Christian Kassel

Monodromie des systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov et groupes quantiques

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1993, tome 45
« Conférences de P. Cartier, P. Di Francesco, J. Fröhlich, P. Hello, Ch. Kassel, V. Kharlamov, B. Khesin, J. Magnen, M. Rabaud, M. Schottenloher », , exp. n° 4, p. 37-42
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1993__45__37_0>

Monodromie des systèmes de Knizhnik-Zamolodchikov et groupes quantiques

par

Christian KASSEL

1. Les systèmes (KZ_n). On se donne une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, un $\mathfrak{g}$-module simple V de dimension finie, un paramètre complexe h et un entier $n > 1$. A cette donnée on associe le système différentiel (KZ_n) introduit par Knizhnik-Zamolodchikov [KZ]

$$dw = \overline{h} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j}(dz_i - dz_j)w \qquad (KZ_n)$$

où $\overline{h} = \frac{h}{2\pi i}$, où $w(z_1, \ldots, z_n)$ est une fonction analytique à n variables complexes distinctes et à valeurs dans l'espace vectoriel $V^{\otimes n}$ et où t_{ij} est l'élément de $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ défini comme suit. Soit $(u_k)_k$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ relativement à la forme de Killing. Alors $t = \Sigma_k u_k \otimes u_k$ est un 2-tenseur invariant symétrique de $\mathfrak{g}$. Il est lié à l'opérateur de Casimir $C = \Sigma_k u_k^2$ par

$$t = \frac{1}{2}(\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C). \qquad (1.1)$$

Si $i \neq j$, on définit t_{ij} par $t_{ij} = \Sigma_k x_k^{(1)} \otimes \ldots \otimes x_k^{(n)}$ où $x_k^{(i)} = x_k^{(j)} = u_k$ et $x_k^{(p)} = 1$ si $p \neq i, j$. Comme d'habitude, $U(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et Δ sa comultiplication.

Le système (KZ_n) définit une connexion ∇_n sur le fibré trivial E_n de fibre $V^{\otimes n}$ et de base $Y_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | i \neq j \Rightarrow z_i \neq z_j\}$. Or, les éléments t_{ij} de $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ vérifient les relations $t_{ij} = t_{ji}$ et

$$[t_{ij}, t_{k\ell}] = 0 \quad \text{et} \quad [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0 \qquad (1.2)$$

chaque fois que i, j, k, ℓ sont distincts. En effet, les relations de gauche sont triviales tandis que celle de droite résultent du fait que t est un 2-tenseur invariant, c'est à dire qu'on a $[t, \Delta(a)] = 0$ pour tout $a \in U(\mathfrak{g})$. Les relations (1.2) impliquent que la connexion ∇_n est plate. Par conséquent, le système a une *monodromie* qui est une représentation $\rho_{KZ}^{(n)}$ du groupe fondamental $\pi_1(Y_n)$ sur $V^{\otimes n}$. Ce groupe fondamental n'est autre que le groupe P_n des tresses pures, i.e. le sous-groupe du groupe des tresses B_n dont la permutation associée est l'identité. En utilisant le fait que le 2-tenseur t est symétrique, on montre que la connexion passe à un fibré sur l'espace $X_n = Y_n/S_n$ quotient de Y_n par l'action de permutation sur les coordonnées. L'espace X_n n'est autre que *l'espace de configurations de n points distincts* dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Son groupe fondamental est le groupe B_n tout entier. On notera encore $\rho_{KZ}^{(n)}$ la représentation de monodromie de B_n sur $V^{\otimes n}$. Les équations (KZ_n) dépendant linéairement du paramètre h, les coefficients de la représentation $\rho_{KZ}^{(n)}$ sont des fonctions analytiques en h qu'il est loisible de développer en séries entières.

Un théorème énoncé par Kohno [Ko] et démontré par Drinfeld [Dr1][Dr2] exprime la monodromie $\rho_{KZ}^{(n)}$ en termes (explicites) de groupes quantiques. Nous faisons d'abord quelques rappels sur ces derniers au paragraphe 2 avant d'énoncer le théorème au paragraphe 3.

2. Algèbres enveloppantes quantiques. Soit $K = \mathbb{C}[[h]]$ l'algèbre des séries formelles en une variable h. Drinfeld [Dr0] et Jimbo [Ji] ont construit une K-algèbre de Hopf topologique $U_h\mathfrak{g}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

a) Lorsque $h = 0$, on retrouve $U(\mathfrak{g})$; plus précisément on a

$$U_h\mathfrak{g}/hU_h\mathfrak{g} = U(\mathfrak{g}). \tag{2.1}$$

b) Pour tout $\mathfrak{g}$-module V de dimension finie, il existe un unique $U_h\mathfrak{g}$-module $\widetilde{V}$ libre de rang fini sur K tel que $\widetilde{V}/h\widetilde{V} = V$.

c) Il existe un élément central C_h et un élément $R_h \in U_h\mathfrak{g}\widehat{\otimes}U_h\mathfrak{g}$ tels que *i)* C_h est congru à l'opérateur de Casimir C de $U(\mathfrak{g})$ modulo h,

ii) si Δ_h désigne la comultiplication de $U_h\mathfrak{g}$, on a

$$(R_h)_{21}R_h = \Delta_h(e^{hC_h/2})(e^{-hC_h/2} \otimes e^{-hC_h/2}) \tag{2.2}$$

iii) et pour tout $U_h\mathfrak{g}$-module $\widetilde{V}$ libre de rang fini sur K, l'automorphisme $c_{\widetilde{V}}$ de $\widetilde{V} \widehat{\otimes} \widetilde{V}$ défini par

$$c_{\widetilde{V}}(v \otimes v') = \sigma(R_h(v \otimes v')) \tag{2.3}$$

est une solution de l'équation de Yang-Baxter. Ici $v, v' \in \widetilde{V}$ et σ désigne la volte $v \otimes v' \mapsto v' \otimes v$.

A la donnée (considérée au § 1) de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ et du $\mathfrak{g}$-module V, nous pouvons donc associer le $U_h\mathfrak{g}$-module $\widetilde{V}$ et l'automorphisme $c_{\widetilde{V}}$. Fixons un entier $n > 1$ et considérons les générateurs habituels $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ du groupe de tresses B_n. Puisque $c_{\widetilde{V}}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter, il existe un unique morphisme de groupes

$$\rho_{R_h}^{(n)} : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(\widetilde{V}^{\widehat{\otimes} n})$$

défini pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ par

$$\rho_{R_h}^{(n)}(\sigma_i) = \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} \otimes c_{\widetilde{V}} \otimes \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} \tag{2.4}$$

où $c_{\widetilde{V}}$ opère sur les facteurs i et $i+1$. Comme espace vectoriel, on a : $\widetilde{V} = V[[h]]$. Par conséquent, $\widetilde{V}^{\widehat{\otimes} n} = (V^{\otimes n})[[h]]$.

Si donc on se donne une base de V, on peut représenter $\rho_{R_h}^{(n)}(\sigma_i)$ comme une matrice dont les coefficients sont des séries formelles en h. On observera que la R-matrice universelle R_h étant explicite dans les cas usuels (voir par exemple [Ro]), la représentation $\rho_{R_h}^{(n)}$ est en principe calculable.

3. Le théorème de Kohno-Drinfeld

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses du paragraphe 1, les représentations $\rho_{KZ}^{(n)}$ et $\rho_{R_h}^{(n)}$ sont équivalentes. En d'autres termes, il existe un automorphisme K-linéaire u de $V^{\otimes n}[[h]]$ tel que pour tout élément g de B_n, on ait*

$$\rho_{KZ}^{(n)}(g) = u \rho_{R_h}^{(n)}(g) u^{-1}. \tag{3.1}$$

Ce résultat apporte donc une solution au problème de la monodromie des systèmes (KZ_n). Ce faisant, il jette un pont inattendu, mais spectaculaire entre un problème de géométrie sur des espaces de configurations et la théorie des groupes quantiques. Bien plus, la démonstration donnée par Drinfeld éclaire les groupes quantiques d'un jour nouveau et introduit de nouveaux concepts (quasi-bigèbres, transformation de jauge, ...) qui se sont récemment révélés indispensables dans la construction de l'invariant universel de Kontsevich qui classifie les invariants des noeuds de degré fini (cf. [Ka], chap. XX).

Nous consacrons le reste de ce survol à quelques commentaires sur la démonstration de Drinfeld.

3.1. Tout d'abord, Drinfeld montre l'existence d'un élément Φ_{KZ} de $U\mathfrak{g}^{\otimes 3}[[h]]$ qui permet de munir la catégorie tensorielle des $U\mathfrak{g}[[h]]$-modules d'un isomorphisme d'associativité rendant commutatif le pentagone de Mac Lane. Il existe aussi un élément R_{KZ} de $U\mathfrak{g}^{\otimes 2}[[h]]$ qui définit des tressages dans la même catégorie. Le même procédé que celui expliqué au § 2 donne alors pour tout $\mathfrak{g}$-module V une représentation $\rho^{(n)}_{R_{KZ}}$ du groupe B_n sur $V^{\otimes n}[[h]]$. Les éléments Φ_{KZ} et R_{KZ} sont construits de telle manière que l'on ait

$$\rho^{(n)}_{R_{KZ}} = \rho^{(n)}_{KZ}$$

pour tout n. Autrement dit, la monodromie des systèmes (KZ_n) provient d'une seule algèbre, ici $U\mathfrak{g}[[h]]$ munie de Φ_{KZ} et R_{KZ}, tout comme les représentations "quantiques" de B_n proviennent de l'algèbre enveloppante quantique $U_h\mathfrak{g}$ munie de R_h (dans ce dernier cas, l'élément correspondant à Φ_{KZ} est trivial, i.e. égal à $1 \otimes 1 \otimes 1$). Il est à noter que le système (KZ_2) force R_{KZ} à être égal à

$$R_{KZ} = e^{ht/2} \tag{3.2}$$

tandis que le système (KZ_3) détermine Φ_{KZ}. La forme de Φ_{KZ} est trop compliquée pour être donnée ici. Contentons-nous de dire que Φ_{KZ} est une série formelle dépendant de $t_{12} = t \otimes 1$ et de $t_{23} = 1 \otimes t$ et que ses premiers termes sont

$$\Phi_{KZ} = 1\otimes 1\otimes 1 + \frac{1}{24}[t_{12}, t_{23}]h^2 + \frac{\zeta(3)}{(2\pi i)^3}([[t_{12}, t_{23}], t_{23}] - [t_{12}, [t_{12}, t_{23}]])h^3 + \dots \tag{3.3}$$

Les coefficients suivants ont tous une interprétation arithmétique liée à la fonction zêta de Riemann.

3.2. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit d'établir que les catégories tensorielles formées d'une part par les $U_h\mathfrak{g}$-modules et d'autre part par les $U\mathfrak{g}[[h]]$-modules munis des isomorphismes d'associativité et de commutativité induits par Φ_{KZ} et R_{KZ} sont équivalentes. C'est ce que Drinfeld fait en trois étapes.

La première relève de la théorie classique des déformations d'algèbres : en effet, la nullité des groupes de cohomologie H^1 et H^2 d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ implique qu'il existe un isomorphisme K-linéaire

$$\alpha : U_h\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g}[[h]]$$

unique à conjugaison près. Cet isomorphisme (non explicite) permet de transporter toutes les structures de $U_h\mathfrak{g}$ sur $U\mathfrak{g}[[h]]$, y compris la R-matrice universelle R_h. Jusque là, on n'utilise de l'algèbre enveloppante quantifiée que son existence.

La deuxième étape utilise de manière essentielle la relation non triviale (2.2). En se servant aussi de (1.1), on se ramène à $R_{KZ} = e^{ht/2}$.

Il nous reste à nous concentrer sur l'élément Φ_{KZ}. Les transformations précédentes nous amènent à la donnée $(U\mathfrak{g}[[h]], \Phi, R_{KZ})$ où Φ est un élément non précisé de $U\mathfrak{g}^{\otimes 3}[[h]]$. Il s'agit de montrer que la catégorie tensorielle tressée correspondante est équivalente à celle de la donnée $(U\mathfrak{g}[[h]], \Phi_{KZ}, R_{KZ})$. Là encore, la solution est donnée par la théorie de la déformation. En effet, la différence $\Phi - \Phi_{KZ}$ est de la forme

$$\Phi - \Phi_{KZ} \equiv \varphi h^n \qquad \text{modulo}\, h^{n+1}$$

pour un entier $n \geq 1$ et un élément $\varphi \in U\mathfrak{g}^{\otimes 3}$. On montre que φ est un 3-cocycle pour le cobar-complexe de la cogèbre $U(\mathfrak{g})$. Contrairement à ce qui se passe dans la première étape, le groupe de cohomologie H^3 correspondant n'est pas nul. Mais on peut le calculer explicitement en utilisant le fait que $U(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $S(\mathfrak{g})$ comme cogèbre : $H^3 \cong \Lambda^3\mathfrak{g}$. Le cocycle φ s'envoie sur 0 *via* cet isomorphisme. C'est donc un cobord, ce qui permet de l'éliminer.

On trouvera les détails de la démonstration du théorème dans [Dr1] [Dr2] et dans le chapitre XIX de [Ka].

RÉFÉRENCES

[**Dr0**] V.G. DRINFELD. — *Quantum groups*, Proc. I.C.M. Berkeley 1986, t. **1**, 1987, p. 798–820.

[**Dr 1**] V.G. DRINFELD. — *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J., t. **1**, 1990, p. 1419–1457.

[**Dr 2**] V.G. DRINFELD. — *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal* $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J., t. **2**, 1991, p. 829–860.

[**Ji**] M. JIMBO. — *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Letters Math. Phys., t. **10**, 1985, p. 63–69.

[**Ka**] C. KASSEL. — *Quantum groups,* à paraître dans *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag.

[**KZ**] V.G. KNIZHNIK, A.B. ZAMOLODCHIKOV. — *Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions*, Nucl. Physics B 247, 1984, p. 83–103.

[**Ko**] T. KOHNO. — *Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. **37**, 1987, p. 139–160.

[**Ro**] M. ROSSO. — *Analogue of PBW theorem and the universal R-matrix for* $U_h\, \mathfrak{sl}(N+1)$, Commun. Math. Phys., t. **124**, 1989, p. 307–318.

Institut de Recherche Mathématique Avancée (U.R.A. n°1 du C.N.R.S),
Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes,
67084 Strasbourg cedex, France
Email : kassel@math.u-strasbg.fr