Recherche Coopérative sur Programme n° 25

Marc Chaperon

Phases génératrices en géométrie symplectique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1990, tome 41
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa, R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. n° 7, p. 191-197
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__191_0>

Phases génératrices en géométrie symplectique

Marc Chaperon

A René Thom

Le but de cet exposé, qui ne suppose *aucune* connaissance en géométrie symplectique, est de présenter un avatar particulièrement élégant, dû au jeune mathématicien soviétique Tchekanov, de la méthode de "géodésiques brisées" introduites dans [4]. La "formule de Tchekanov", implicite dans [5], permet d'étendre le formalisme des fonctions génératrices à des transformations globalement canoniques beaucoup moins particulières que celles qui admettent une fonction génératrice (globale) ; cette extension est possible à condition d'"ajouter des variables" (en nombre fini), et de considérer des *phases* génératrices : on retrouve ainsi l'idée fondamentale de la théorie des singularités selon laquelle les objets singuliers peuvent être vus comme des sections d'objets réguliers de dimension plus grande.

Il paraît clair que ce point de vue, par sa simplicité et sa généralité, est appelé à jouer un grand rôle en géométrie symplectique et en physique mathématique. A titre d'exemple, nous prenons pour prétexte la démonstration par Tchekanov d'un théorème de Hofer obtenu initialement par des méthodes fort difficiles [8], et dont les preuves inspirées par [4] ([9], [10]), déjà beaucoup plus simples, nécessitaient encore de l'astuce.

La genèse de ce qui suit est *grosso modo* la suivante : A. Weinstein a remarqué que la "fonctionnelle d'action" utilisée par Conley et Zehnder ([6], [3]) fournissait une phase génératrice. J.C. Sikorav [10] a eu l'idée de présenter la méthode introduite dans [4] en ces termes (ce qui en simplifie l'exposé et permet de traiter le cas des immersions lagrangiennes) mais son point de vue "intrinsèque" l'obligeait à travailler avec des objets un peu raffinés, comme les sommes amalgamées de fibrés. Le grand mérite de Tchekanov est d'être retourné aux sources, adoptant en particulier le point de vue résolument extrinsèque qu'autorise un des plus vieux outils de la géométrie différentielle, le théorème de plongement de Whitney.

La *forme de Liouville sur le cotangent* T^*M *d'une variété* M est la 1–forme différentielle λ_M sur T^*M telle que

$$\alpha^* \lambda_M = \alpha$$

pour toute 1–forme α sur M.

Dans toute carte de T^*M induite par une carte de M, λ_M se lit comme

$$\lambda_{\mathbf{R}^n} = p\, dq = \sum_{j=1}^{n} p_j\, dq^j \ ,$$

où l'on identifie $T^*\mathbf{R}^n$ à $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$, $(q^1, \cdots, q^n)$ (resp. $(p_1, \cdots, p_n)$) désignant les coordonnées canoniques sur $\mathbf{R}^n$ (resp. $(\mathbf{R}^n)^*$). Pour tout $x \in T^*M$, $d\lambda_M(x)$ est donc non-dégénérée : $d\lambda_M$ est une *forme symplectique*, dite *structure symplectique canonique de* T^*M.

Une *immersion lagrangienne dans* T^*M est une immersion j d'une variété L dans T^*M vérifiant $\dim L = \dim M$ et telle que $j^*\lambda_M$ soit fermée. Si de plus $j^*\lambda_M$ est exacte, on dit que l'immersion lagrangienne j est *exacte*.

Ces notions étant invariantes par difféomorphisme de L, on peut parler de *sous-variétés lagrangiennes (exactes ou non)* de T^*M.

La notion d'immersion lagrangienne est invariante par *transformation symplectique* de T^*M (difféomorphisme de T^*M préservant $d\lambda_M$), mais celle d'immersion exacte ne l'est que par le groupe des transformations (symplectiques) g de T^*M telles que $g^*\lambda_M - \lambda_M$ soit exacte : ce sont les transformations *globalement canoniques* de T^*M

Exemple. Une 1–forme α sur M est un plongement lagrangien si et seulement si elle est fermée, un plongement lagrangien exact si et seulement si elle est exacte; en particulier, la section nulle du cotangent est exacte.

Toute 1–forme fermée est localement exacte. Donc, *si un germe* L *de sous-variété lagrangienne "se projette bien sur* M *"* (c'est-à-dire si la restriction à L de la projection canonique $T^*M \to M$ est un germe de difféomorphisme), il existe une fonction $\varphi : M \to \mathbf{R}$ telle que L soit le germe de $d\varphi(M)$.

Problème. Que dire des germes L qui "se projettent mal"? Si $M = \mathbf{R}^n$, on a le résultat classique [2] suivant (qui, d'après le théorème d'inversion locale, est un simple résultat d'algèbre linéaire) :

Proposition 1 *Pour tout germe* L *de sous-variété lagrangienne de* $T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n*} = 0q^1 \cdots q^n p_1 \cdots p_n$, *on peut transformer* L *en un germe qui se projette bien par une transformation symplectique, consistant à remplacer* (q^j, p_j) *par* $(-p_j, q^j)$ *pour un certain nombre d'indices.*

En d'autres termes, *il existe* $I \subset \{1, \cdots, n\}$ *tel que, notant* $J = \{1, \cdots, n\} \setminus I$, $q^I = (q^j)_{j \in I}$, *etc.,* L *soit le germe de la variété lagrangienne définie par*

$$\left\{ \begin{array}{l} p_I = \partial_{q^I} \varphi(q^I, p_J) \\ q^J = -\partial_{p_J} \varphi(q^I, p_J) \, , \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

L'inconvénient de ce résultat est qu'il n'a *a priori* aucun sens sur une variété. Pour lui en donner un, il fallait l'idée (remontant, à ma connaissance, aux travaux de Maslov sur les opérateurs intégraux de Fourier) de considérer $\Phi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^J \to \mathbf{R}$, définie par

$$\Phi(q, v) = \varphi(q^I, v) + \sum_{j \in J} v_j q^j$$

et d'écrire (1) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \partial_q \Phi(q, v) \\ \partial_v \Phi(q, v) = 0 \, . \end{array} \right. \tag{2}$$

On obtient donc L comme le germe d'une section d'une variété lagrangienne *de* $T^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^J)$ se projetant bien : le graphe de Φ. On dit que (le germe de) Φ est une *phase génératrice de* L. Nous allons voir que cette approche conserve un sens sur une variété M :

Définition Une *phase sur* M est une fonction $\Phi : M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ pour un $k \in \mathbf{N}$. Elle est *non-dégénérée* si $0 \in \mathbf{R}^{k*}$ est valeur régulière de la "dérivée verticale" $d_V\Phi : M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{k*}$ donnée par

$$d_V\Phi(q, v) = \partial_v \Phi(q, v) \, .$$

Dans ce cas, $\Sigma_\Phi = d_V\Phi^{-1}(0)$ *est une sous-variété, et on définit une immersion lagrangienne exacte* $j_\Phi : \Sigma_\Phi \to T^*M$ *par*

$$j_\Phi(q, v) = (q, \partial_q \Phi(q, v)) \, .$$

Remarque importante : si g est un automorphisme du fibré $M \times \mathbf{R}^k \to M$, on a $j_\Phi = j_{\Phi \circ g^{-1}} \circ (g|_{\Sigma_\Phi})$: du fait qu'on se restreint aux points où la dérivée verticale de Φ s'annule, sa dérivée horizontale acquiert un sens intrinsèque.

On dit qu'une immersion (lagrangienne exacte) $j : L \to T^*M$ est *engendrée par une phase* lorsqu'il existe une phase non-dégénérée Φ sur M et un difféomorphisme $h : L \to \Sigma_\Phi$ tels que $j = j_\Phi \circ h$.

Le résultat suivant est évident :

Proposition 2 *Soit 0^*_M le sous-fibré vectoriel nul de T^*M. Pour toute fonction phase non-dégénérée Φ sur M, $j_\Phi^{-1}(0^*_M)$ est l'ensemble des points critiques de Φ.*

On dit qu'une phase $\Phi : M \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ est *quadratique* lorsqu'il existe une forme quadratique Q *non-dégénérée* sur $\mathbf{R}^k$ et une métrique riemannienne sur M telle que, en notant $\tilde{Q}(q,v) = Q(v)$, $(q,v) \in M \times \mathbf{R}^k$, le gradient de $\Phi - \tilde{Q}$ soit un champ de vecteurs *borné*. Si M est compacte, Σ_Φ l'est alors aussi.

Notons $cl(M)$ la longueur cohomologique ("cup-length") de M et $b_j(M)$ son j–ième nombre de Betti. Le théorème suivant résulte de la théorie de Morse et de (la version cohomologique de) celle de Lyusternik-Schnirelmann :

Théorème 1 *Si M est compacte, une phase quadratique sur M a au moins $cl(M)+1$ points critiques, et au moins $\sum b_j(M)$ lorsqu'elle est de Morse.*

Corollaire 1 *Si M est compacte et que l'immersion lagrangienne j de L dans T^*M est engendrée par une phase quadratique, alors $j^{-1}(0^*_M)$ contient au moins $cl(M)+1$ points, et au moins $\sum b_j(M)$ lorsque j est transverse à 0^*_M.*

Une *isotopie hamiltonienne de T^*M* est une isotopie $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ de T^*M telle que, pour tout $t \in [0,1]$, g_t soit globalement canonique (il revient au même de dire que (g_t) est obtenue par intégration d'un champ hamiltonien dépendant du temps). Le résultat suivant est dû à Sikorav [10] :

Théorème 2 *Si M est compacte, alors, pour toute isotopie hamiltonienne $(g_t)_{0\leq t\leq 1}$ de T^*M, $g_1|_{0^*_M}$ est engendrée par une phase quadratique.*

On en déduit un théorème de Hofer [8], d'abord conjecturé par Arnold [1] et démontré par l'auteur [3] pour les tores :

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème, $g_1(0^*_M) \cap 0^*_M$ contient au moins $cl(M)+1$ points, et au moins $\sum b_j(M)$ lorsque l'intersection est transverse.*

Nous allons déduire le théorème 2 de trois lemmes, le premier évident:

Lemme 1 *Si l'on plonge M dans $\mathbf{R}^N$ muni de sa structure euclidienne standard et que l'on munit M de la métrique riemannienne induite, le plongement de TM dans $\mathbf{TR}^N$ associé induit par dualité riemannienne un plongement $j : T^*M \to T^*\mathbf{R}^N$ vérifiant $j^*\lambda_{\mathbf{R}^N} = \lambda_M$.*

Lemme 2 *Si l'on plonge T^*M dans $T^*\mathbf{R}^N$ comme dans le lemme 1, il est possible de construire une isotopie hamiltonienne à support compact (G_t) de $T^*\mathbf{R}^N$ coïncidant avec (g_t) sur 0^*_M et vérifiant $G_1^{-1}(M\times\mathbf{R}^{N*})\cap 0^*_{\mathbf{R}^N} = 0^*_M$.*

Lemme 3 *Pour toute isotopie hamiltonienne (G_t) à support compact de $T^*\mathbf{R}^N$, il existe une phase non-dégénérée quadratique F sur $T^*\mathbf{R}^{N*} = \mathbf{R}^{N*}\times\mathbf{R}^N$ telle que le graphe de G_1 soit l'ensemble des $((q,p),(Q,P)) \in (T^*\mathbf{R}^N)^2$ vérifiant*

$$\begin{cases} \partial_v F(p,Q;v) = 0 \\ \partial_p F(p,Q;v) = q - Q \\ \partial_Q F(p,Q;v) = P - p\,. \end{cases}$$

Le théorème 2 se déduit immédiatement de ces trois lemmes: si G_t est comme dans le second et F comme dans le troisième, la phase quadratique Φ sur M définie par

$$\Phi(Q,v) = F(0,Q,v)$$

engendre évidemment $g_1|_{0^*_M} = G_1|_{0^*_M}$, puisque $0^*_M = G_1^{-1}(M\times\mathbf{R}^{N*})\cap 0^*_{\mathbf{R}^N}$ est définie par $p=0$ et $Q\in M$. Elle est non-dégénérée si l'on a effectué convenablement l'extension dans le lemme 2 (dont nous ne détaillerons pas la preuve, nous bornant à signaler qu'elle consiste à étendre de T^*M à $T^*\mathbf{R}^N$ un hamiltonien dépendant du temps et engendrant l'isotopie (g_t)).

Preuve du lemme 3. On utilise la *formule de Tchekanov:* si le graphe de la transformation symplectique g de $T^*\mathbf{R}^N$ est l'ensemble des $((q,p),(Q,P))$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_v F(p,Q;v) = 0 \\ \partial_p F(p,Q;v) = q - Q \\ \partial_Q F(p,Q;v) = P - p\,. \end{cases}$$

et que le graphe de la transformation symplectique h de $T^*\mathbf{R}^N$ est l'ensemble des $((Q,P),(Q',P'))$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_w G(P,Q';w) = 0 \\ \partial_P G(P,Q';w) = Q - Q' \\ \partial_{Q'} G(P,Q';w) = P' - P\,. \end{cases}$$

alors, en posant $u=(v,w,P,Q)$ et

$$H(p,Q';u) = F(p,Q;v) + G(P,Q';w) + (P-p)(Q'-Q)\,,$$

le graphe de $h\circ g$ est l'ensemble des $((q,p),(Q',P'))$ vérifiant

$$\begin{cases} \partial_u H(p,Q';u) = 0 \\ \partial_p H(p,Q';u) = q - Q' \\ \partial_{Q'} H(p,Q';u) = P' - p \end{cases}$$

Si les phases F et G sont quadratiques, H ne l'est pas en général, mais *elle le devient par le changement de variables* $(p, Q'; u) \mapsto (p, Q'; U)$, *où* $U = (v, w, Q' - Q, P - p)$.

Pour que H soit non-dégénérée, une condition supplémentaire de transversalité est nécessaire, qui est satisfaite dans le cas qui nous intéresse: pour tout $K \in \mathbf{N}$, $G_1 = H_K \circ \cdots \circ H_0$, où $H_j = G_{(j+1)/(K+1)} \circ G^{-1}_{j/(K+1)}$. *Si K est assez grand, le graphe de chaque H_j est l'ensemble des $((q,p),(Q,P))$ vérifiant*

$$\begin{cases} \partial_p F_j(p,Q) = q - Q \\ \partial_Q F_j(p,Q) = P - p \end{cases}$$

pour une fonction F_j à support compact. Le lemme 3 s'obtient en effectuant K fois la construction de Tchekanov.

On prouve de même (en faisant jouer à la périodicité le rôle joué précédemment par la compacité du support) le

Lemme 4 *Soient Z_1 un réseau de $\mathbf{R}^n$, Z_2 un réseau de $(\mathbf{R}^n)^*$ et Z le réseau $Z_1 \times Z_2$ de $T^*\mathbf{R}^n$. Pour toute isotopie hamiltonienne Z-équivariante (G_t) de $T^*\mathbf{R}^N$, il existe une phase non-dégénérée F sur $T^*\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{N*}$, quadratique et Z-périodique, telle que le graphe de G_1 soit l'ensemble des $((q,p),(Q,P)) \in (T^*\mathbf{R}^N)^2$ vérifiant*

$$\begin{cases} \partial_v F(Q,p;v) = 0 \\ \partial_p F(Q,p;v) = q - Q \\ \partial_Q F(Q,p;v) = P - p\,. \end{cases}$$

Les points critiques de F étant les points fixes de G_1 , on en déduit (*théorème de Conley-Zehnder*) que G_1 *a au moins* $2N+1$ *points fixes distincts modulo Z, et au moins* 2^{2N} *si tous ses points fixes sont non-dégénérés* : il suffit d'appliquer le théorème 1 à la phase quadratique sur le tore $(T^*\mathbf{R}^N)/Z$ induite par F. On obtient ainsi en particulier la démonstration la plus simple et générale du théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable, point de départ [1] de tous les travaux récents en géométrie symplectique globale—que nous n'avons fait qu'effleurer.

A ce sujet, il est certain que le contraste entre la simplicité de [10] (que ce qui précède simplifie encore) et l'extrême complexité des travaux [7] poussant plus avant la solution des "conjectures d'Arnold" donne un sentiment d'insatisfaction que le travail d'un géomètre viendra, j'espère, atténuer.

Références

[1] V. I. ARNOLD, *Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique*, C. R. Acad. Sc. Paris 261 (1965), Groupe 1, 3719–3722.

[2] V. I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1976.

[3] M. CHAPERON, *Quelques questions de géométrie symplectique [d'après, entre autres, Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder]*, Séminaire Bourbaki, Astérisque 105–106 (1983), 231–249.

[4] M. CHAPERON, *Une idée du type "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens*, C. R. Acad. Sc. Paris t. 298 (1984) série A, 293–296.

[5] M. CHAPERON, *An elementary proof of the Conley-Zehnder theorem in symplectic geometry*, dans Braaksma, Broer et Takens, Dynamical systems and bifurcations, Springer Lecture Notes in Mathematics 1125 (1985), 1-8.

[6] C. C. CONLEY, E. ZEHNDER, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd*, Invent. math. 73 (1983), pp. 33–49.

[7] A. FLOER, *Morse theory for lagrangian intersections*, J. Diff. Geom. 28 (1988), 513–547.
A. FLOER, *The unregularized gradient flow of the symplectic action* Comm. in pure and appl. math. 41 (1988), 775–813.
A. FLOER, *A relative Morse index for the symplectic action*, Comm. in pure and appl. math. 41 (1988), 393–407.
A. FLOER, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Diff. Geom. 30 (1989), 207–221.
A. FLOER, *Cuplength estimates for Lagrangian intersections*, Comm. in pure and appl. math. 42 (1989), 335–356.

[8] H. HOFER, *Lagrangian embeddings and critical point theory*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire, Vol. 2 n° 6 (1985), 407–462.

[9] F. LAUDENBACH, J. C. SIKORAV, *Persistance d'intersection avec la section nulle...*, Invent. math. Vol. 82 (1985), 349–357.

[10] J. C. SIKORAV, *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*, Comm. math. Helvet. Vol. 62 No 1 (1987), 62–73.