de spins est remplacé par un compact métrisable quelconque $\underline{\Omega}$, et les translations du réseau par des homéomorphismes de $\underline{\Omega}$. On peut encore introduire l'entropie, la pression, et prouver le principe variationnel (théorème de Walters).

III. Ce qu'on n'a pas étendu de manière satisfaisante à la situation générale de II, c'est la notion d'état de Gibbs. La raison en est la suivante. L'espace des configurations d'un système de spins sur un réseau a une structure produit (ou presque) : à chaque point du réseau correspond un facteur. La définition des états de Gibbs fait intervenir cette structure produit. Il se trouve que pour certains systèmes dynamiques différentiels, il apparaît une structure produit locale qui permet la définition des états de Gibbs. Les systèmes dynamiques différentiels en question sont ceux qui satisfont à l'Axiome A de Smale. Nous passerons en revue leur étude.

IV. Soit f un difféomorphisme de classe C^2 sur une variété compacte M . Si f vérifie l'Axiome A de Smale, on peut établir des théorèmes ergodiques du type suivant. Pour presque tout $x \in M$ (au sens de la mesure de Lebesgue), $f^n x$ tend vers un attracteur quand $n \to \infty$ (on précisera plus tard ce qu'est un attracteur : il y en a un nombre fini dans M). En outre, il y a une mesure de probabilité ρ sur l'attracteur, ne dépendant que de l'attracteur, et telle que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A(f^n x) = \int A(y)\, \rho(dy)$$

pour toute fonction continue A sur M . La mesure ρ est définie par la mécanique statistique comme une mesure de Gibbs (ou d'équilibre). On a des résultats semblables pour les flots ; ces résultats sont intéressants eu égard aux idées sur la turbulence introduites par Ruelle et Takens [16].

V. Un ingrédient essentiel en mécanique statistique est la limite thermodynamique, ou limite d'une système infini. Par exemple, une fonction de partition Z_n (avec frontière périodique) est définie comme somme sur les configurations périodiques de période n sur le réseau. La pression se calcule en prenant la limite pour $n \to \infty$ de $(\log Z_n)/n$. Ceci se généralise aux difféomorphismes satisfaisant à l'Axiome A, Z_n étant une somme sur les points périodiques de période n. On peut alors, au lieu de prendre la limite $n \to \infty$, s'intéresser à la série

$$\zeta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} Z_n .$$

Cette série est formée par analogie avec la fonction ζ (de Artin et Mazur [1]) qui compte les points périodiques d'un difféomorphisme. On a une définition analogue pour les flots. On peut démontrer pour ces nouvelles fonctions ζ d'intéressantes propriétés de méromorphie en utilisant les propriétés spectrales de la <u>matrice de transfert</u> de la mécanique statistique. Cela permet de retrouver des résultats classiques et d'en établir de nouveaux.

1. SYSTEMES CLASSIQUES DE SPINS SUR UN RESEAU.

Comme indiqué dans l'introduction, on se limitera aux systèmes à une dimension.

1.1. L'espace de configuration.

A chaque point x du réseau $\mathbb{Z}$ un nombre fini de "valeurs du spin" sont possibles, formant un ensemble Ω_o. On se donne aussi matrice t indexée par $\Omega_o \times \Omega_o$ et dont les éléments sont 0 ou 1. Une configuration de spins permise sur l'intervalle $[k,\ell] \subset \mathbb{Z}$ est un élément $\xi = (\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_\ell)$ de $(\Omega_o)^{[k,\ell]}$ tel que

$$t_{\xi_k \xi_{k+1}} = \dots = t_{\xi_{\ell-1} \xi_\ell} = 1 .$$

On notera $\Omega_{[k,\ell]}$ l'ensemble de ces configurations permises. L'espace des configurations sur le réseau $\mathbb{Z}$ tout entier est

$$\Omega = \{\xi \in (\Omega_o)^{\mathbb{Z}} : t_{\xi_x \xi_{x+1}} = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{Z}\} .$$

Utilisant sur Ω_o la topologie discrète et sur $(\Omega_o)^{\mathbb{Z}}$ la topologie produit, on trouve que Ω est compact.

On définit un homéomorphisme $\tau : \Omega \to \Omega$ par

$$(1) \qquad (\tau\xi)_x = \xi_{x+1} .$$

(1) définit aussi un homéomorphisme $\tau : \Omega_{[k,\ell]} \to \Omega_{[k-1,\ell-1]}$ pour tout intervalle fini $[k,\ell]$, et de même pour un intervalle semi-infini $[k, +\infty]$.

Pour simplifier, nous supposerons à partir de maintenant qu'il existe un entier $N > 0$ tel que tous les éléments de la matrice t^N sont > 0. Cela revient à faire l'hypothèse que le système dynamique topologique (Ω, τ) est topologiquement mélangeant.

1.2. Limites thermodynamiques.

Une interaction Φ est une fonction à valeurs réelles définie sur les configurations (permises) dans les intervalles finis. Nous supposerons cette fonction invariante par la translation τ. Etant donnée une interaction Φ, une fonction énergie

$$U^{\Phi}_{[a,b]} : \Omega_{[a,b]} \mapsto \mathbb{R}$$

est définie pour chaque intervalle fini $[a,b]$ par

$$U^{\Phi}_{[a,b]}(\xi) = \sum_{k,\ell\,:\,a\leq k<\ell\leq b} \Phi(\xi|[k,\ell]) .$$

On écrit alors

$$Z^{\Phi}_{[a,b]} = \sum_{\xi\in\Omega_{[a,b]}} \exp[-U^{\Phi}_{[a,b]}(\xi)]$$

$$P^{\Phi}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \log Z^{\Phi}_{[a,b]}$$

$$\sigma^{\Phi}_{[a,b]}\{\xi\} = (Z^{\Phi}_{[a,b]})^{-1} \exp[-U^{\Phi}_{[a,b]}(\xi)] .$$

En particulier, $\sigma^{\Phi}_{[a,b]}$ est une mesure de probabilité sur $\Omega_{[a,b]}$.

Supposons que

$$\|\Phi\| = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \sup_{\xi\in\Omega_{[0,\ell]}} |\Phi(\xi)| < +\infty .$$

Il existe alors une mesure unique σ sur Ω telle que, pour tout intervalle fini $[k,\ell]$,

(1) $$\lim_{a\to-\infty,\,b\to+\infty} \alpha_{[k,\ell],[a,b]}\,\sigma^{\Phi}_{[a,b]} = \alpha_{[k,\ell],\mathbb{Z}}\,\sigma .$$

Dans cette formule $\alpha_{[k,\ell],[a,b]} : \Omega_{[a,b]} \mapsto \Omega_{[k,\ell]}$ est l'opération de restriction à $[k,\ell]$ d'une configuration dans $[a,b]$ quand $[k,\ell]\subset[a,b]$; de même, pour $\alpha_{[k,\ell],\mathbb{Z}}$. On verra que la mesure de probabilité σ peut être appelée état d'équilibre ou état de Gibbs, pour l'interaction Φ.

Supposons que

$$|\Phi| = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sup_{\xi \in \Omega_{[0,\ell]}} |\Phi(\xi)| < +\infty .$$

On appelle pression la limite

$$P^{\Phi} = \lim_{b-a\to\infty} P^{\Phi}_{[a,b-1]} . \tag{2}$$

Bien entendu, l'existence des limites (1) et (2) demande une démonstration. Ces limites s'appellent limites thermodynamiques.

La mécanique statistique de l'équilibre consiste essentiellement en l'étude des états d'équilibre (ou de Gibbs) et de la pression. Nous indiquerons les résultats de cette étude dans un instant. Il faut d'abord que nous rappelions une notion de théorie ergodique.

1.3. Entropie.

Soit I l'ensemble des mesures de probabilité τ-invariantes sur Ω. Si $\rho \in I$, l'entropie de ρ (par rapport à τ) est définie par

$$s(\rho) = \lim_{b-a\to\infty} \frac{1}{b-a} S(\rho_{[a,b]})$$

où

$$\rho_{[a,b]} = \alpha_{[a,b],\mathbb{Z}}\, \rho$$

$$S(\rho_{[a,b]}) = - \sum_{\xi \in \Omega_{[a,b]}} \rho_{[a,b]}\{\xi\} \log \rho_{[a,b]}\{\xi\}$$

la fonction $s : I \to \mathbb{R}$ est affine et semi-continue supérieurement pour la topologie vague sur I. Rappelons que la topologie vague sur l'espace $\mathcal{C}^*$ des mesures sur Ω, est sa topologie faible comme dual de l'espace de Banach $\mathcal{C}$ des fonctions réelles continues. Pour la topologie vague, I est compact.

1.4. Pression, états d'équilibre.

Nous avons défini la pression P^{Φ} comme une fonction de l'interaction Φ. Il est avantageux de considérer la pression comme une fonction $P : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. On y arrive en posant

$$A_{\Phi}(\xi) = - \sum_{\ell \geq 0} \Phi(\xi|[-\ell,\ell]) - \sum_{\ell \geq 0} \Phi(\xi|[-\ell,\ell+1]) .$$

On vérifie que toute $A \in \mathcal{C}$ peut s'écrire sous la forme A_{Φ} avec $|\Phi| < +\infty$, et que P^{Φ} ne dépend que de A_{Φ}. On pose alors

$$P(A_{\Phi}) = P^{\Phi} .$$

La fonction $P : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est convexe et continue, plus précisément

$$|P(A) - P(B)| \leq \|A - B\|$$

où $\|.\|$ est la norme uniforme.

La pression P est reliée à l'entropie par le principe variationnel suivant :

$$P(A) = \max_{\rho \in I} [s(\rho) + \rho(A)] , \ A \in \mathcal{C} .$$

Puisque s est semi-continue supérieurement, le maximum est atteint. On appelle états d'équilibre les mesures $\rho \in I$ qui réalisent ce maximum.

Il se trouve que (pour les réseaux d'une dimension que nous considérons) si $\|\Phi\| < +\infty$, il existe un seul état d'équilibre pour A_{Φ} : c'est l'état σ défini par la limite thermodynamique (1).

Puisque $P : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est convexe et continue, il existe au moins un plan tangent à son graphe au-dessus de chaque $A \in \mathcal{C}$. Un tel plan tangent est défini par une forme linéaire sur $\mathcal{C}$, i.e. une mesure sur Ω. On montre que les mesures ainsi obtenues sont précisément les états d'équilibre.

1.5. Etats de Gibbs.

Supposons que $\|\Phi\| < +\infty$. On peut alors calculer, pour l'état σ défini par (1), la probabilité conditionnelle de trouver dans l'intervalle $[a,b]$ une configuration ξ, sachant qu'on a une configuration η hors de $[a,b]$. On trouve

$$N(\eta)^{-1} \exp\left[-\sum_{[k,\ell]\,:\,[k,\ell]\cap[a,b]\neq\emptyset} \Phi(\xi \vee \eta | [k,\ell])\right]$$

où $N(\eta)^{-1}$ est un facteur de normalisation ne dépendant pas de ξ. Nous avons écrit $\xi \vee \eta | [k,\ell]$ pour la restriction à $[k,\ell]$ de la configuration égale à ξ dans $[a,b]$, à η dans le complément de $[a,b]$.

On appelle état de Gibbs (pour Φ) toute mesure de probabilité sur Ω ayant les probabilités conditionnelles indiquées ci-dessus.

Il se trouve que (pour les réseaux à une dimension que nous considérons), la condition $\|\Phi\| < +\infty$ implique que σ est le seul état de Gibbs. La limite thermodynamique σ est donc caractérisée par le fait que c'est le seul état d'équilibre et le seul état de Gibbs du système.

1.6. Réseaux à plusieurs dimensions.

Il faut noter que pour les réseaux à plusieurs dimensions les états de Gibbs et les états d'équilibre ne sont en général pas confondus. On n'a pas unicité, et les états de Gibbs peuvent ne pas être invariants par translations. On a seulement un résultat assez général : les états d'équilibres sont identiques aux états de Gibbs invariants par translations. Pour le reste, l'étude détaillée des états d'équilibre et de Gibbs, quand Φ varie, relève de la théorie des changements de phases.

1.7. Interactions à décroissance exponentielle.

Revenons aux réseaux à une dimension. On dit que l'interaction Φ est exponentiellement décroissante s'il existe $\theta \in (0,1)$ tel que

$$\|\Phi\|_\theta = \sup_{[k,\ell]} \theta^{-(\ell-k)} \sup_{\xi\in\Omega_{[k,\ell]}} |\Phi(\xi)| < +\infty .$$

Pour θ fixé, ces interactions forment un espace de Banach $\mathcal{B}^\theta$. Soit $\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{C}}$ l'espace de Banach complexe correspondant, alors on peut montrer que $\Phi \to P^\Phi$ s'étend à une fonction analytique sur un voisinage de $\mathcal{B}^\theta$ dans $\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{C}}$. Ceci peut se démontrer en utilisant la méthode de la matrice de transfert. Nous esquissons la démonstration.

Pour une fonction complexe continue A sur $\Omega_{[1,+\infty]}$, écrivons

$$\mathrm{var}_n A = \sup\{|A(\xi)-A(\xi')| : \xi_x = \xi'_x \quad \text{pour} \quad 1\le x\le n\}$$

$$\|A\|_\theta = \sup_{n\ge 0} (\theta^{-n}\, \mathrm{var}_n A) .$$

Les fonctions pour lesquelles $\|A\|_\theta < +\infty$ forment un espace de Banach $\mathcal{F}^\theta_{\mathbb{C}>}$. Un opérateur $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{F}^\theta_{\mathbb{C}>}$ est défini par

$$(\mathcal{L}A)(\xi) = \sum_{\xi_0} A(\tau^{-1}(\xi_0,\xi)) \times \exp[-\sum_{\ell\ge 0} \Phi(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_\ell)]$$

($\mathcal{L}$ est la "matrice de transfert"). Si $\Phi\in\mathcal{B}^\theta$, on montre que $\exp P^\Phi$ est une valeur propre simple de $\mathcal{L}$, et que le reste du spectre de $\mathcal{L}$ est contenu dans un cercle de rayon $< \exp P^\Phi$ centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Puisque l'on peut aussi montrer que $\Phi\mapsto\mathcal{L}$ est une fonction analytique entière sur $\mathcal{B}^\theta_{\mathbb{C}}$, il résulte que $\Phi\to P^\Phi$ est analytique sur un voisinage de $\mathcal{B}^\theta$, comme on l'a annoncé.

1.8. Décroissance exponentielle des interactions.

Les fonctions A_Φ , où $\Phi\in\mathcal{B}^\theta$, forment de manière naturelle un espace de Banach $\mathcal{F}^\theta$ (sa norme est définie de manière analogue à la norme de $\mathcal{F}^\theta_{\mathbb{C}>}$). On a

$$P(A_\Phi) = P^\Phi$$

et l'on montre que la fonction P est analytique réelle sur $\mathcal{F}^\theta$.

Si σ est l'état de Gibbs correspondant à l'interaction Φ , et que $B_1, B_2 \in \mathfrak{F}^\theta$, on montre que

$$\sigma(B_1 \cdot (B_2 \circ \tau^n)) - \sigma(B_1)\, \sigma(B_2)$$

<u>tend vers zéro exponentiellement quand</u> $|x|$ <u>tend vers l'infini</u>.

1.9. <u>Références</u>.

Les références sur ce qui précède sont assez éparpillées. On pourra les retrouver à partir de Bowen [5], Ruelle [13], Sinai [19] .

2. FORMALISME THERMODYNAMIQUE SUR UN COMPACT METRISABLE.

Soit $\underline{\Omega}$ un compact métrisable et $\tau : \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}$ un homéomorphisme. Désignons par $\underline{C} = C(\underline{\Omega})$ l'espace de Banach des fonctions continues réelles sur $\underline{\Omega}$. On peut définir une fonction pression $P : \underline{C} \to \mathbb{R}$ et démontrer un principe variationnel qui généralise celui de la mécanique statistique sur un réseau.

2.1. Définitions de la pression.

Soient $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_i)$, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_j)$ des recouvrements de $\underline{\Omega}$. Le recouvrement $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{B}$ consiste en les ensembles $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{B}_j$. Cette notation s'étend à un nombre quelconque de recouvrements. Le recouvrement $\tau^{-k}\mathfrak{U}$ consiste en les ensembles $\tau^{-k}\mathfrak{U}_i$, et nous écrivons

$$\mathfrak{U}^{\Lambda} = \bigvee_{k \in \Lambda} \tau^{-x}\mathfrak{U}$$

pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Nous écrivons aussi

$$|\mathfrak{U}| = \text{nombre d'indices } i \text{ tels que } \mathfrak{U}_i \neq \emptyset$$

$$\operatorname{diam} \mathfrak{U} = \sup_i \operatorname{diam} \mathfrak{U}_i$$

où $\operatorname{diam} \mathfrak{U}_i$ est le diamètre de $\mathfrak{U}_i$ pour une métrique permise d sur $\underline{\Omega}$.

Etant donnés une partition ouverte finie $\mathfrak{U}$ de $\underline{\Omega}$, une fonction $A \in \underline{C}$ et un intervalle fini $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, nous définissons

$$Z_{\Lambda}(A,\mathfrak{U}) = \min\{\sum_j \exp[\sup_{\underline{\xi} \in \mathfrak{B}_j} \sum_{x \in \Lambda} A(\tau^x \underline{\xi})]$$

$$: (\mathfrak{B}_j) \text{ est un sous-recouvrement de } \mathfrak{U}^{\Lambda}\}$$

$$P(A,\mathfrak{U}) = \lim_{b-a \to \infty} \frac{1}{b-a} \log Z_{[a,b-1]}(A,\mathfrak{U})$$

$$= \inf_{b-a} \frac{1}{b-a} \log Z_{[a,b-1]}(A,\mathfrak{U})$$

$$P(A) = \lim_{\operatorname{diam} \mathfrak{U} \to 0} P(A,\mathfrak{U}) \ .$$

La fonction $P : \underline{C} \to \mathbb{R}$ est la pression topologique. Si $\underline{\Omega}$ est l'espace de configuration Ω d'un système de spins, alors P se réduit à la pression P définie au paragraphe 1.4.

2.2. Principe variationnel.

Soit $\underline{I}$ l'ensemble des mesures de probabilité τ-invariantes sur $\underline{\Omega}$. Si $\rho \in \underline{I}$, nous désignons par $h(\rho)$ l'invariant de Kolmogorov-Sinai (cf. Billingsley [2]) du système dynamique $(\underline{\Omega},\rho,\tau)$, autrement dit l'entropie de ρ. Si $\underline{\Omega}$ est l'espace de configuration Ω d'un système de spins, alors h se réduit à l'entropie s définie au paragraphe 1.3.

On a le principe variationnel (théorème de Walters [22])

$$P(A) = \sup_{\rho \in \underline{I}} [h(\rho) + \rho(A)]$$

pour tout $A \in \underline{C}$. Ce principe variationnel étend celui de la mécanique statistique des systèmes de spins sur un réseau.

On appelle état d'équilibre tout $\rho \in \underline{I}$ tel que $h(\rho) + \rho(A) = P(A)$. La fonction $h : \underline{I} \to \mathbb{R}$ n'est pas ici en général semi-continue supérieurement, et l'ensemble des états d'équilibre peut donc être vide.

2.3. Entropie topologique.

La quantité $P(0)$ avait été définie, avant la pression topologique, sous le nom d'entropie topologique, et l'on avait montré que

$$P(0) = \sup_{\rho \in \underline{I}} h(\rho)$$

C'est un cas particulier du théorème de Walters.

Nous allons indiquer une très intéressante conjecture de M. Shub qui fait intervenir l'entropie topologique.

Soit M une variété différentiable compacte et $H_* = \oplus_i H_i$ son groupe d'homologie (à coefficients complexes). Si $\tau = f$ est un difféomorphisme de M, des transformations linéaires $f_i : H_i \to H_i$, $f_* : H_* \to H_*$ sont définies, et Shub conjecture que le rayon spectral de f_* est inférieur ou égal à $\exp P(0)$. Cette conjecture a été vérifiée par Shub et Williams pour les difféomorphismes satisfaisant à l'Axiome A de Smale. Manning a aussi montré que le rayon spectral de f_1 est inférieur ou égal à $\exp P(0)$ pour un difféomorphisme quelconque.

2.4. Références.

La meilleure référence est encore Bowen [5]. Voir aussi Denker [8].

3. L'AXIOME A DE SMALE.

Soit M une variété différentiable compacte. L'étude qualitative des difféomorphismes ou des flots différentiables sur M est un domaine encore peu développé. Cependant, des problèmes particuliers sont depuis longtemps l'objet de l'intérêt mathématique : par exemple, le flot géodésique sur les variétés à courbure négative. L'Axiome A de Smale est vérifié dans de nombreux cas particuliers intéressants, et ses conséquences ont été étudiées de manière très détaillée.

Pour la simplicité, nous discuterons le cas des difféomorphismes plutôt que celui des flots.

3.1. Définitions.

On suppose M compacte de classe C^∞ ; f sera un difféomorphisme de classe C^r ($r \geq 1$ en général, et $r \geq 2$ pour certaines questions).

Soit Λ un sous-ensemble compact de M invariant pour f (i.e. $f\Lambda = \Lambda$). On dit que Λ est hyperbolique s'il existe une décomposition continue du fibré tangent à M restreint à Λ :

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

invariante par Tf, et des constantes $c > 0$, $\lambda \in (0,1)$ telles que

$$\|(Tf^n)v\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{pour} \quad v \in E^s \, , \; n \geq 0$$

$$\|(Tf^{-n})v\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{pour} \quad v \in E^u \, , \; n \geq 0$$

pour une métrique riemannienne sur M. On peut alors changer la métrique de sorte que l'on puisse prendre $c = 1$ dans les formules ci-dessus ; on dit dans ce cas que la métrique est adaptée.

Si M est hyperbolique, on dit que f est un difféomorphisme d'Anosov.

Un point $x \in M$ est <u>errant</u> s'il possède un voisinage U tel que $U \cap f^n U = \emptyset$ pour tout $n > 0$. Soit Ω l'ensemble des points non errants. L'<u>Axiome</u> A est constitué des deux conditions suivantes sur f :

(Aa) <u>l'ensemble Ω est hyperbolique</u>

(Ab) <u>les points f-périodiques sont denses dans Ω</u>.

On montre qu'un difféomorphisme d'Anosov satisfait nécessairement à l'Axiome A et l'on conjecture que $\Omega = M$ dans ce cas. La référence de base sur l'Axiome A est l'article de Smale [20] ; on y trouvera de nombreux exemples.

3.2. <u>Ensembles basiques</u>.

Nous supposons désormais l'Axiome A vérifié. Smale a alors démontré un "théorème de décomposition spectrale" pour l'ensemble non errant Ω. Il s'agit du fait que Ω peut s'écrire comme réunion finie d'ensembles compacts disjoints Ω_i invariants (par f) et tels que f restreint à Ω_i soit topologiquement transitif. Cela veut dire qu'il existe $x \in \Omega_i$ tel que l'ensemble $\{f^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ soit dense dans Ω_i. La "décomposition spectrale" est unique. Les ensembles Ω_i sont appelés <u>ensembles basiques</u>. Il se peut que l'ensemble basique Ω_i se décompose à nouveau si l'on considère le difféomorphisme f^n plutôt que f. En fait, on peut voir que pour chaque i il existe n_i tel que $\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \Omega_{ij}$ où les Ω_{ij} sont compacts disjoints, invariants pour f^{n_i}, permutés circulairement par f, et tels que f^{n_i} restreint à Ω_{ij} soit topologiquement mélangeant. Cela veut dire que pour tout ouvert non vide U (contenu dans Ω_{ij}) il existe N tel que $U \cap (f^{n_i})^n U \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$.

3.3. <u>Variétés stables et instables</u>.

Choisissons une métrique riemannienne d sur M. Nous pouvons la supposer "adaptée". Soit ε un nombre > 0 assez petit, et $x \in \Omega$. Nous définissons les variétés stable $W^s_x(\varepsilon)$ et instable $W^u_x(\varepsilon)$ locales par

$$W^s_x(\varepsilon) = \{y \in M : d(f^n x, f^n y) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

$$W^u_x(\varepsilon) = \{y \in M : d(f^{-n} x, f^{-n} y) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq 0\} .$$

Ce sont des sous-variétés différentiables de classe C^r de M, tangentes en x respectivement aux fibres E^s_x et E^u_x de E^s et E^u, et de dimensions correspondantes. On a des variétés stables et instables globales :

$$\begin{aligned} W^s_x &= \{y \in M : d(f^n x, f^n y) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}\, W^s_x(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^u_x &= \{y \in M : d(f^{-n} x, f^{-n} y) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{n}\, W^u_x(\varepsilon) . \end{aligned}$$

Pour un ensemble basique Λ on définit aussi

$$W^s_\Lambda(\varepsilon) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s_x(\varepsilon)$$

et de même pour $W^u_\Lambda(\varepsilon)$, W^s_Λ, W^u_Λ.

On montre que $W^s_x(\varepsilon)$ dépend continûment de x pour x parcourant un ensemble basique Λ ; il en est de même pour le fibré tangent à $W^s_x(\varepsilon)$. Cependant, $W^s_x(\varepsilon)$ ne dépend pas en général de manière différentiable de x.

3.4. Structure produit locale.

Soit Λ un ensemble basique, on montre que $W^s_\Lambda \cap W^u_\Lambda = \Lambda$. Cela veut dire que les variétés stables et instables des points de Λ ne se recoupent qu'en Λ. En fait, on peut choisir successivement ε et δ, $0 < \delta < \varepsilon$, suffisamment petits pour que si

$$y \in W^u_x(\delta) \cap \Lambda \ , \ z \in W^s_x(\delta) \cap \Lambda$$

alors

$$W^s_y(\varepsilon) \cap W^u_z(\varepsilon)$$

consiste en un seul point, noté $[y,z]$. En outre, l'ensemble des points $[y,z]$ obtenus de cette manière est un voisinage ouvert O de x dans Λ , l'application

$$[\cdot,\cdot] : (W^u_s(\delta) \cap \Lambda) \times (W^s_x(\delta) \cap \Lambda) \to O$$

est un homéomorphisme. On exprime ce fait en disant que Λ a une *structure produit locale*.

3.5. *Partitions de Markov*.

Un outil puissant pour l'étude des ensembles basiques est constitué par les *partitions de Markov* construites par Sinai [17], [18] et Bowen [3], [4]. Leur existence est une conséquence de la structure produit locale ; elles permettent de paramétrer les ensembles basiques de manière efficace.

Nous avons besoin de quelques définitions préliminaires.

Un *rectangle* est un ensemble (non vide) de la forme $A = [C,D]$ où $C \subset W^u_x(\delta) \cap \Lambda$, $D \subset W^s_x(\delta) \cap \Lambda$, et où C et D sont la fermeture de leur intérieur respectivement dans $W^u_x(\varepsilon) \cap \Lambda$ et $W^s_x(\varepsilon) \cap \Lambda$. Nous écrivons $\partial A = A \setminus \mathrm{int}\, A$.

Un recouvrement fini de Λ par des rectangles $A_i = [C_i, D_i]$ est une *partition de Markov* si les conditions suivantes sont satisfaites

i) $A_i \cap A_j \subset \partial A_i \cap \partial A_j$ pour $i \neq j$

ii) $f[C_i, x] \supset [C_j, f(x)]$

$f[x, D_i] \subset [f(x), D_j]$

quand $x \in \mathrm{int}\, A_i \cap f^{-1}\, \mathrm{int}\, A_j$.

On a le théorème suivant : *Si* Λ *est un ensemble basique pour un difféomorphisme satisfaisant à l'Axiome* A , *alors* Λ *possède une partition de Markov*.

3.6. Dynamique symbolique.

Soit Ω_o une partition de Markov, et soient $A_i, A_j \in \Omega_o$. Nous écrivons

$$t_{A_i A_j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(\text{int } A_i) \cap \text{int } A_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec l'ensemble Ω_o et la matrice $(t_{A_i A_j})$, nous construisons comme au paragraphe 1.1 un espace de configuration Ω et un homéomorphisme $\tau : \Omega \to \Omega$, appelé shift.

On montre que si $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Omega$, alors $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i} \xi_i$ consiste en un seul point que nous noterons $\pi\xi$.

THEOREME. L'application $\pi : \Omega \to \Lambda$ est continue, surjective, et

$$f \circ \pi = \pi \circ \tau .$$

Il existe un sous-ensemble résiduel de Λ (intersection dénombrable d'ouverts denses) sur lequel π^{-1} existe.

L'existence d'une partition de Markov permet d'associer au système dynamique (Λ, f) un système dynamique symbolique (Ω, τ). L'appellation "symbolique" vient de ce que les points de Ω sont des suites (ξ_i) de symboles. Si le système (Λ, f) est mélangeant, le système (Ω, τ) est aussi mélangeant.

L'étude du système symbolique (Ω, τ) est plus facile que celle de (Λ, f) parce que τ est simplement une translation (shift). On essaie donc de traduire dans le langage "symbolique" les problèmes qui se posent originellement pour (Λ, f).

On a, par exemple, le résultat suivant :

Si $\underline{\sigma}$ est une mesure de probabilité f-invariante ergodique sur Λ qui donne une mesure $\neq 0$ aux ouverts $\neq \emptyset$, alors, il existe une mesure de probabilité τ-invariante unique σ sur Ω telle que $\pi\sigma = \underline{\sigma}$.

Nous utiliserons plus tard le fait que la dynamique symbolique permet aussi de compter les points f-périodiques de Λ.

3.7. Mécanique statistique sur un ensemble basique.

Nous supposons que f restreint à Λ est mélangeant, et soit A une fonction continue sur Λ. Les états d'équilibre sont par définition les mesures $\rho \in \underline{I}$ telles que

$$h(\rho) + \rho(A) = P(A) .$$

Si A est Hölder continue (en particulier si A est différentiable), on montre qu'il existe une interaction Φ à décroissance exponentielle telle que $A \circ \pi = A_{\Phi}$. Alors, on a $\rho = \pi\sigma$ où σ est l'unique état d'équilibre, et par conséquent l'unique état de Gibbs pour Φ. On trouve aussi que si B , C sont Hölder continues, alors

$$\rho(B.(C \circ f^n)) - \rho(B).\rho(C)$$

tend vers 0 exponentiellement vite quand n tend vers l'infini.

Ce qui précède montre comment la mécanique statistique sur Λ se réduit à la mécanique statistique sur un réseau à une dimension, avec une interaction à décroissance exponentielle.

3.8. Références.

Bowen [5], Sinai [19], Smale [20].

4. PROPRIETES ERGODIQUES DES DIFFEOMORPHISMES.

Dans de nombreux problèmes de physique, on s'intéresse au comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles. Il n'existe malheureusement pas de théorie générale, ni pour ce problème, ni pour le problème plus simple des difféomorphismes que nous allons maintenant discuter.

Soit f un difféomorphisme de la variété compacte M. On aimerait pour toute fonction continue A sur M, et presque tout x, savoir qu'il existe une "moyenne ergodique"

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n-1} A(f^n x) .$$

"Presque tout x" doit ici s'entendre au sens de la mesure de Lebesgue sur les cartes locales de M. On n'a malheureusement pas démontré de résultat général de cette sorte. Cependant, la situation est claire dans le cas des difféomorphismes satisfaisant à l'Axiome A. Dans ce cas, pour presque tout x, $f^n x$ tend vers un "attracteur", c'est-à-dire un ensemble basique Λ ayant un voisinage U tel que $\bigcap_{n\geq 0} f^n U = \Lambda$. En outre, pour toute fonction continue sur M,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n-1} A(f^n x) = \int \rho(dx)\, A(x) .$$

La mesure ρ sur l'attracteur Λ est indépendante de x, et est une mesure d'équilibre du type discuté au paragraphe 3.7 si l'on suppose que f est mélangeant sur Λ. Plus précisément, ρ est la mesure unique qui rend maximum l'expression

$$h(\rho) + \rho(A)$$

où $A = -\log J$ et J est le jacobien de la restriction de Tf au fibré instable (la fonction A dépend du choix de la métrique, mais non ρ, on montre que A est Hölder continue). Il résulte en particulier de 3.7 que la propriété de décroissance exponentielle des corrélations est vérifiée par ρ.

Nous n'essaierons pas d'expliquer la démonstration des résultats indiqués ci-dessus. Elle fait intervenir à la fois la géométrie différentielle sur la variété M, et la mécanique statistique sur l'attracteur Λ.

4.1. Références.

Sinai [19], Ruelle [13], Bowen and Ruelle [6], Bowen [5], Kifer [11].

5. FONCTIONS ZÊTA .

Le nombre de points périodiques d'une application est de manière évidente un invariant topologique de cette application. Si f est un difféomorphisme de la variété compacte M , il est naturel de compter les entiers card Fix f^n , où Fix f^n est l'ensemble des points fixes de f^n . Artin et Mazur [1] ont montré que pour un ensemble dense de difféomorphismes la série suivante a un rayon de convergence non nul :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{card Fix } f^n .$$

Il est alors naturel de définir une fonction

$$\zeta(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{card Fix } f^n .$$

Il a été conjecturé par Smale [20], puis démontré par Guckenheimer, et Manning, que ζ est rationnelle pour un difféomorphisme vérifiant l'Axiome A .

5.1. Fonctions zêta des ensembles basiques.

Manning [12] a en fait démontré que f restreint à n'importe quel ensemble basique a une fonction zêta rationnelle. Sa démonstration utilise une partition de Markov. Pour voir comment les choses se passent, nous supposerons que l'application $\pi : \Omega \to \Lambda$ qui définit la dynamique symbolique est bijective (c'est le cas pour certains ensembles basiques). Nous avons alors

$$\text{card Fix } f^n = \text{card Fix } \tau^n .$$

On est donc ramené au calcul de la fonction zêta pour le shift τ . Cette fonction a été calculée par Bowen et Lanford. On a d'abord

$$\text{card Fix } \tau^n = \text{tr}(t^n)$$

où t est la matrice à éléments 0,1 qui définit Ω . Donc

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{card Fix } f^n$$

$$= \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{tr}(t^n)$$

$$= \exp \operatorname{tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n t^n}{n}$$

$$= \exp \operatorname{tr}(-\log(1-zt))$$

$$= \frac{1}{\exp \operatorname{tr} \log(1-zt)} = \frac{1}{\det(1-zt)}$$

ce qui est bien rationnel en z .

Pour tenir compte du fait qu'en général π n'est pas bijective, Manning introduit plusieurs shifts τ_α et montre que

$$\text{card Fix } f^n = \sum_\alpha (-1)^{\ell_\alpha} \text{card Fix } \tau_\alpha^n$$

avec ℓ_α entier pair ou impair. Il résulte de là immédiatement que ζ est rationnelle. Parmi les valeurs de l'indice α , il en est une, soit $\alpha = 0$, telle que $\ell_o = 0$ et $\tau_o = \tau$.

On montre que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{card Fix } f^n$$

est $\exp[-P(0)]$, où $P(0)$ désigne l'entropie topologique de f restreint à Λ . En fait, ζ a en $\exp[-P(0)]$ un pôle simple, tous les autres pôles ou zéros étant situés à distance strictement plus grande de l'origine. Le pôle en $\exp[-P(0)]$ est d'ailleurs dû au facteur $\zeta_{\tau_o}(z) = [\det(1-zt)]^{-1}$ correspondant au shift τ dans l'expression

$$\zeta_f(z) = \prod_\alpha [\zeta_{\tau_\alpha}(z)]^{(-1)^{\ell_\alpha}} .$$

5.2. Fonction zêta généralisée.

On vient de voir que la fonction zêta d'Artin-Mazur a un pôle en $P(0)$. Peut-on trouver une généralisation où $P(0)$ soit remplacé par $P(A)$? Pour voir comment cela est possible, reportons-nous à la définition de la pression topologique ; elle fait intervenir une somme du type

$$\sum_j \exp \sum_{x \in \Lambda} A(\tau^n \underline{\xi}_i)$$

c'est-à-dire une fonction de partition. Pour $A = 0$, cette fonction de partition devient un entier (le cardinal d'un sous-recouvrement de $\mathfrak{A}^\Lambda$). Le passage de $P(0)$ à $P(A)$, c'est-à-dire le passage à la mécanique statistique consiste à remplacer un comptage simple par un comptage avec des poids

$$\exp \sum_{x \in \Lambda} A(\tau^n \underline{\xi})$$

ou $\exp(-U)$. Ces poids sont appelés en mécanique statistique "facteurs de Boltzmann".

Vu ce qui précède, il est naturel de remplacer dans la définition de ζ l'entier card Fix f^n par

$$\sum_{\xi \in \mathrm{Fix}\, f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k \xi) .$$

Notons que dans le cas d'un shift, cette expression n'est autre que la fonction de partition avec conditions au bord périodiques :

$$\sum_{\underline{\xi} \in \mathrm{Fix}\, \tau^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(\tau^k \underline{\xi}) .$$

Nous sommes donc amenés à écrire

$$\zeta(e^A.z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}\, f^n} \exp \sum_{k=0}^{n-1} A(f^k x) .$$

ζ est donc une fonctionnelle de $e^A.z$, définie pour $|z|$ assez petit (A fixé). Plus généralement, on peut écrire (au moins formellement)

$$\zeta(\varphi) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}\, f^n} \prod_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k x)$$

où φ est une fonction complexe sur Λ .

Si A est une fonction réelle Hölder continue sur l'ensemble basique Λ, on montre que $z \to \zeta(e^A . z)$ s'étend à une fonction méromorphe dans le disque $|z| < R(A)$, où $R(A) > \exp[-P(A)]$. Cette fonction est sans zéro dans le disque, et a un seul pôle, qui est simple et situé en $\exp[-P(A)]$ (voir [14]).

Pour démontrer ces propriétés, on procède un peu comme dans le cas $A = 0$, où l'étape essentielle consistait dans l'usage de la formule

$$\mathrm{card}\ \mathrm{Fix}\ \tau^n = \mathrm{tr}(t^n) .$$

Pour $A \not\equiv 0$, on remplace encore la somme sur $\mathrm{Fix}\ \tau^n$ par une trace, qui est maintenant la trace d'une puissance de la matrice de transfert $\mathfrak{L}$ introduite au paragraphe 1.7 . Les propriétés analytiques de ζ résultent des propriétés spectrales de $\mathfrak{L}$. Dans ses détails, la démonstration présente certaines difficultés, dans lesquelles nous ne voulons pas entrer.

5.3. Propriétés de méromorphie.

Nous venons de voir que la fonction $z \to \zeta(e^A . z)$ était méromorphe dans un disque. Peut-on dire plus ? Elle ne peut certainement pas être rationnelle en général, et je doute qu'elle puisse être méromorphe dans tout le plan complexe. (Note : G. Gallavotti vient de trouver un exemple où ζ n'est pas méromorphe.)

On peut cependant assurer la méromorphie de $z \to \zeta(e^A z)$ en imposant des conditions appropriées à f et A , en l'occurence des conditions d'analyticité réelle. L'idée est d'obtenir que la matrice de transfert $\mathfrak{L}$ soit un opérateur à trace sur un espace de fonctions analytiques, de sorte que l'on puisse utiliser la théorie de Fredholm (Grothendieck [9], [10]), et exprimer ζ en termes de déterminants de Fredholm. Nous allons formuler le résultat dans un cas où tout se passe bien ; il s'agit en fait d'un cas où f est une application non-invertible (mais on peut se ramener au cas d'un homéomorphisme).

THEOREME [15]. Soit M une variété compacte connexe analytique réelle, $f : M \to M$ une application analytique réelle dilatante (c'est-à-dire $\|Tf\, u\| > \theta\, \|u\|$ avec $\theta > 1$ pour une certaine métrique riemannienne sur M). Soit en plus φ une fonction analytique réelle à valeurs complexes sur M . Alors

$$z \to \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}\, f^n} \prod_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k x)$$

s'étend à une fonction méromorphe dans tout le plan complexe.

P. Cartier a donné une expression explicite de cette fonction méromorphe [7].

5.4. Le cas des flots.

En général, les résultats obtenus pour les difféomorphismes peuvent s'étendre aux flots, moyennant des difficultés techniques plus ou moins grandes. Nous n'entrerons pas dans les détails du sujet, faute d'avoir donné les définitions nécessaires. Nous mentionnerons cependant un résultat sur les flots géodésiques sur une variété compacte M à courbure constante négative. Un tel flot est un flot d'Anosov possédant toutes les propriétés d'analyticité réelle désirables. Les orbites périodiques du flot géodésique correspondant aux géodésiques fermés γ sur M , et les périodes des orbites périodiques aux longueurs $\ell(\gamma)$ des géodésiques fermées. On a alors le résultat suivant. La fonction

$$s \mapsto \prod_{\gamma \text{ périodique}} (1 - e^{-s\ell(\gamma)})$$

s'étend à une fonction méromorphe dans tout le plan complexe [15]. Ceci généralise un résultat connu pour les surfaces à courbure constante négative (Selberg [21]).

R E F E R E N C E S

[1] E. ARTIN, B. MAZUR — On periodic points. Ann. of Math. (2) 81, p. 82-99 (1965).

[2] P. BILLINGSLEY — Ergodic theory and information. John Wiley, New York, 1965.

[3] R. BOWEN — Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. Amer. J. Math. 92, p. 725-747 (1970).

[4] R. BOWEN — Markov partitions and minimal sets for Axiom A difféomorphisms. Ann. J. Math. 92, p. 907-918 (1970).

[5] R. BOWEN — Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Math., n° 470, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[6] R. BOWEN, D. RUELLE — Ergodic theory for Axiom A flows. Inventiones Math. A paraître.

[7] P. CARTIER — A paraître.

[8] M. DENKER — Remarques sur la pression pour les transformations continues. C.R.Acad.Sc. Paris 279, A, p. 967-970 (1974).

[9] A. GROTHENDIECK — Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of the Amer. Math. Soc., 16, Providence, R.I., 1955.

[10] A. GROTHENDIECK — La théorie de Fredholm. Bull. Soc. Math. France 84, p. 319-384 (1956).

[11] Iu.I. KIFER — On small stochastic perturbations of some smooth dynamical systems.
Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 38, n° 5, p. 1091-1115 (1974).

[12] A. MANNING — Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions.
Bull. London Math. Soc. 3, p. 215-220 (1971).

[13] D. RUELLE — A measure associated with Axiom A attractors.
Amer. J. Math.
A paraître.

[14] D. RUELLE — Generalized zeta-functions for Axiom A basic sets.
A paraître.

[15] D. RUELLE — Zeta-functions for expanding maps and Anosov flows.
A paraître.

[16] D. RUELLE, F. TAKENS — On the nature of turbulence.
Commun. Math. Phys. 20, p. 167-192 (1971) ; 23, p. 343-344 (1971).

[17] Ia.G. SINAI — Markov partitions and C-diffeomorphisms.
Funkts. Analiz. Pril. 2, n° 1, p. 64-89 (1968).
Traduction anglaise, Funct. Anal. Appl. 2, p. 61-82 (1968).

[18] Ia.G. SINAI — Construction of Markov partitions.
Funkts. Analiz. Pril. 2, n° 3, p. 70-80 (1968).
Traduction anglaise, Funct. Anal. Appl. 2, p. 245-253 (1968).

[19] Ia.G. SINAI — Gibbsian measures in ergodic theory.
Uspekhi Mat. Nauk. 27, n° 4, p. 21-64 (1972).
Traduction anglaise, Russian Math. Surveys 166, p. 21-69 (1972).

[20] S. SMALE — Differentiable dynamical systems.
Bull. Amer. Math. Soc. 73, p. 747-817 (1967).

[21] A. SELBERG — Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemann spaces with applications to Dirichlet series.
J. Indian Math. Soc. 20, p. 47-87 (1956).

[22] P. WALTERS — A variational principle for the pressure of continuous transformations.
Amer. J. Math. A paraître.