

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

P. MOUSSA

## **Un opérateur de Schrödinger presque périodique à spectre singulier associé aux itérations d'un polynôme**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1984, tome 34  
« Conférences de : P. Collet, P.A. Meyer, P. Moussa, V. Rivasseau, Y. Sibuya et B. Malgrange », , exp. n° 2, p. 43-66

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1984\\_\\_34\\_\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1984__34__43_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**Commissariat à l'Énergie Atomique**

- 43 -

**Centre d'Études Nucléaires  
de SACLAY**

INSTITUT DE RECHERCHE FONDAMENTALE  
Département de Physique Générale

**SERVICE DE PHYSIQUE THÉORIQUE**

UN OPERATEUR DE SCHRÖDINGER PRESQUE PERIODIQUE A SPECTRE  
SINGULIER ASSOCIE AUX ITERATIONS D'UN POLYNOME

par

P. Moussa

Conférence donnée en Juin 1984 à l'Université de  
Strasbourg dans le cadre de la RCP 25 du CNRS

Saclay PhT 84-103  
Aout 1984

UN OPERATEUR DE SCHRODINGER PRESQUE PERIODIQUE A SPECTRE  
SINGULIER ASSOCIE AUX ITERATIONS D'UN POLYNOME

par

Pierre Moussa

*Service de Physique Théorique  
CEN-Saclay, 91191 Gif sur Yvette, Cedex, France*

RESUME

La théorie des systèmes dynamiques permet d'aborder l'étude des propriétés de localisation des solutions de l'équation de Schrödinger avec un potentiel presque périodique. Ici nous procédons en sens inverse : on discute d'abord des propriétés algébriques des itérations de polynômes ainsi que de leurs propriétés d'orthogonalité. On montre ensuite le lien avec la théorie des équations de Schrödinger presque périodiques en utilisant la relation de récurrence à trois termes et la matrice tridiagonale de Jacobi associée. Le résultat est une équation discrète exactement soluble qui réunit les propriétés suivantes : presque périodicité, spectre singulier sur un ensemble de Cantor, mesure spectrale singulière continue, comportement chaotique des états, groupe de renormalisation exact s'exprimant par une transformation polynomiale. Enfin on abordera brièvement les implications d'un tel modèle dans des situations plus proches de la réalité physique : structures fractales et incommensurables en physique des solides.

## I. INTRODUCTION

L'étude des propriétés spectrales des opérateurs de Schrödinger avec potentiel presque périodique s'avère utile dans de nombreux problèmes actuellement étudiés en physique des solides : localisation des électrons, transition métal-isolant, structures fractales dans les amas de percolation, électrons dans un cristal soumis à un champ magnétique, systèmes incommensurables. Les solutions correspondantes des équations de Schrödinger se caractérisent par leurs propriétés de localisation : elles peuvent être étendues (non normalisables) lorsque l'énergie appartient à une bande permise du spectre, elles peuvent être localisées (normalisables) lorsque l'énergie appartient à la partie discrète du spectre. Dans certains cas limites le spectre possède une composante singulière continue, et on sait peu de chose sur le comportement des états associés. L'objet de cet exposé est de donner quelques indications, sur le comportement des états dans un modèle soluble présentant un spectre purement singulier continu.

L'utilisation des méthodes de la théorie des systèmes dynamiques est naturelle dans les problèmes d'opérateurs presque périodiques [21,22]. Notre point de départ sera le système dynamique le plus "simple" : l'itération d'un polynôme. On associera à ce système dynamique un opérateur à une dimension. En fait, on suit ainsi une méthode du type groupe de renormalisation, telle qu'elle a été popularisée dans la théorie des phénomènes critiques [27].

Dans la section II, on rappelle quelques propriétés des mesures invariantes dans les transformations polynomiales.

Dans la section III, on décrit les propriétés d'orthogonalité des polynômes itérés. Suivant une méthode classique en théorie des polynômes orthogonaux, on construit dans la section IV un opérateur à une dimension dont la mesure décrite dans la section II n'est autre que la mesure spectrale de la densité d'états. Dans la section V, on étudie les propriétés spectrales de l'opérateur. Dans la section VI, on montre que l'opérateur considéré est presque périodique et enfin dans la section VII sera esquissée la relation avec les problèmes physiques.

Ces notes reproduisent le contenu d'une conférence donnée en Juin 1984 à l'Université de Strasbourg au cours d'une rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens tenue dans le cadre de la RCP 25 du CNRS. Je remercie J.P. Ramis de m'avoir offert d'y participer. Cet exposé résume une suite de travaux effectués en collaboration tour à tour avec D. Basis, M.L. Mehta, J. Bellissard et G. Baker. Certains résultats ont aussi été obtenus par M.F. Barnsley, J.S. Geronimo et A.N. Harrington.

II. MESURES INVARIANTES DANS UNE TRANSFORMATION POLYNOMIALE

Considérons un polynôme  $T(x)$  de degré  $d \geq 2$ . On notera  $T^{(n)}(x)$  les itérés du polynôme  $T(x)$ , définis par :

$$\begin{cases} T^{(0)}(x) = x \\ T^{(1)}(x) = T(x) \\ T^{(n)}(x) = T(T^{(n-1)}(x)). \end{cases} \quad (1)$$

Afin d'étudier les propriétés d'orthogonalité [1,2,3,4,5] de la suite des polynômes  $T^{(n)}(x)$ , nous devons tout d'abord préciser la mesure d'intégration qui définit le produit scalaire. Par définition, l'ensemble de Julia du polynôme  $T(x)$  est la frontière (dans le plan complexe) du bassin d'attraction du point à l'infini [6,7,8]. Pour simplifier nous supposons que le coefficient du terme de plus haut degré de  $T$  est égal à un et nous ferons l'hypothèse suivante : il existe un ensemble réel  $S$  (intervalle fermé ou réunion d'intervalles fermés) tel que pour tout  $x \in S$ , les racines  $y$  de l'équation  $T(y) = x$  sont toutes réelles et contenues dans  $S$ . Dans ces conditions l'ensemble de Julia est réel et lui même contenu dans  $S$ . La construction de l'ensemble de Julia (Fig.1) peut se faire de manière analogue à celle de l'ensemble de Cantor de dissection linéaire (Fig.2). Pour la figure 1, nous avons choisi  $T(x) = x^2 - \lambda$ ,  $\lambda$  réel  $> 2$ ,  $S = [-a, a]$ , où  $a$  est le point fixe de la transformation  $T$ ,  $a = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ . Lorsque  $x$  appartient à l'ouvert  $(a, \infty)$  la suite des itérés  $T^{(n)}(x)$  tend vers l'infini. Il en est de même si  $x$  appartient à l'une des préimages de l'intervalle  $(a, \infty)$ , c'est-à-dire s'il existe  $k$  tel que  $T^{(k)}(x) \in (a, \infty)$ . L'ensemble de Julia se construit en retirant de l'axe réel les intervalles obtenus en prenant les valeurs de  $k$  croissantes (sur la figure sont barrés les intervalles jusqu'à  $k=4$ ). La même construction est appliquée dans la figure 2 à la transformation  $T(x) = -2+3|x|$ , avec  $S = [-1, 1]$ . On élimine les préimages de l'intervalle ouvert  $(1, \infty)$ , dont tous les points s'itèrent vers l'infini. (sur la figure on a barré les intervalles contenant les points  $x$  tels que  $T^{(k)}(x) \in (1, \infty)$ ,  $k \leq 4$ ). On observe que la construction consiste à éliminer à chaque étape le tiers central des intervalles, c'est-à-dire on obtient la construction classique de l'ensemble de Cantor de dissection. Dans les deux cas de

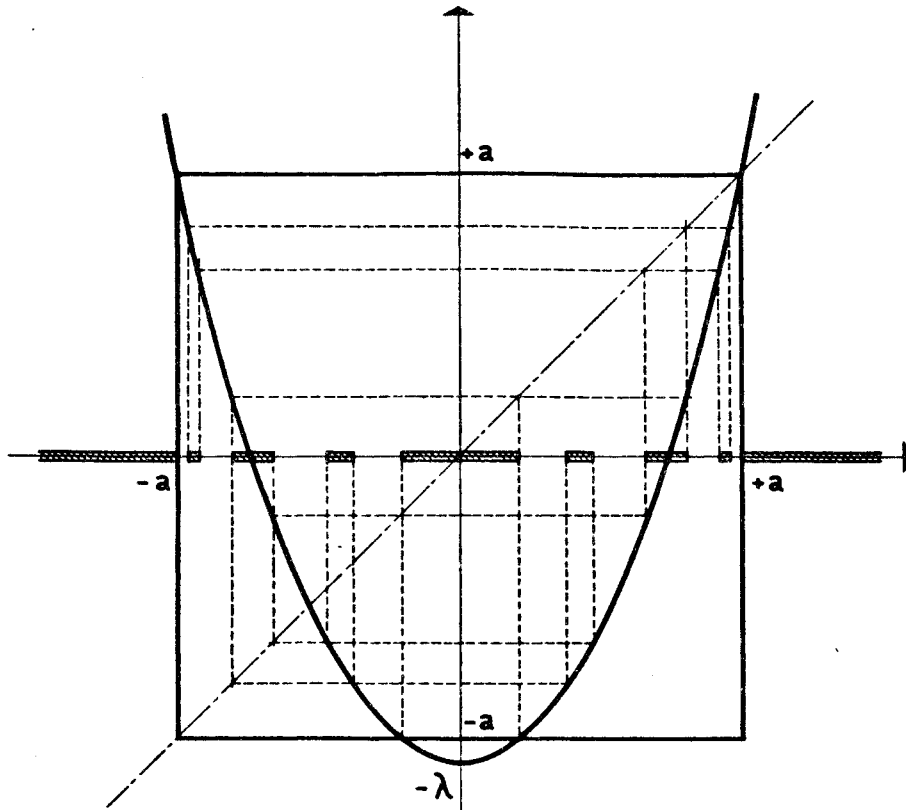


Fig. 1 - Construction de l'ensemble de Julia pour  $T(x) = x^2 - \lambda$ ,  $\lambda > 2$

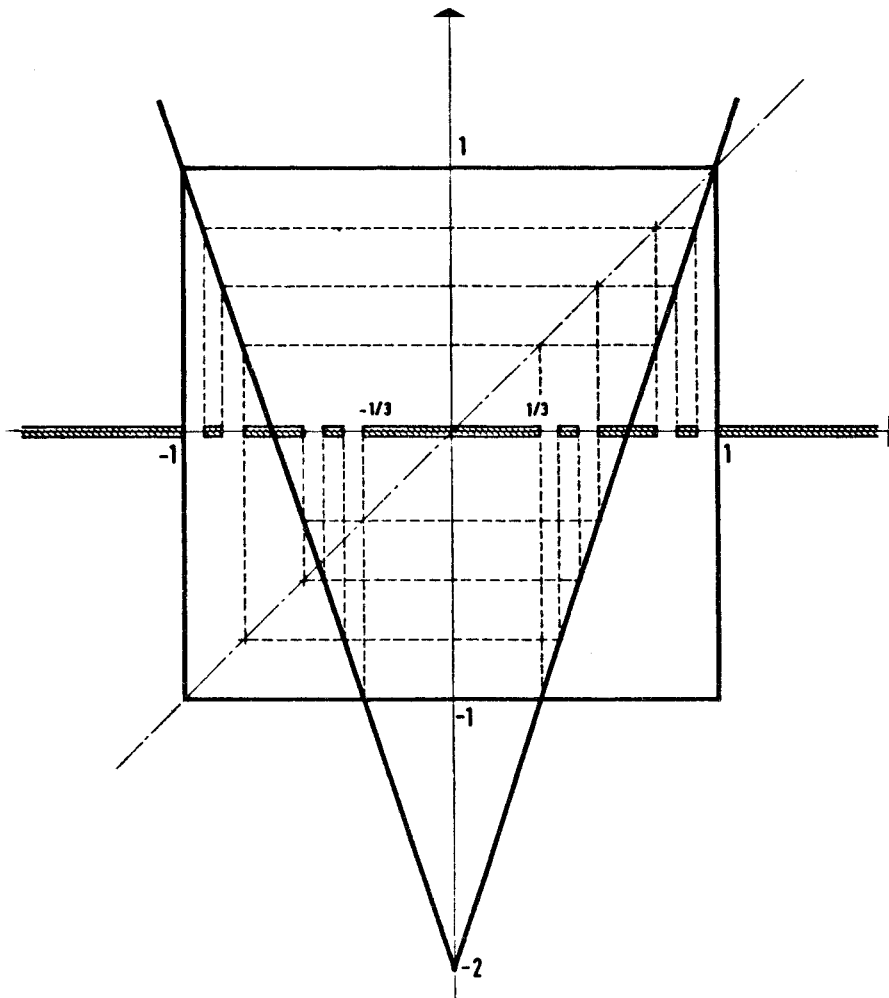


Fig. 2 - Construction de l'ensemble de Cantor correspondant à  $T(x) = -2 + 3|x|$

figure, l'ensemble restant (Julia ou Cantor) est obtenu comme l'ensemble des points dont les itérés ne tendent pas vers l'infini. L'ensemble de Julia est une sorte d'ensemble de dissection, mais avec un rapport variable avec l'intervalle. On peut cependant montrer [8,3] en utilisant une métrique non invariante par translation, que la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Julia (Fig.1) est nulle, comme elle l'est bien sûr pour l'ensemble de Cantor (Fig.2).

Sur l'ensemble de Julia associé à la transformation polynomiale  $T(x)$ , on définit une mesure privilégiée, destinée à représenter la distribution asymptotique des prédécesseurs. Partant d'un point  $x_0 \in S$  arbitraire, mais fixé, on définit les prédécesseurs d'ordre  $n$  de  $x_0$  comme les  $d^n$  solutions  $x_{(n)}^i$  de l'équation  $T^{(n)}(x) = x_0$ . On les notera souvent :

$$x_{(n)}^i = T_i^{(-n)}(x_0) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, d^n \quad (2)$$

On définit alors la suite de mesures discrètes normalisées :

$$d\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{d^n} \left\{ \sum_{i=1}^{d^n} \delta(x - x_{(n)}^i) \right\} dx, \quad (3)$$

qui assigne un poids égal à tous les prédécesseurs d'ordre  $n$  de  $x_0$ . Brolin [8] montre que la suite des mesures  $d\mu^{(n)}(x)$  converge faiblement vers une mesure limite  $d\mu(x)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Sous la seule réserve que  $x_0 \neq b$ , lorsqu'on étudie le cas particulier  $T(x) = (x-b)^d$ , la mesure limite est indépendante du point  $x_0$ . De plus cette mesure est invariante et assigne des poids égaux aux diverses images inverses d'un ensemble mesurable quelconque. (cette propriété est parfois désignée sous le nom de mesure balancée [4]). Le support de la mesure est l'ensemble de Julia dont la mesure de Lebesgue est nulle : la mesure est donc singulière. On peut montrer que la mesure n'a pas d'atome : elle est donc singulière continue. Enfin c'est une mesure positive.

La construction de cette mesure s'étend que cas où l'ensemble de Julia  $J$  est complexe. En degré 2, c'est-à-dire pour la famille des polynômes  $x^2 - \lambda$ ,  $\lambda$  complexe, elle est absolument continue dans les deux cas suivants :

i)  $\lambda = 2$ ,  $T(x) = x^2 - \lambda$ ,  $J = [-2, +2]$ ,  $d\mu(x) = \frac{dx}{\pi\sqrt{4-x^2}}$

ii)  $\lambda = 0$ ,  $T(x) = 0$ ,  $J$  est le cercle unité paramétrisé par l'angle  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , et la mesure est  $\frac{d\theta}{2\pi}$ .



Nous aurons besoin de la propriété d'invariance qui s'exprime de la façon suivante : pour toute fonction mesurable  $\phi$  de deux variables, on a [5] :

$$\int_J \phi(T(x), x) d\mu(x) = \frac{1}{d} \int_J \left( \sum_{i=1}^d \phi(x, T_i^{(-1)}(x)) \right) d\mu(x), \quad (4)$$

où la somme du deuxième membre porte sur les branches inverses associés à  $T(x)$ . La vérification élémentaire de cette formule dans les cas particuliers mentionnés ci-dessus est instructive. Lorsque l'ensemble de Julia  $J$  est réel on peut indifféremment faire porter l'intégrale dans (4) sur  $J$  ou sur  $S$ .

Il est intéressant de considérer la fonction génératrice des moments de la mesure :

$$g(z) = \int_J \frac{d\mu(x)}{z-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}} \quad (5)$$

avec

$$\mu_n = \int_J x^n d\mu(x), \quad \mu_0 = 1. \quad (6)$$

D'après (4), on a

$$g(z) = \int_J \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^d \frac{1}{z-T_i^{(-1)}(x)} \right) d\mu(x) = \int_J \frac{1}{d} \frac{T'(z)}{T(z)-x} d\mu(x).$$

Donc  $g(z)$  satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$g(z) = \frac{1}{d} T'(z) g(T(z)). \quad (7)$$

En développant les deux membres en puissance de  $1/z$ , cette relation permet de calculer par récurrence les moments de la mesure, en partant de la condition de normalisation  $\mu_0 = G(\infty) = 1$ .

### III. ITERATIONS ET POLYNOMES ORTHOGONAUX

La méthode classique [9,10] permet de définir les polynômes orthogonaux par rapport à la mesure  $d\mu(x)$  : on considère l'ensemble des polynômes  $P_n(x)$ ,  $n = 0,1,2,\dots$ , où  $P_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ , supposé monique, c'est-à-dire le coefficient de plus haut degré est égal à un. La condition d'orthogonalité s'écrit alors :

$$\int_J P_n(x) P_m(x) d\mu(x) = h_n \delta_{mn}. \quad (8)$$

Cette condition permet de déterminer successivement par récurrence les polynômes orthogonaux et les normes  $h_n$ , à partir des moments qu'on aura auparavant déduit de (5), (6) et (7). Mais on peut également déterminer de façon unique les polynômes  $P_n(x)$  par la condition :

$$\int_J P_n(x) x^m d\mu(x) = h_n \delta_{mn}, \quad n \geq m. \quad (9)$$

En utilisant la condition d'invariance (4), on obtient :

$$\int_J P_n(T(x)) x^m d\mu(x) = \int S_m(x) P_n(x) d\mu(x) \quad (10)$$

avec

$$S_m(x) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (T_i^{(-1)}(x))^m. \quad (11)$$

Si maintenant on considère la fonction génératrice des  $S_m(x)$  on peut facilement établir la relation :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m(x)}{u^{m+1}} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{1}{u - T_i^{(-1)}(x)} = \frac{1}{d} \frac{T'(u)}{T(u) - x}. \quad (12)$$

Le développement de la dernière expression de (12) en puissance de  $1/u$  permet d'établir que  $S_m(x)$  est un polynôme en  $x$  et que son degré  $\delta$  satisfait  $\delta d \leq m$ , et que si  $m$  est un multiple de  $d$ ,  $S_m(x)$  est un polynôme monique de degré  $\frac{m}{d}$ . Ces observations permettent au vu de (10) de montrer que  $P_n(T(x))$  est orthogonal à toutes les puissances  $x^m$  avec  $m < nd$ . Mais  $P_n(T(x))$  est monique de degré  $nd$ . On a donc :

$$P_n(T(x)) = P_{nd}(x). \quad (13)$$

De même lorsque  $m = nd$ , on obtient :

$$h_{nd} = h_n . \quad (14)$$

L'itération de (13) donne :

$$P_n(T^{(k)}(x)) = P_{nd^k}(x), \quad (15)$$

et pour  $n=1$ , on obtient :

$$P_{d^k}(x) = P_1(T^{(k)}(x)) \quad (16)$$

Or  $P_1(x)$  est un polynôme du premier degré qui s'exprime uniquement à l'aide du premier moment de la mesure :

$$P_1(x) = x - \mu_1, \quad (17)$$

et comme les équations (5), (6), (7) montrent que  $\mu_1$  s'exprime simplement en fonction des coefficients de  $T$  :

$$\mu_1 = -\frac{\alpha}{d},$$

où  $\alpha$  est le coefficient de  $z^{d-1}$  dans  $T$  :

$$T(z) = z^d + \alpha z^{d-1} + \dots, \quad (18)$$

on a donc en général :

$$T^{(k)}(x) = P_{d^k}(x) + \frac{\alpha}{d}. \quad (19)$$

Cette équation établit une relation entre polynômes itérés et polynômes orthogonaux. Lorsque  $\alpha=0$ , c'est-à-dire lorsque la somme des racines de  $T$  est nulle, la suite des itérés de  $T$  est une sous suite de la suite des polynômes orthogonaux.

Terminons cette section par trois observations :

1) Les polynômes orthonormés  $\hat{P}_n(x)$  sont reliés aux polynômes moniques  $P_n(x)$  par la relation :

$$\begin{cases} \hat{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} P_n(x) \\ \int_J \hat{P}_n(x) \hat{P}_m(x) d\mu(x) = \delta_{nm} . \end{cases} \quad (20)$$

Les équations (13) et (14) montrent qu'on a aussi pour les polynômes orthonormés la relation

$$\hat{P}_n(T(x)) = \hat{P}_{nd}(x). \quad (21)$$

2) L'utilisation combinée des propriétés d'invariance (4) et de transformation (13) permet de mettre en évidence de façon très simple les propriétés d'ergodicité (et de "mixing") de la mesure  $d\mu(x)$ . En effet quelque soit la fonction mesurable  $f$ , on a :

$$\int_J f(T(x)) x^n d\mu(x) = \int_J f(x) S_m^{(k)}(x) d\mu(x), \quad (22)$$

où  $S_m^{(k)}$  est associé à  $T^{(k)}(x)$  de la même façon que  $S_m(x)$  est associé à  $T(x)$  dans l'équation (11). Plus précisément :

$$S_m^{(k)}(x) = \frac{1}{d^k} \sum_{i=1}^{d^k} (T_i^{(-k)}(x))^m.$$

On montre par le même argument (cf equation (12)) que le degré  $\delta_k$  de  $S_m^{(k)}$  est tel que  $\delta_k d^k \leq m$ , et en particulier  $S_m^{(k)}(x)$  est une constante indépendante de  $x$  pour  $m < d^k$ . On a donc pour  $m < d^{k-1}$  :

$$\int_J f(T^{(k)}(x)) x^m d\mu(x) = \mu_m \int_J f(x) d\mu(x). \quad (23)$$

On aura donc pour tout polynôme  $q(x)$  de degré inférieur à  $d^k$  :

$$\int_J f(T^{(k)}(x)) q(x) d\mu(x) = \left( \int_J f(x) d\mu(x) \right) \left( \int_J q(x) d\mu(x) \right). \quad (24)$$

Si maintenant on remplace  $q(x)$  par une fonction approximable en norme par des polynômes de degré croissants, on aura lorsque  $k \rightarrow \infty$  :

$$\int_J f(T^{(k)}(x)) q(x) d\mu(x) \rightarrow \left( \int_J f(x) d\mu(x) \right) \left( \int_J q(x) d\mu(x) \right). \quad (25)$$

Cette propriété de "mixing" de la mesure  $d\mu(x)$  est donc essentiellement algébrique, résultats obtenu dans les références [11],[12] et [13].

3) Lorsque l'ensemble de Julia n'est pas réel on peut généraliser ces résultats, mais il y a deux façons de définir le produit scalaire : ou bien on prend le produit scalaire hermitien [13],[3],[4] :

$$\langle f, g \rangle = \int_J f(z) \bar{g}(z) d\mu(z), \quad (26)$$

où bien on définit le produit scalaire par prolongement analytique [1],[2],[5] :

$$\langle f, g \rangle = \int_J f(z) g(z) d\mu(z). \quad (27)$$

Les deux approches fournissent des systèmes de polynômes orthogonaux différents. La deuxième approche compense la perte de la positivité par le gain de propriétés d'analyticité dans les paramètres du polynôme  $T(x)$ , et le maintien de la relation avec les approximants de Padé [5]. Il est vraisemblable que la considération simultanée des deux ensembles de polynômes orthogonaux est nécessaire pour avoir un système complet de fonctions sur l'ensemble de Julia [11]. On ne sait pas calculer en général les polynômes orthonormés par rapport au produit scalaire (26), alors que les polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire (27) s'obtiennent à partir du cas, réel par prolongement analytique et satisfont des relations de récurrence du type de celles que nous étudierons dans la section suivante.

#### IV. RELATIONS DE RECURRENCE ET OPERATEURS A UNE DIMENSION

Les systèmes de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure réelle satisfont à une relation de récurrence à trois termes [9,10]. Pour l'écrire on décompose  $x P_n(x)$  sur la base des polynômes orthogonaux et on observe que les seules composantes non nulles sont sur les polynômes de degré  $(n+1)$ ,  $n$  et  $(n-1)$ , ce que l'on réécrit sous la forme habituelle pour les polynômes moniques :

$$P_{n+1}(x) = (x-A_n) P_n(x) - R_n P_{n-1}(x), \quad (28)$$

relation valable pour  $n \geq 0$  à condition de poser  $R_0=0$  et  $P_{-1}=0$ . De plus le calcul des coefficients dans (28) donne pour  $m \geq 1$  :

$$R_n = \frac{h_n}{h_{n-1}}, \quad (29)$$

où les  $h_n$  sont définis dans l'équation (8). Lorsque la mesure est positive les coefficients  $h_n$  et  $R_n$  sont donc positifs. Les polynômes orthonormaux  $\hat{P}_n(x)$  définis dans l'équation (20) satisfont l'équation correspondante déduite de (28) et (29) :

$$\sqrt{R_{n+1}} \hat{P}_{n+1}(x) = (x - A_n) \hat{P}_n(x) - \sqrt{R_n} \hat{P}_{n-1}(x) \quad . \quad (30)$$

Cette dernière équation peut se mettre sous forme opératorielle. Plaçons nous dans un espace vectoriel des suites discrètes  $\psi_n$  (auquel on peut donner une structure d'espace de Hilbert  $\mathcal{L}_2$ ), et considérons le vecteur dépendant du paramètre  $x$ , tel que :

$$\psi_n(x) = \hat{P}_n(x), \quad n \geq 0 \quad . \quad (31)$$

On définit alors l'opérateur  $H$  par ses éléments de matrice  $H_{ij}$ ,  $i, j \geq 0$ .  $H$  est une matrice tridiagonale de Jacobi : les seuls éléments de matrice non nuls sont :

$$\begin{cases} H_{ii} = A_i \\ H_{j,j+1} = H_{j+1,j} = \sqrt{R_{j+1}} \end{cases} \quad . \quad (32)$$

La matrice infinie  $H$  est symétrique réelle. La relation de récurrence peut alors s'écrire :

$$H \psi(x) = x \psi(x) \quad . \quad (33)$$

Donc  $\psi(x)$  est vecteur propre pour  $H$  avec la valeur propre  $x$ . L'appartenance de  $x$  au spectre de  $H$  dépend alors de la normalisabilité de  $\psi$  donc en fait de la croissance de la composante  $\psi_n = \hat{P}_n(x)$  avec  $n$  pour  $x$  fixé.

En principe la connaissance des moments à travers les relations (5) et (7) permet de calculer les coefficients  $A_n$  et  $R_n$ . Mais nous allons montrer une autre méthode de calcul bien plus rapide. On définit un opérateur de décimation  $D$  de degré  $d$  de la façon suivante :

$$(D\psi)_n = \psi_{dn} \quad . \quad (34)$$

On peut alors montrer l'équation [14,5] :

$$HD = DT(H) . \quad (35)$$

Dans cette équation le produit des opérateurs est en fait une somme finie sur les indices. Pour montrer (35) on observe d'abord que les deux membres donnent le même résultat lorsqu'on les applique à la famille de vecteurs  $\psi_n(x)$  défini en (31) ; et ceci à cause de l'équation de transformation (21). Des considérations algébriques utilisant le fait que H est tridiagonale et que les  $\hat{P}_n(x)$  sont des polynômes permettent d'en déduire que tous les éléments de matrice des deux membres de (35) sont identiques. De cette équation on peut alors déterminer par récurrence les coefficients  $A_n$  et  $R_n$  de H. On trouvera dans la section (VI) un traitement détaillé du cas où  $T(x)$  est de degré 2. Des méthodes générales sont données dans les références [4] et [5].

#### V. PROPRIETES SPECTRALES

L'opérateur H introduit dans la section précédente admet les propriétés suivantes, toujours dans le cas où l'ensemble de Julia J est réel :

1) Le spectre de H est l'ensemble de Julia. Si on considère comme indiqué plus haut l'espace de Hilbert  $\ell_2$  des suites, il suffit de montrer que  $\hat{P}_n(x)$  a une croissance exponentielle si  $x \notin J$  et une croissance au plus polynomiale si  $x \in J$ . Si  $x \notin J$ , on a  $T^{(b)}(x) \sim C x^{dk}$  pour k assez grand. La relation (21) montre alors que la croissance de  $\hat{P}_n(x)$  est exponentielle avec n, pour  $x \notin J$ . Lorsque  $x \in J$ ,  $T^{(k)}(x) \in J$  et reste donc borné. Toutes les composantes  $\psi_{nd^k}(x) = \hat{P}_{nd^k}(x) = \hat{P}_n(T^{(k)}(x))$  restent donc bornées. La croissance polynomiale est plus délicate à démontrer et elle suppose que l'on sait borner la croissance à l'infini des coefficients  $A_n$  et  $R_n$ , ce que nous ne savons faire explicitement que dans le cas du degré 2, Référence [5] et de degré 3, Référence [4]. Cependant l'idée est simple : pour calculer  $\hat{P}_n(x)$  on utilise la relation de récurrence à trois termes (30) pour exprimer  $P_n$  en fonction des  $P_m$  où m est multiple de d. On utilise alors (21) pour exprimer  $\hat{P}_{nd}(x)$  à partir de  $\hat{P}_n(T(x))$ . Si  $x \in J$ , alors également  $T(x) \in J$  et est donc borné. L'important est que la relation de récurrence n'est utilisée qu'un nombre de fois N tel que  $N \sim \frac{\ln n}{\ln d}$ . Or on sait que les relations de récurrence du deuxième ordre ont tendance

à créer des comportements exponentiels, ici les comportements seront du type  $\sim \exp \frac{\ln n}{\ln d} = n^K$ , ce qui donne une estimation polynomiale de la croissance. Cet argument est loin d'être complet et nous ne savons l'explicitier que pour le cas du degré 2 (voir section VI). Mais la conjecture que  $\hat{P}_n(x)$  se comporte polynomialement en  $n$  sur l'ensemble de Julia est tout à fait raisonnable.

2) La mesure spectrale obtenue en prenant l'élément de matrice de la résolvante dans le vecteur  $\phi^0$  défini par  $\phi_n^0 = \delta_{no}$  n'est autre que la mesure introduite dans la section II :

$$\langle \phi^0 | (z-H)^{-1} | \phi^0 \rangle = \int_J \frac{d\mu(x)}{z-x} . \quad (36)$$

C'est une propriété générale des matrices tridiagonales de Jacobi. En effet on a, d'après (31) et (20) :

$$(\phi^0)_n = \int_J \psi_n(x) d\mu(x) . \quad (37)$$

Donc :

$$H^n \phi^0 = \int_J H^n \psi(x) d\mu(x) = \int_J x^n \psi(x) d\mu(x) \quad (38)$$

et en prenant le produit scalaire des deux membres avec  $\phi^0$ , on obtient :

$$\langle \phi^0, H^n \phi^0 \rangle = \mu_n \quad (39)$$

dont on déduit la relation (36).

Plus délicate est l'observation que la fonction  $g(z)$  définie en (5) est également la fonction génératrice de la "densité d'état". On considère la suite des mesures discrètes  $d\rho_n(x)$  construites en posant une mesure de Dirac avec poids  $\frac{1}{n}$  à toutes les racines de l'équation  $P_n(x)=0$ . Cette mesure a une limite qui décrit la densité asymptotique de zéros des polynômes orthogonaux, appelée en mécanique quantique "densité d'états".

En fait on peut montrer que cette mesure limite coïncide avec la mesure  $d\mu(x)$  définie dans la section II. On observe à cet effet que les fonctions génératrices  $\Gamma_n(z)$  des mesures  $d\rho_n$  sont données par :

$$\Gamma_n(z) = \int \frac{d\rho_n(x)}{z-x} = \frac{1}{n} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} . \quad (40)$$

Lorsque la somme des racines de  $\Gamma$  est nulle, on montre [5] que  $\Gamma_{d^k}$  n'est



autre que l'approximation de Padé  $[d^k-1/d^k]$  à la fonction  $g(z)$  défini en (5), pour son développement au voisinage de l'infini. Les théories des approximants de Padé et du problème des moments assurent alors la convergence des  $\Gamma_{d^k}$  vers  $g(z)$  et donc l'identité de la mesure  $d\mu(x)$  et de la "densité d'état". On peut aussi montrer la convergence de  $\Gamma_n$  par des arguments d'analyse harmonique et la généralisation au cas où la somme des racines de  $T_n$  n'est pas nulle est évidente.

3) Toujours sous les conditions exposées dans la section II, qui assurent que l'ensemble de Julia est réel, les  $d$  branches inverses  $T_i^{(-1)}$  associées au polynôme  $T(x)$  sont bien définies sur l'ensemble  $S$  et les images  $T_i^{(-1)}(S)$  sont toutes disjointes. On peut alors paramétrer les points du spectre de la façon suivante. On considère l'ensemble des itérations successives des branches inverses appliquées à un point  $x_0 \in S$  ; et on écrit

$$x_n(i_1, i_2, \dots, i_n) = T_{i_1}^{(-1)} (T_{i_2}^{(-1)} \dots (T_{i_n}^{(-1)}(x_0)) \dots) \quad (41)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , les  $x_n(i_1, \dots, i_n)$  tendent vers un point de l'ensemble de Julia indépendant du point  $x_0$  de départ. On peut donc paramétrer l'ensemble de Julia, c'est-à-dire le spectre de l'opérateur  $H$  par une suite infinie d'indices :  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$  prenant chacun  $d$  valeurs. On écrit alors :

$$x_n(i_1, \dots, i_n) \rightarrow x(i_1, \dots, i_n, \dots) \quad (42)$$

Cette paramétrisation est en fait un bon codage du spectre. La transformation  $x \rightarrow T(x)$  est représentée par la translation sur les indices.

On a en fait :

$$\begin{cases} T(x(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)) = x(i_2, i_3, \dots, i_n, \dots) \\ T_{i_0}^{(-1)}(x(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)) = x(i_0, i_1, \dots, i_n, \dots) \end{cases} \quad (43)$$

L'action de  $T$  sur le spectre est donc celle d'un schéma de Bernouilli. La théorie des probabilités nous dit alors que la seule mesure invariante par translation correspond au tirage indépendant de tous les indices. On aura donc, dans la paramétrisation  $x(\vec{i})$ , l'expression suivante pour

la mesure invariante et balancée :

$$\int f(x) d\mu(x) = \int \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ di_n \frac{1}{d} \left[ \sum_{j=1}^d \delta(i_n - j) \right] f(x(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)) \right\} . \quad (44)$$

Cette mesure n'a pas de composante atomique (masse de Dirac) et est donc singulière continue. Ces observations caractérisent le caractère chaotique des états : en effet l'équation (15) montre que le calcul des valeurs de la fonction d'onde au points  $nd^k$ , pour  $k = 0, 1, 2, \dots$  revient au calcul de la fonction d'onde au point  $n$ , pour la suite des valeurs propres  $T^{(k)}(x)$ . Mais, avec probabilité 1 par rapport à  $\mu$ , cette suite est ergodique sur le spectre : il n'y a pas de corrélations entre les valeurs des fonctions aux points  $nd^k$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Il nous reste cependant à montrer que cette propriété chaotique n'est pas due à l'échantillonnage [19] .

4) On peut également montrer que l'exposant de Lyapounov défini par [17] :

$$\gamma_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln \left( \frac{\psi_n^2(x) + \psi_{n+1}^2(x)}{\psi_0^2(x) + \psi_1^2(x)} \right) \quad (45)$$

satisfait :

$$\gamma(x) = \frac{1}{d} \gamma(T(x)) . \quad (46)$$

ce qui montre que  $\gamma$  est nul sur le spectre [14].

## VI. PROPRIETES DE PRESQUE PERIODICITE

### 1) Généralités

L'objet de cette section est de montrer que lorsque le degré du polynôme  $T$  est égal à 2, les coefficients de  $H$  définis par (32) et (35) sont presque périodiques. En fait les coefficients  $A_n$  et  $R_n$  sont aussi ceux du développement en fraction continue de la fonction génératrice  $g(z)$  définie en (5) et (7). On a :

$$g(z) = 1 / (z - A_0 - R_1 / (z - A_1 - R_2 / (\dots R_n / (z - A_n - R_{n+1} / (\dots)))))) . \quad (47)$$

Le calcul des coefficients  $A_n$  et  $R_n$  peut donc en principe se faire à partir des moments de la mesure. Cependant la relation  $HD = DT(H)$  permet de les déterminer par récurrence (vérification fastidieuse mais sans difficulté) lorsque l'on a calculé les premiers pour l'initialisation: si le degré

$d$  est pair :  $d=2k$ , il faut pour initialiser calculer directement  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, R_1, R_2, \dots, R_{k-1}$  et pour  $d=2k+1$  impair, il faut calculer  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, R_1, R_2, \dots, R_k$ , c'est-à-dire en tout  $(d-1)$  conditions. Enfin pour calculer ces conditions initiales, la mise sous fraction continue de l'approximant de Padé  $[d-1/d]$  à  $g(z)$  suffira. En effet la théorie des polynômes orthogonaux vue plus haut et la relation (19) montre que cet approximant n'est autre que

$$[d-1/d] = \frac{1}{d} \frac{T'(z)}{T(z) + \frac{\alpha}{d}} \quad (48)$$

On trouvera dans [5] les détails, montrant notamment la relation entre l'équation fonctionnelle (7) et la forme (48) des approximants de Padé. Dans [5] est explicité une méthode différente (mais équivalente) de calcul des coefficients, basée sur les propriétés des polynômes orthogonaux. Cette méthode est remplacée ici par l'exploitation de l'équation entre opérateurs (35). L'examen des relations issues de (35) montre les propriétés suivantes :

a) Si on pose  $H = H'+C$ , alors on a  $H'D = DT'(H')$  avec  $T'(x)=T(x+C)-C$ , ou  $C$  est un opérateur multiple de l'unité. On peut choisir la constante  $C$  de façon que les racines de  $T'$  aient une somme nulle. On peut donc toujours ramener le cas général à ce cas particulier, les  $R_n$  sont identiques et les  $A_n$  différents d'une constante indépendante de  $n$ . De même si  $T$  est pair ou impair, il y a une solution de (35) où tous les  $A_n$  sont nuls.

b) Une "tendance" à la presque périodicité s'observe de la façon suivante : on formule la *conjecture* suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{md^{k+s}} \stackrel{?}{=} A_s \quad (49)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{md^{k+s}} \stackrel{?}{=} R_s \quad (50)$$

Les fonctions  $A$  et  $R$  seront presque périodiques si de plus cette limite est uniforme par rapport à  $m$  et  $s$ . On peut dès maintenant faire l'observation suivante : (49) et (50) se montrent par récurrence sur  $s$ , or il est facile de vérifier que les équations récurrentes qui permettent de calculer  $A_n$  et  $R_n$  permettent de suivre cette récurrence. La difficulté réside donc dans l'initialisation. Si on sait démontrer (49) pour  $s=0, \dots, k-1$  lorsque

$d=2k$  ou  $dk+1$  et (50) pour  $s = 0, \dots, (k-1)$  si  $d=2k$  et  $s=0, \dots, k$  pour  $d=2k+1$ , alors le raisonnement par récurrence permettra la généralisation pour tout  $s$ . L'uniformité par rapport à  $s$  nécessite un deuxième raisonnement par récurrence que nous ne savons pas faire en général. Nous allons illustrer ces remarques par le cas  $d=2$ . Remarquons que la conjecture de presque périodicité (limite uniforme dans (49) et (50)) n'est certainement pas valable pour n'importe quel polynôme  $T(x)$ . Il est raisonnable de la conjecturer pour le cas où l'ensemble de Julia est un ensemble de Cantor réel. On trouvera dans [15] des extensions aux polynômes complexes. Si les fonctions  $R_n$  et  $A_n$  sont presque périodiques, elles admettent un développement en série de Fourier [16]:

$$R_n = \sum_{\omega \in \Omega} r(\omega) e^{i2\pi\omega n}, \quad A_n = \sum_{\omega \in \Omega} a(\omega) e^{i2\pi\omega n} \quad (51)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble discret dénombrable des entiers  $n$ -adiques c'est-à-dire ici  $\omega$  est un nombre réel compris entre 0 et 1, dont le développement "décimal" dans la base  $d$  n'a qu'un nombre fini de chiffres non nuls.

2) Cas du degré 2

Considérons  $T(x) = x^2 - \lambda$ . Les solutions de  $HD = DT(H)$  fixées par les conditions d'initialisations  $R_0=0, A_0=0$  sont déterminées par :

$$\begin{cases} A_n = 0 \\ R_{2n} R_{2n-1} = R_n \\ R_{2n} + R_{2n+1} = \lambda \end{cases} \quad (52)$$

On peut alors montrer par récurrence [2], les inégalités suivantes lorsque  $\lambda > 2$  :

$$\begin{cases} 0 < R_{2n} < R_n \\ 0 < R_{2n} \leq 1 \\ 1 < \lambda - 1 \leq R_{2n+1} < \lambda \end{cases} \quad (53)$$

De ces inégalités on déduit :

$$\frac{\lambda-1}{\lambda^k} < R_{(2p+1)2^k} < \frac{\lambda}{(\lambda-1)^k} , \quad (54)$$

et :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{(2p+1)2^{k+s}} = R_s . \quad (55)$$

De plus [14], une récurrence sur  $s$  permet de montrer que lorsque  $\lambda > 3$ ,

$$|R_{(2p+1)2^{k+s}} - R_s| < \frac{\lambda}{(\lambda-2)^k} \quad (56)$$

La limite (55) est donc uniforme, et la suite des  $R_n$  est presque périodique. Des généralisations à d'autres valeurs de  $\lambda$  sont données dans [15].

Remarquons que la presque périodicité est fautive pour  $\lambda=2$  : dans ce cas  $T(x) = x^2 - 2$  et si on pose  $x = 2 \cos \theta$ , on a  $P_n(x) = 2 \cos(n\theta)$  ; les  $P_n$  sont reliés aux polynômes de Tchebicheff. On a alors,  $R_0 = 0$ ,  $R_1 = 2$ ,  $R_n = 1$  pour  $n \geq 2$ .

Enfin signalons que les inégalités (53) sur les coefficients  $R_n$  permettent de montrer par récurrence une borne polynomiale pour les polynômes normalisés  $\hat{P}_n(x)$ . Lorsque  $\lambda > 2$ , on a pour  $2^k \leq n < 2^{k+1}$

$$|P_n(x)| < \frac{a}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-a}} \right)^k \quad (57)$$

Lorsque  $x$  appartient à l'ensemble de Julia. Le point fixe  $a$  le plus à droite est donné par :

$$a = \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} . \quad (58)$$

Le facteur  $\sqrt{\lambda-a}$  qui apparait dans (57) est en fait la borne inférieure de  $T'(x)$  sur l'ensemble de Julia. La technique utilisée ici fait donc explicitement référence au fait que l'ensemble de Julia est hyperbolique [7,30].

Il reste à montrer que ces considérations s'étendent aux polynômes de degré quelconque.

## VII. CONCLUSION : IMPLICATIONS PHYSIQUES

On rencontre des équations de type Schrödinger avec potentiel incommensurable dans de nombreux problèmes physiques : structure incommensurables [21], champ magnétiques appliqués aux structures cristallines [20]. Un exemple devenu classique résume bien la situation : il s'agit de l'équation de Mathieu discrète encore appelée "Almost Mathieu equation" [21,22,23] :

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \mu \cos(2\pi\alpha n + \beta)\psi_n = E\psi_n \quad (59)$$

où  $\alpha$  est un nombre irrationnel.

On s'attend a priori à y rencontrer des solutions étendues du type "fonction de Bloch" lorsque  $\mu$  est petit [22] et des solutions localisées, normalisables lorsque  $\mu$  est grand [21]. Cependant cette transition entre les deux régimes pour  $\mu=1$  ne s'observe que lorsque l'irrationnel  $\alpha$  satisfait une condition diophantienne [22]. On a démontré [24] que lorsque  $\alpha$  est un irrationnel du type Liouville, c'est-à-dire très bien approché par une suite de rationnels, on observe alors pour toute valeur de  $\mu$  un spectre singulier et une mesure spectrale singulière continue. La difficulté est ici du même type que celle rencontrée dans le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser [22,23]. L'un des problèmes les plus obscurs est l'étude du comportement à longue distance des états (grandes valeurs de  $n$ ) en présence d'un spectre singulier continu. Le modèle présenté ici est le premier exemple explicite où ce comportement des états peut être exactement étudié. La méthode que nous utilisons est en fait du même esprit que celle du groupe de renormalisation, résumée ici dans les équations (13) et (35). On peut la rapprocher des analyses du même type effectuées pour les problèmes incommensurables [18,19].

Ici nous introduisons les méthodes du groupe de renormalisation dans les problèmes de mécanique quantique. Une approche analogue peut être tentée pour l'étude des spectres de vibration des structures fractales [28], où on a aussi un groupe de renormalisation exact s'exprimant en termes d'une transformation polynomiale. L'étude des excitations de basse énergie dans ce type de modèle est particulièrement intéressante. On y observe une loi de dispersion en puissance de l'énergie d'excitation, accompagnée

de corrections oscillantes logarithmiques dont l'étude est particulièrement délicate [27,29]. Enfin signalons que des mesures invariantes par transformation rationnelle apparaissent dans les modèles de mécanique statistique du type Ising sur réseau hiérarchique [32]. Ici les oscillations de la densité d'état mentionnées plus haut ont leur correspondant dans les oscillations critiques des fonctions thermodynamiques.

Le point commun à tous ces problèmes est la fécondité de l'approche par la méthode du groupe de renormalisation. Le modèle exposé ici est une illustration de l'application de cette méthode à des problèmes de mécanique quantique : le modèle est explicitement construit de façon à satisfaire une propriété de renormalisation exacte, s'exprimant en terme de la transformation la plus élémentaire : la transformation polynomiale.

REFERENCES

- [ 1 ] D. Bessis, M.L. Mehta, P. Moussa, C.R. Acad. Sci. Paris 293, Ser. 1, 705-708 (1981).
- [ 2 ] D. Bessis, M.L. Mehta, P. Moussa, Letters Math. Phys. 6, 123-140 (1982).
- [ 3 ] M.F. Barnsley, J.S. Geronimo, A.N. Harrington, Commun. Math. Phys. 88, 479-501 (1983).
- [ 4 ] M.F. Barnsley, J.S. Geronimo, A.N. Harrington, Bull. Amer. Math. Soc. 7, 381-384 (1982), et Proc. Amer. Math. Soc. 88, 625-630 (1983).
- [ 5 ] D. Bessis, P. Moussa, Commun. Math. Phys. 88, 503-529 (1983).
- [ 6 ] G. Julia, J. Maths.Pur.Appl.Ser. 7 (Paris), 47-245 (1918).  
P. Fatou, Bull. Soc. Math. France 47, 161-271 (1919) ; 48, 33-94 (1920) ; 48, 208-314 (1920).
- [ 7 ] A. Douady, Systèmes Dynamiques Holomorphes, Séminaire Bourbaki n°599, Astérisque, 105-106, 39-63 (1983).
- [ 8 ] H. Brolin, Ark. Mat. 6, 103-144 (1965).
- [ 9 ] N.I. Akhiezer, The Classical Moment Problem, Oliver and Boyd, Edinburgh 1965, voir p.85-86.
- [ 10 ] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, 23 (1939).
- [ 11 ] M.F. Barnsley, J.S. Geronimo, A.N. Harrington, Ergod.Th. and Dynam. Sys., 3, 509-520 (1983).
- [ 12 ] R.L. Adler, T.J. Rivlin, Proc. Am. Math. Soc. 15, 794-796 (1964).
- [ 13 ] T.S. Pitcher, J.R. Kinney, Ark. Mat., 8, 25-32 (1968).
- [ 14 ] J. Bellissard, D. Bessis, P. Moussa, Phys. Rev. Lett. 49, 701-704 (1982).
- [ 15 ] G.A. Baker, D. Bessis, P. Moussa, Physica, 124A, 61-77 (1984).
- [ 16 ] H. Bohr; Almost periodic functions, Chelsea New York (1951).
- [ 17 ] D.J. Thouless, J. Phys. C, 5, 77-81 (1972).
- [ 18 ] D.J. Thouless, Q. Niu, J. Phys. A, 16, 1911-1919 (1983).



- [19] M. Kohmoto, Y. Oono, Cantor Spectrum for an almost periodic Schrödinger Equation and a Dynamical Map. Illinois University at Urbana Preprint (1983).
- [20] P.G. Harper, Proc. Phys. Soc. London, Sect. A, 68, 874-878 (1955).
- [21] S. Aubry, G. André, Ann. Israel Phys. Soc., 3, 133-164 (1979).
- [22] E. Dinaburg, Ya.G. Sinai, Funct. Anal. Appl. 9, 279-289 (1976).
- [23] J. Bellissard, R. Lima, D. Testard, Commun. Math. Phys. 88, 207-234 (1983) ; B. Simon, Advances in Appl. Maths. 3, 463-490 (1982).
- [24] A. Ya. Gordon, Usp. Math. Nauk., 31, 257 (1976)  
J. Avron, B. Simon, Bull. Amer. Math. Soc. 6, 81-85 (1982).
- [25] E. Domany, B. Alexander, D. Bensimon, L.P. Kadanoff, Phys. Rev. B28, 3110-3123 (1983).  
R. Rammal, Phys. Rev. B28, 4871-4873 (1983).
- [26] R. Rammal, G. Toulouse, J. Phys. Lettres, Paris, 44, L13-L22 (1983).
- [27] Th. Niemeijer, J.M. Van Leeuwen, in Phase Transitions and Critical Phenomena, C. Domb and M.S. Green editors, Vol.6, p.425-506, Academic Press, N.Y. (1976)  
B. Derrida, J.P. Eckmann, A. Erzan, J. Phys. A16, 893-906 (1983).
- [28] S. Alexander, R. Orbach, J. Physique Lettres, Paris 43, L625-L631 (1982)  
R. Rammal, T. Lubensky, G. Toulouse, J. Phys. Lettres, Paris 44, L65-L71 (1983).
- [29] D. Bessis, J.S. Geronimo, P. Moussa, J. Phys. Lettres, 44, L977-982 (1983)  
D. Bessis, J.S. Geronimo, P. Moussa, J. Stat. Phys., 34, 75-110 (1984).
- [30] A. Douady, J.H. Hubbard, C.R. Acad. Sci. Paris, 294, Série 1, 123-126 (1982).
- [31] Voir aussi Références dans : Franco American Meeting on the Mathematics of Random and Almost Periodic Potentials, B. Simon and B. Souillard, to appear in J. Stat. Phys.
- [32] B. Derrida, L. De Sèze, C. Itzykson, J. Stat. Phys. 39, 559-569 (1983)  
B. Derrida, C. Itzykson, J.M. Luck, Comm. Math. Phys. 94, 115-132 (1984).