

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

JOEL FELDMAN

JACQUES MAGNEN

VINCENT RIVASSEAU

EUGENE TRUBOWITZ

## **Le programme constructif en physique du solide**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1994, tome 46*  
« Conférences de A. Beauville, A. Coste, J. Dubochet, A. Gramain, M. Holschneider, C. Itzykson, P. Le Tallec, V. Rivasseau, C. Weber », , exp. n° 5, p. 107-125

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1994\\_\\_46\\_\\_107\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1994__46__107_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Le programme constructif en physique du solide\*

Joel Feldman\*\* †

Department of Mathematics

University of British Columbia, Vancouver, B.C.

CANADA V6T 1Z2

Jacques Magnen†, Vincent Rivasseau†

Centre de Physique Théorique, CNRS UPR 14

Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex

Eugene Trubowitz

Mathematik

ETH-Zentrum

CH-8092 Zürich, SWITZERLAND

Résumé Les méthodes de théorie constructive des champs et de groupe de renormalisation appliquées à la théorie BCS en physique du solide, doivent permettre un contrôle rigoureux complet de l'état supraconducteur, au moins en dimension deux d'espace. Les conjectures correspondantes sont explicitées ainsi que les étapes principales du programme correspondant.

---

\* Conférence donnée par V. Rivasseau

\*\* Recherche en partie financée par le Natural Sciences and Engineering Research Council du Canada, par le Schweizerischer Nationalfonds zur Forderung der wissenschaftlichen Forschung, et par le Centre National de la Recherche Scientifique

† Recherche en partie financée par le Forschungsinstitut für Mathematik, Zürich

## I. Introduction

Le programme constructif en physique du solide consiste à appliquer les méthodes de théorie constructive des champs et de groupe de renormalisation afin de contrôler rigoureusement (donc pas seulement au niveau perturbatif) le comportement à longue distance d'un gaz de fermions de densité finie, en interaction et à température nulle.

L'outil du groupe de renormalisation tel qu'il avait été forgé par Wilson ne s'applique pas directement à ce type de problèmes parce que la singularité du propagateur libre n'est pas ponctuelle mais étalée sur une surface, la surface de Fermi. Par conséquent pour introduire les séries d'échelles de longueur typiques du groupe de renormalisation il ne suffit pas de faire une transformation de bloc-spin naïve, mais il faut réellement définir des "tranches de moments" autour de la surface de Fermi; pour la même raison la structure des contretermes est plus complexe; il ne suffit pas en particulier de renormaliser à l'aide de contre-termes locaux. C'est pourquoi les outils nécessaires au moins au niveau perturbatif ont été mis au point seulement dans la deuxième moitié des années 80 [FT1-2][BG].

Le groupe de renormalisation qui permet d'élucider complètement la renormalisation perturbative a été aussi transformé en un outil non-perturbatif permettant la construction rigoureuse de modèles juste renormalisables ([R] et références). Il est donc naturel de se poser la question du contrôle complet, non-perturbatif des modèles de la physique du solide. Nous allons décrire plus particulièrement le programme constructif qui vise à établir les propriétés à longue distance d'un gaz d'électrons en dimension 2 ou 3, dans le cas simple d'une interaction faible, attractive, à courte portée. Une telle interaction modélise dans la théorie BCS le couplage des électrons par l'intermédiaire de phonons du réseau cristallin. L'état fondamental d'un tel système est supraconducteur: il présente une brisure spontanée non-perturbative de la symétrie continue correspondant à la conservation du nombre d'électrons.

Nous ne discuterons pas ici le cas de la physique du solide en dimension 1 d'espace, donc 2 d'espace-temps, pour lequel la phase supraconductrice n'existe pas puisqu'il n'y a pas de brisure de symétrie continue en dimension 2 (Mermin-Wagner). Les méthodes rigoureuses spécifiques à la dimension 1 font appel au caractère exactement soluble des modèles [M]. Le programme constructif correspondant est développé par l'équipe italienne de G. Gallavotti et al. [BG].

Notons enfin que les méthodes mathématiques développées pour l'étude de la théorie BCS devraient avoir un champ d'application très large en matière condensée (suprafluidité, localisation...).

## II. Le formalisme et les conjectures

Les théories de fermions en dimension  $d$  d'espace peuvent être décrites à température finie par une théorie des champs à temps imaginaire (appelée théorie Euclidienne) mais qui ne possède pas l'invariance euclidienne complète parce qu'en physique du solide on travaille dans l'approximation non-relativiste. La condition de température finie s'exprime par une taille finie de la direction "temps imaginaire", inverse de la température, avec une condition au bord périodique. La limite de température nulle correspond à une limite thermodynamique dans l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Les fonctions de corrélation Euclidiennes sont définies par

$$\langle \prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i} \rangle = \frac{\int (\prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i}) e^{\mathcal{A}(\psi, \bar{\psi})} \prod_{k, \sigma} d\psi_{k, \sigma} d\bar{\psi}_{k, \sigma}}{e^{\mathcal{A}(\psi, \bar{\psi})} \prod_{k, \sigma} d\psi_{k, \sigma} d\bar{\psi}_{k, \sigma}} \quad (\text{II.1})$$

où l'action est

$$\mathcal{A}(\psi, \bar{\psi}) = -\lambda \mathcal{I}(\psi, \bar{\psi}) - \delta\mu(\lambda, \mu) \int dk \bar{\psi}_k \psi_k - \int dk (ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})) \bar{\psi}_k \psi_k \quad (\text{II.2})$$

Explicitons ces formules. Les champs fermioniques sont des vecteurs à deux composantes  $\psi_{k, \downarrow}$  et  $\psi_{k, \uparrow}$  reflétant les deux valeurs du spin de l'électron, où  $k = (k_0, \mathbf{k}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ . Ces champs anticommulent, et la mesure  $\prod_{k, \sigma} d\psi_{k, \sigma} d\bar{\psi}_{k, \sigma}$  est un produit sur toutes les composantes d'une mesure de Grassmann ordinaire (de "Lebesgue"). La fonction  $\epsilon(\mathbf{k})$  est l'énergie d'un électron isolé de moment  $k$ , de masse  $m$ , translatée d'un terme de potentiel chimique  $\mu$  qui contrôle la densité du système. Dans notre approximation non-relativiste et si l'on néglige le potentiel périodique dû au réseau cristallin on obtient l'énergie cinétique ordinaire (approximation du "jellium isotrope")

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \quad (\text{II.3})$$

On observe que dans l'action  $\mathcal{A}$  le coefficient total  $\mu + \delta\mu(\lambda, \mu)$  a été délibérément séparé en deux parties. Le terme  $\delta\mu(\lambda, \mu)$  est en fait un contre terme qui renormalise le potentiel chimique. C'est une série dans la constante de couplage  $\lambda$ , qui est nécessaire pour

que le développement perturbatif des fonctions de corrélation autour de l'origine  $\lambda = 0$  soit bien défini.

La partie non-triviale (non-quadratique) de l'action est donnée par le terme d'interaction  $\mathcal{I}$ . Le cas le plus simple est celui d'une interaction quartique locale ou à courte portée. Remarquons que pour des électrons de spin 1/2 une interaction locale ne peut de toute façon pas avoir un degré plus élevé que 4 à cause de la propriété d'anticommutation des champs. Une interaction à courte portée suffisamment décroissante sera équivalente à une interaction locale du point de vue des propriétés à longue distance. C'est physiquement le cas de l'interaction entre électrons due à un échange de phonons, qui est dominante dans la théorie BCS. Seules les interactions à longue portée peuvent donner lieu à des comportements réellement différents, mais que nous n'aborderons pas ici. Nous considérons donc le cas

$$\mathcal{I} = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 I(x_1, x_2, x_3, x_4) \psi(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \bar{\psi}(x_4) \quad (\text{II.4})$$

où le noyau  $I$  est invariant par translation:  $I(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{I}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1)$ , par rotations spatiales, et très régulier à l'infini. On peut demander par exemple que  $\bar{I}$  appartienne à un espace de Sobolev de degré suffisamment élevé.

L'équation (II.1) est pour l'instant formelle et pour la rendre bien définie il nous faut introduire un cutoff infrarouge. Avant de faire cela il est d'usage commode en théorie constructive de combiner à la mesure "de Lebesgue" anticommutable la partie quadratique (indépendante de  $\lambda$ ) de l'action de façon à obtenir une mesure de Grassmann Gaussienne,  $d\mu_C(\psi_{k,\sigma}, \bar{\psi}_{k,\sigma})$ , de propagateur formel

$$C(x, y) = \int dk \frac{1}{ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})} e^{ik(x-y)} \quad (\text{II.5})$$

Rappelons qu'une telle mesure de Grassmann Gaussienne peut être définie par la collection de ses moments:

$$\int \prod_{j=1}^n \psi_{i_j} \bar{\psi}_{\bar{i}_j} d\mu_C = \det[C_{i_j, \bar{i}_k}] \quad (\text{II.6})$$

On aura alors

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i} \right\rangle = \frac{\int (\prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i}) e^{-\lambda \mathcal{I}(\psi, \bar{\psi}) - \delta \mu(\lambda, \mu)} \int dk \bar{\psi}_k \psi_k d\mu_C(\psi_{k,\sigma}, \bar{\psi}_{k,\sigma})}{e^{-\lambda \mathcal{I}(\psi, \bar{\psi}) - \delta \mu(\lambda, \mu)} \int dk \bar{\psi}_k \psi_k d\mu_C(\psi_{k,\sigma}, \bar{\psi}_{k,\sigma})} \quad (\text{II.7})$$

Pour partir d'une formule bien définie et non pas formelle, il nous faut introduire des régularisations. Il est pratique d'introduire d'abord une régularisation ultraviolette. On remplacera donc par exemple le propagateur en introduisant un cutoff ultraviolet sous la forme d'une fonction de coupure  $\eta \in C_0^\infty$ , qui vaut 1 pour  $|k| \leq K$  et 0 pour  $|k| \geq 2K$ , où  $K$  est une constante donnée. Ce point n'est essentiel ni du point de vue physique (en effet l'approximation non-relativiste n'a pas de sens pour les grandes valeurs du moment), ni du point de vue mathématique (la théorie ayant un bon comptage de puissances du côté ultraviolet).

Le cutoff "infrarouge" est un peu plus délicat à définir. Remarquons que les propriétés à longue distance sont gouvernées par la singularité du propagateur sur la "surface de Fermi" c'est à dire pour  $k_0 = 0, \epsilon(\mathbf{k}) = 0$ . Cette singularité est intégrable car de codimension 2. Donc le noyau du propagateur avec cutoff ultraviolet est bien défini en toute dimension:

$$C_\eta(x, y) = \int dk \frac{\eta(k)}{ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})} e^{ik(x-y)} \quad (\text{II.8})$$

Pour analyser le comportement de la théorie au voisinage de la singularité du propagateur, on veut utiliser une analyse de type groupe de renormalisation. Il faut donc découper la singularité à l'aide d'une échelle de fonctions. On pose pour  $j \in -\mathbb{N}$  (entier négatif),  $\eta_j(k_0, \mathbf{k}) = \eta((k_0^2 + \epsilon(\mathbf{k})^2)M^{-2j})$ , où  $M$  est un nombre, raison d'une progression géométrique arbitraire, par exemple  $M = 2$ .

La théorie avec cutoff infrarouge d'ordre  $M^j$  consiste à remplacer le propagateur (II.8) par

$$C_{\eta,j}(x, y) = \int dk \frac{\eta(k)(1 - \eta_j(k))}{ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})} e^{ik(x-y)} \quad (\text{II.9})$$

Enfin il est commode d'introduire un cutoff de volume, c'est à dire une boîte  $\Lambda \subset \mathbb{R}^{d+1}$ , par exemple un cube de côté  $L$ . Le propagateur et l'interaction sont restreints à ce volume, en remplaçant  $C_{\eta,j}$  par

$$C_{\eta,j,\Lambda}(x, y) = \chi_\Lambda(x) C_{\eta,j}(x, y) \chi_\Lambda(y) \quad (\text{II.10})$$

où  $\chi_\Lambda$  est la fonction caractéristique de  $\Lambda$ . De même l'interaction  $\mathcal{I}$  est remplacée par une interaction à volume fini:

$$\mathcal{I}_\Lambda = \int_\Lambda dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 I(x_1, x_2, x_3, x_4) \psi(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \bar{\psi}(x_4) \quad (\text{II.11})$$

En outre on pose

$$\delta\mu_\Lambda(\lambda, \mu) = \delta\mu(\lambda, \mu) \int_\Lambda dx_1 \psi(x_1) \bar{\psi}(x_1) \quad (\text{II.12})$$

Il est vrai que cutoff infrarouge et cutoff de volume font un peu double emploi, et il serait possible d'utiliser par exemple uniquement le cutoff de volume avec condition périodiques; les moments sont alors quantifiés sur le réseau  $2\pi L^{-1} \mathbb{Z}^{d+1}$ , et il suffit d'étudier la limite lorsque  $L \rightarrow \infty$  en enlevant directement dans le propagateur les "modes singuliers" c'est à dire les valeurs de ce réseau (en nombre fini) telles que  $k_0 = 0$ ,  $\epsilon(\mathbf{k}) = 0$ . En fait il est plus commode et naturel de travailler avec les deux cutoffs et de les enlever simultanément par exemple en imposant  $L = M^{-j}$ . La limite à étudier sera alors simplement  $j \rightarrow -\infty$ , et implique la limite thermodynamique  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ .

Il semblerait donc naturel de considérer les fonctions euclidiennes avec cutoff:

$$\langle \prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i} \rangle_j = \frac{\int (\prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i}) e^{-\lambda \mathcal{I}_\Lambda(\psi, \bar{\psi}) - \delta\mu_\Lambda(\lambda, \mu)} d\mu_{C_{\eta, j, \Lambda}}(\psi_{k, \sigma}, \bar{\psi}_{k, \sigma})}{e^{-\lambda \mathcal{I}_\Lambda(\psi, \bar{\psi}) - \delta\mu_\Lambda(\lambda, \mu)} d\mu_{C_{\eta, j, \Lambda}}(\psi_{k, \sigma}, \bar{\psi}_{k, \sigma})} \quad (\text{II.13})$$

où  $\Lambda = [-M^{-j}, M^{-j}]^{d+1}$ . La condition de renormalisation, c'est à dire le contre terme  $\delta\mu_\Lambda(\lambda, \mu)$  est choisi comme une série entière telle que, à tous ordres en  $\lambda$

$$\Sigma(k, \mu\lambda)|_{k_0=0, |\mathbf{k}|=\sqrt{2m\mu}} = 0 \quad (\text{II.14})$$

où  $\Sigma$ , la self-énergie est reliée à la fonction à deux points  $G_2$  par  $G_2 = \Sigma \sum_{n=0}^{\infty} (C\Sigma)^n$  [FT1-2]. (Remarquons l'analogie avec une condition de renormalisation de masse en théorie des champs).

Pour définir le numérateur et le dénominateur de (II.13) il suffit alors de développer les exponentielles  $e^{-\lambda \mathcal{I}_\Lambda(\psi, \bar{\psi}) - \delta\mu_\Lambda(\lambda, \mu)}$  en séries entières et d'appliquer les règles d'intégration (II.6). On obtient ainsi une série formée de déterminants. Il est alors facile, par des règles de comparaison explicites des lignes et colonnes de ces déterminants (voir par exemple [FMRT1], de prouver que ce numérateur et ce dénominateur sont tous deux des fonctions entières de  $\lambda$ . Le quotient (II.13) est donc une fonction méromorphe de  $\lambda$  dans le plan complexe, entièrement définie par son développement perturbatif, c'est à dire sa série de Taylor à l'origine.

En fait la limite de (II.13) est instable, c'est à dire par exemple pas unique selon les conditions au bord, parce que l'état stable associé à cette limite brise certaines symétries

du système. Dans le cas le plus simple (théorie BCS ordinaire, que nous allons maintenant considérer), la seule symétrie brisée est la symétrie

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta} \bar{\psi} \quad (\text{II.15})$$

avec pour quantité conservée correspondante l'opérateur nombre de particules (dans le formalisme Hamiltonien associé). Pour étudier la limite thermodynamique d'un tel système dans une phase à symétrie brisée, on sait qu'il est commode d'introduire un "champ magnétique infinitésimal" pour sélectionner un état pur particulier. Nous définissons donc

$$R = r \int dk (\bar{\psi}_{k,|} \bar{\psi}_{-k,|} + \psi_{-k,|} \psi_{k,|}) \quad (\text{II.16})$$

et la limite thermodynamique que nous allons étudier sera construite en ajoutant le terme  $R$  à l'action et en faisant tendre  $r$  vers 0. Les fonctions associées sont alors

$$\begin{aligned} S_{n,r,j} &= \langle \prod_{i=1}^{n_1} \psi_{p_i, \sigma_i} \prod_{i=1}^{n_2} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i} \rangle_{r,j} \\ &= \frac{\int (\prod_{i=1}^n \psi_{p_i, \sigma_i} \bar{\psi}_{q_i, \sigma'_i}) e^{-\lambda \mathcal{I}_\Lambda(\psi, \bar{\psi}) - \delta \mu_\Lambda(\lambda, \mu) + R} d\mu_{C_{n,j,\Lambda}}(\psi_{k,\sigma}, \bar{\psi}_{k,\sigma})}{e^{-\lambda \mathcal{I}_\Lambda(\psi, \bar{\psi}) - \delta \mu_\Lambda(\lambda, \mu) + R} d\mu_{C_{n,j,\Lambda}}(\psi_{k,\sigma}, \bar{\psi}_{k,\sigma})} \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

où  $n = (n_1, n_2)$ . Notons en effet que le nombre de sources  $\psi$  n'est plus nécessairement égal au nombre de sources  $\bar{\psi}$  à cause du terme  $R$ .

Nous dirons que l'interaction  $\mathcal{I}$  est de type "BCS ordinaire" si le développement du noyau  $\hat{I}$  (transformée de Fourier de  $I$ ) satisfait à certaines conditions à moment de transfert nul et au voisinage de la surface de Fermi. Plus précisément soit  $k'(k) = (0, \sqrt{2m\mu} \frac{k}{c(k)})$  la projection d'un moment  $k \in \mathbb{R}^{d+1}$  sur la surface de Fermi. Le noyau réduit  $\hat{I}(t', -t', s', -s')$  est une fonction de deux moments sur la surface de Fermi; par invariance par rotation spatiale de  $I$ , l'un de ces moments peut être ramené à une direction donnée. C'est donc une fonction définie sur la surface de Fermi, et c'est cette fonction que l'on analyse en harmoniques sphériques  $\pi_k$ . Soit

$$\hat{I}(t', -t', s', -s') = \sum_k \lambda_k \pi_k(t', s') \quad (\text{II.18})$$

le développement correspondant. On suppose  $\lambda_0 < 0$ ,  $|\lambda_0| > |\lambda_k| \kappa^{-1}$ ,  $0 < \lambda < \kappa$  et  $\kappa$  suffisamment petit. L'interaction est alors dite du type BCS ordinaire.

**Conjecture** En dimension  $d = 2, 3$ . pour une interaction du type BCS ordinaire comme définie ci-dessus la limite des fonctions de corrélation  $S_n = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow -\infty} S_{n,r,j}$  existe au sens des distributions (en moments) et le comportement asymptotique à longue distance de leur transformées de Fourier (en espace) peut être déterminé systématiquement. Certaines fonctions décroissent exponentiellement et d'autres non. Plus précisément:

(i) Il existe une fonction de  $\lambda$ , appelée "gap BCS" et notée  $\Delta$ , se comportant à petit  $\lambda$  comme  $\Delta(\lambda) \simeq \text{const } e^{-\text{const}/\lambda}$ , et telle que

$$\langle \psi_{k' \uparrow} \psi_{-p \downarrow} \rangle = \langle \psi_{k' \downarrow} \psi_{-p \uparrow} \rangle = -\frac{(2\pi)^{d+1}}{\Delta} \delta(k' - p) \quad (\text{II.19})$$

(ii) Pour  $n$  impair, la transformée de Fourier des fonctions connexes à  $2n$  points  $S_n^c$  décroît exponentiellement avec un taux au moins  $(1 - \epsilon)\Delta$  (pour tout  $\epsilon > 0$  fixé)

(iii) Pour  $n$  pair la transformée de Fourier des fonctions connexes à  $2n$  points  $S_n^c$  décroît seulement polynomialement dans certains canaux, et non pas exponentiellement. En particulier il existe des constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$\lim_{q \rightarrow 0} (c_1 q_0^2 + c_2 \mathbf{q}^2) \int ds dt dp \langle \bar{\psi}_{s-q \downarrow} \bar{\psi}_{-s \downarrow} - \psi_{-s+q \downarrow} \psi_{s \downarrow}; \bar{\psi}_{t-p \downarrow} \bar{\psi}_{-t \downarrow} - \psi_{-t+p \downarrow} \psi_{t \downarrow} \rangle = -1 \quad (\text{II.20})$$

Cette conjecture exprime le fait que le système se trouve dans une phase à symétrie brisée (i), et que l'espace de Hilbert est la somme directe de sous-espaces pairs et impairs, la restriction du Hamiltonien au sous-espace impair ayant un "gap"  $\Delta$  entre l'état fondamental et le reste du spectre (ii). Un tel "gap" n'existe pas dans le secteur pair, comme on s'y attend d'après le théorème de Goldstone qui prédit l'existence d'une particule de masse nulle associée à la brisure de la symétrie continue  $U(1)$  (II.15), appelée boson de Goldstone (iii), (II.20).

Les taux précis de décroissance des fonctions dans le secteur pair dépendent des fonctions considérées et de la dimension; ce point est précisé dans la prochaine section.

Une démonstration complète de cette conjecture est en cours d'élaboration en dimension  $d = 2$ . Par contre en dimension  $d = 3$  bien que la conjecture ne soit que la mise en forme précise de la théorie BCS standard à laquelle adhèrent tous les physiciens, il existe une difficulté mathématique majeure qui nous empêche jusqu'à présent d'envisager une démonstration complète.

La théorie BCS standard est une théorie difficile puisqu'elle contient une brisure de symétrie continue et des effets non-perturbatifs (voir le comportement de  $\Delta$  ci-dessus). Cela explique que sa construction explicite soit une oeuvre de longue haleine. Notons cependant qu'à partir des résultats déjà obtenus en dimension deux [FMRT1] on peut obtenir aussi des théorèmes plus simples mais tout à fait non-triviaux, comme par exemple la première construction d'un liquide de Fermi en interaction, lorsque la surface de Fermi est "anisotrope" et non-invariante par parité (par exemple en présence de champs magnétiques), de façon à empêcher la formation de paires de Cooper [FKLT].

### III. Les étapes techniques de la démonstration

Sans entrer trop dans les détails, essayons d'indiquer brièvement dans cette section la stratégie pour établir la conjecture de la section précédente.

L'étude de la théorie est divisée en trois régimes, chacun donnant lieu à une théorie des perturbations différente et devant être contrôlé constructivement (donc non-perturbativement).

Le premier régime va de l'échelle du cutoff ultraviolet à une échelle un peu inférieure au gap. Dans ce régime l'interaction reste toujours faible. La physique est dominée par la singularité du propagateur fermionique libre à la surface de Fermi. Il faut, pour l'analyse du type groupe de renormalisation, couper le propagateur en "tranches de moments" autour de la surface de Fermi. Le propagateur de la  $j$ -ième tranche est

$$C_{\eta}^j(x, y) = C_{\eta, j}(x, y) - C_{\eta, j+1}(x, y) = \int dk \frac{\eta(k)(\eta_{j+1}(k) - \eta_j(k))}{ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})} e^{ik(x-y)} \quad (\text{III.1})$$

Nous allons considérer dans le premier régime seulement la somme des tranches jusqu'à une certaine valeur  $J$ , c'est à dire le propagateur

$$C_{\eta, J}(x, y) = \sum_{j=0}^J C_{\eta}^j(x, y) \quad (\text{III.2})$$

où  $M^J$  est une échelle un peu inférieure à  $\Delta$ , par exemple  $M^J \simeq 100\Delta$ . Comme  $\Delta \simeq \text{const } e^{-\text{const}/\lambda}$ ,  $J$  est en fait une fonction de  $\lambda$  qui se comporte comme  $-\text{const}/\lambda$  à petit  $\lambda$ .

Par simple intégration par parties ce propagateur décroît à des échelles de longueur de l'ordre de  $M^{-j}$ . Donc lorsque  $j$  va de 0 à  $J$  on explore bien la physique à des échelles de longueur de plus en plus grandes, jusqu'à une échelle proche du gap. Le comptage de puissance correspondant est juste renormalisable à toute dimension, car la codimension de la singularité est toujours 2. Ceci est tout à fait différent de la théorie des champs habituelle. Le flot du groupe de renormalisation vers la surface de Fermi a été analysé perturbativement dans [FT2]. La renormalisation de la fonction à 4 points n'est nécessaire (et n'engendre donc un flot non-trivial) que pour la partie à moment de transfert nul. Dans le noyau réduit (II.18) correspondant, c'est l'ensemble des constantes de couplage  $\{\lambda_k\}$  qui possède un flot, mais dans l'approximation au premier ordre de la fonction beta, ces flots découplent et sont identiques pour chaque  $\lambda_k$ . Dans cette approximation, on a donc simplement pour les constantes effectives  $\lambda_k^j$  les équations aux différences finies

$$\lambda_k^{j-1} = \lambda_k^j + \beta(\lambda_k^j)^2 \quad . \quad (\text{III.3})$$

Les conditions de BCS ordinaire  $\lambda_0 < 0$ ,  $|\lambda_0| > |\lambda_k|\kappa^{-1}$ ,  $0 < \lambda < \kappa$  et  $\kappa$  suffisamment petit, correspondent physiquement à une interaction attractive et assurent que la constante effective  $\lambda_0^j$  domine toujours les autres et diverge lorsque  $j \rightarrow -\infty$ .\*

Pour confirmer cette analyse d'une manière constructive, il faut pouvoir prouver que les contributions de grands ordres (qui pourraient, par exemple, modifier les flots prévus par l'approximation (III.3)) sont bien négligeables. Pour ce faire le résultat technique clé est une borne inférieure uniforme en  $j$  sur le rayon de convergence  $R_j$  de la série perturbative de la théorie limitée à la  $j$ -ième tranche, donc avec propagateur  $C_\eta^j$ . Nous avons démontré

---

\* On pourrait croire qu'en choisissant  $\lambda_0 > 0$ , c'est à dire une interaction physiquement répulsive, on aurait liberté asymptotique infrarouge et donc un comportement proche de la théorie libre (liquide de Fermi). Il n'en est rien, car le système infini des constantes de couplages  $\lambda_k$  n'est découplé qu'au premier ordre. Le véritable système est donc génériquement toujours instable (instabilités de Kohn-Luttinger). Il ne semble donc pas possible de construire des liquides de Fermi en interaction (à moins d'empêcher directement le flot de la fonction à moment de transfert nul par des conditions portant sur la forme de la surface de Fermi [FKLT]).

une telle borne  $R_j \geq \text{const}$  en dimension 2 [FMRT1] mais pas en dimension 3. Ceci peut surprendre puisque le comptage de puissances de la théorie, comme nous l'avons remarqué, est indépendant de la dimension. Mais l'argument constructif ne peut reposer que sur une élaboration du principe de Pauli. Les graphes aux grands ordres sont en effet trop nombreux pour que la somme des valeurs absolues de leurs amplitudes converge: c'est le phénomène habituel de la divergence des séries perturbatives en théorie des champs. Le rayon de convergence est toutefois fini pour une théorie fermionique à cause des compensations de signe entre les graphes: la série des perturbations s'écrit en terme des déterminants (II.6). Si l'on cherche à mettre en évidence explicitement ces compensations par des inégalités (Gram, Hadamard) ou des compensations explicites de lignes et de colonnes qui se ressemblent dans le déterminant, on aboutit toujours au même type de résultat: il y a forte décroissance dans le nombre de champs par volume unité de l'espace de phase et donc tout se passe en pratique comme s'il n'y avait qu'un nombre fini de fermions (un...) pour chaque volume unité de l'espace de phase, ce qui limite effectivement la taille des déterminants possibles et fait converger la série perturbative. Ce "principe de Pauli" appliqué à notre problème fait surgir une difficulté inconnue en théorie des champs: le nombre de volumes unité d'espace de phase pour une tranche d'épaisseur  $M^j$  autour de la surface de Fermi, dans un cube de côté  $M^{-j}$  est grand, de l'ordre de  $M^{-(d-1)j}$ , et dépend de la dimension. Il n'est donc pas étonnant que contrairement à l'analyse perturbative, l'analyse constructive du groupe de renormalisation autour de la surface de Fermi soit plus difficile en dimension plus élevée.

Pour exploiter le principe de Pauli, cette analyse constructive nécessite donc un second découpage: les tranches de moments (III.1) sont coupées en  $N = M^{-(d-1)j}$  cellules que nous avons appelées secteurs. Ces secteurs fonctionnent un peu comme des "couleurs" dans une théorie des champs. D'autre part dans le bilan ("comptage de puissances") d'un vertex avec des couleurs fixées, il faut compter le volume de son intégration dans une boîte de taille  $M^{-j}$ , et le poids de ses 4 demi-propagateurs donc de deux propagateurs complets à secteurs fixés. Ce bilan donne donc  $M^{-(d+1)j} M^{2dj} = M^{(d-1)j} = 1/N$  par vertex. Remarquons que c'est là le facteur naturel que l'on introduit dans la constante de couplage d'une théorie des champs à  $N$  couleurs, lorsque l'on veut étudier la limite  $N$  grand, et faire un développement en  $1/N$  [FMRT2].

En dimension deux, la loi de conservation du moment nous dit que quatre moments de même longueur et de somme nulle forment un losange dont les cotés sont parallèles deux à deux. Le vertex ne couple donc que deux "couleurs" à la fois, comme dans une théorie des champs vectorielle standard dont l'interaction est  $(\vec{o}^2)^2 = \sum_{i,j=1}^N \phi_i^2 \phi_j^2$ . Comme nous l'avons remarqué, le poids du vertex est d'autre part le bon poids pour que la limite  $N \rightarrow \infty$  soit finie. Ces remarques encourageantes sont à la base de notre borne uniforme  $R_j \geq \text{const}$  [FMRT1], bien qu'il existe quelques pièges techniques: en particulier le cas des losanges presque dégénérés oblige à faire en fait une analyse avec  $M^{-j/2}$  secteurs anisotropes (allongés le long de la surface de Fermi) et non pas  $M^{-j}$  secteurs isotropes.

En dimension 3 la loi de conservation des moments ne suffit pas à rendre le vertex planaire. En moyenne c'est "2.5 couleurs" qui peuvent être couplées par un vertex général: deux couleurs plus un angle arbitraire de torsion, qui compte comme une "demi" couleur, puisqu'une couleur est définie par une cellule sur la sphère donc par deux angles d'Euler. La structure du vertex n'est donc pas factorisée comme dans une théorie des champs vectorielle. Notre meilleure borne pour l'instant est  $R_j \geq M^{j/2}$  (en utilisant des secteurs anisotropes). Cette borne ne permet pas le contrôle du flot du groupe de renormalisation suffisamment longtemps pour arriver au deuxième régime indiqué ci-dessous (formation des paires de Cooper), puisque le flot croît seulement logarithmiquement. (Pour ce faire il faudrait au moins  $R_j \geq \text{const}/j$ .) Après des années d'efforts sans succès, on peut dire qu'il y a là une difficulté de fond, mathématiquement bien posée et physiquement passionnante, encore largement méconnue à la fois des physiciens et des mathématiciens. Faute de mieux nous projetons en particulier une analyse numérique de ce problème, qui pourrait être éclairante.

Une fois le premier régime contrôlé, le deuxième régime va de l'échelle un peu inférieure au gap (par exemple  $M^j \simeq 100\Delta$ ) à une échelle un peu supérieure (par exemple  $M^j \simeq \Delta/100$ ). Dans ces échelles de longueur, la théorie n'est plus faiblement couplée au sens ordinaire puisque la valeur de  $\lambda_0$  effective a dépassé, disons,  $1/100$ . Comment est-il donc possible de contrôler encore la théorie? On s'attend de toute façon à une difficulté de fond avec la série perturbative ordinaire, puisque Le paramètre  $\Delta$  est non-perturbatif. Or le seul outil constructif ce jour pour traiter les phénomènes non-perturbatifs est le développement en  $1/N$  des théorie vectorielles à  $N$  grand (voir par exemple [KMR]). Ce qui est enthousiasmant dans

la théorie BCS, c'est que précisément cet unique outil connu s'applique tout naturellement à la situation [FMRT3]. En effet n'oublions pas que comme nous l'avons déjà indiqué, le noyau effectif qui a divergé par le groupe de renormalisation est une interaction à moment de transfert nul du type (II.18) [FT2].\* Une telle interaction à moment de transfert nul, ne couple bien sûr que deux directions de moments à la fois, donc que deux couleurs dans le langage ci-dessus. Cette partie de la théorie est donc parfaitement adaptée à un développement en  $1/N$ , où  $N = M^{-(d-1)J} \simeq \text{const } \epsilon^{\text{const}/\lambda}$  est toujours très grand pour  $\lambda$  initial petit. Le paramètre  $N$  dont il s'agit ici n'est donc pas un paramètre ad hoc comme d'habitude, et on pourrait dire qu'il est engendré dynamiquement, tout comme  $\Delta$ .

Remarquons que cet argument n'est pas semblable au précédent. Il s'applique à toute dimension et non pas seulement en dimension 2, et n'a rien à voir avec la conservation des moments. Pour résumer, disons que pour toute dimension le flot du groupe de renormalisation dans la théorie BCS fait émerger une interaction effective qui est du type modèle vectoriel à grand nombre de composantes, alors qu'à deux dimensions par suite des lois de conservation des moments toute interaction est dès le départ nécessairement de ce type [FMRT2-3].

Pour contrôler de manière constructive le développement en  $1/N$  qui commande ce deuxième régime, on utilise comme d'habitude la méthode du champ intermédiaire qui en physique du solide porte le doux nom de transformation de Hubbard-Stratonovic. c'est à dire que l'on remplace le vertex quartique (II.18) à quatre fermions par deux vertex à deux fermions et un boson. L'algèbre correspondante n'est pas triviale: comme les fermions ont deux composantes dues au spin, le champ bosonique a aussi deux composantes. L'algèbre se simplifie en groupant les deux composantes de spin dans le champ fermionique à deux composantes de Nambu

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2), \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2) \quad \psi_{k,1} = \psi_{k,\uparrow}; \psi_{k,2} = \bar{\psi}_{-k,\downarrow}, \quad \bar{\psi}_{k,1} = \bar{\psi}_{k,\uparrow}; \bar{\psi}_{k,2} = \psi_{-k,\downarrow} . \quad (\text{III.4})$$

Le vertex effectif correspondant au terme quartique le plus divergent (paires de Cooper)

---

\* Le reste de l'interaction n'a pas évolué sous le groupe de renormalisation, et reste donc traitable comme dans le premier régime.

s'écrit alors simplement

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= \sum_{i=1,2} \int \rho_J(p) dp \left( \int ds \bar{\Psi}_{t+p/2} \sigma^i \Psi_{t-p/2} \right) \left( \int dt \bar{\Psi}_{s-p/2} \sigma^i \Psi_{s+p/2} \right) \\
&= \int d\mu_J(\gamma) e^{\int dx \Psi(x) \gamma(x) \Psi(x)} \quad (III.5)
\end{aligned}$$

où  $\sigma^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , désignent les matrices de Pauli;  $\rho_J$  est un cutoff qui limite le moment de transfert à des valeurs inférieures ou égales à  $M^J \simeq 100\Delta$ ;  $d\mu(\gamma)$  est une mesure gaussienne normalisée ultralocale avec cutoff  $\rho_J$  (donc de propagateur  $\hat{\rho}_J(x-y)$ ), et le champ  $\gamma$  à deux composantes est aussi un opérateur de composantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans la base des matrices  $\sigma^1$  et  $\sigma^2$ :  $\gamma = \gamma_1 \sigma^1 + \gamma_2 \sigma^2$ . Après intégration explicite du champ fermionique on obtient une mesure bosonique qui s'écrit

$$d\mu_J(\gamma) \det(1 - C_J \cdot \gamma) \quad (III.6)$$

où la partie du propagateur fermionique (II.6) qui correspond à la théorie effective à partir de l'échelle  $J$  s'écrit, dans le formalisme de Nambu

$$C_J = \int dk \frac{\eta_J(k)}{ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})\sigma^3} e^{ik(x-y)} \quad (III.7)$$

Le potentiel effectif pour un champ  $\gamma$  constant se calcule facilement à partir de (III.6). Il a la forme du "chapeau mexicain" donc l'extremum  $\gamma = 0$  est instable. Le minimum absolu, stable, correspond à la "gouttière"  $|\gamma| = \Delta \neq 0$ . La valeur moyenne de  $\gamma$  va être déterminée en définitive par le petit terme de brisure  $R$  (II.16). Supposons que ce terme favorise la direction  $\gamma_1$ . Nous aurons alors dans la limite thermodynamique correspondante, une mesure de Gibbs notée  $\langle \rangle_1$  pour laquelle  $\langle \gamma_1 \rangle_1 = \Delta \neq 0$ ,  $\langle \gamma_2 \rangle_1 = 0$ . Nous pouvons tenir compte de la translation de  $\gamma_1$  à sa valeur moyenne par la modification du propagateur fermionique (III.6) en

$$C_{J,\Delta} = \int dk \frac{\eta_J(k)}{ik_0 - \epsilon(\mathbf{k})\sigma^3 + \Delta\sigma^1} e^{ik(x-y)} \quad (III.8)$$

Ce propagateur est écranté, c'est à dire qu'il n'est plus singulier sur la surface de Fermi: il est à décroissance rapide avec taux  $\Delta^{-1}$ . A partir de l'échelle  $\Delta$  ce n'est donc plus la singularité de Fermi qui peut gouverner le comportement à longue distance, et on pourrait conclure naïvement qu'une analyse multi-échelles n'est plus nécessaire. C'est bien sûr faux

puisque le théorème de Goldstone nous dit que le spectre d'une théorie à symétrie continue brisée contient une particule de masse nulle. Le développement en  $1/N$  dont nous venons de parler n'est autre que le développement du déterminant (III.6):

$$\det(1 - C_{J, \gamma}) = e^{-\text{Tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (C_{J, \gamma})^k} \quad (\text{III.9})$$

et comme d'habitude (voir par exemple [KMR]) seuls les termes avec  $k \geq 3$  sont petits pour  $N \rightarrow \infty$ . Le terme linéaire en  $\gamma$  est absorbé si l'on veut dans la translation  $\gamma \rightarrow \gamma' + \Delta\sigma^1$  de passage au vrai minimum, mais le terme quadratique doit bel et bien être combiné à la mesure ultralocale  $d\mu_J$  et s'ajuste à elle exactement de manière à rendre le champ  $\gamma$  de masse nulle. L'identité exacte correspondante est bien sûr une identité de Ward due à la symétrie de la théorie.

Les propriétés à longue distance du champ  $\gamma$ , pour des distances supérieures disons à  $100\Delta^{-1}$ , relèvent donc d'un problème infrarouge qui pourrait à priori être non-trivial, et qui est en fait très semblable au contrôle constructif de la phase à basse température et symétrie brisée du modèle  $O(2)$  de mécanique statistique classique, c'est à dire d'un système de "rotateurs plans" en dimension  $d + 1 \geq 3$ . Nous savons que cette phase à symétrie brisée existe bien par des méthodes "soft" (borne infrarouge, prouvée par des inégalités de corrélation en échiquier [FSS]), mais ce n'est que récemment qu'une étude constructive de cette phase a été commencée [B].

Il y a donc là un troisième régime, dans lequel c'est le propagateur du champ  $\gamma$  (de masse nulle (donc incluant le terme  $k = 2$  dans (III.9)) qu'il convient de découper pour faire une analyse multi-échelle.

Les termes successifs du développement (III.9) pour  $k \geq 3$  forment un déterminant dit  $\det_3$ , que l'on peut penser comme une somme d'auto-interactions quasi locales de tous ordres pour le champ  $\gamma$ . Le caractère quasi local est dû au fait que le propagateur fermionique  $C_{J,\Delta}$  (III.8) décroît à l'échelle  $\Delta^{-1}$ , alors que nous considérons dans ce troisième régime des échelles beaucoup plus grandes. Rappelons que le comptage de puissances infrarouge d'une théorie bosonique de masse nulle dépend de la dimension, devenant de plus en plus difficile à basse dimension. Par exemple pour un champ bosonique  $\phi$  de masse nulle avec interaction  $\phi^4$  la dimension  $d + 1 = 4$  est marginale, et en dimension  $d = 2$ ,  $d + 1 = 3$  on a déjà un

problème non-renormalisable avec des points fixes non-triviaux. En fait ici la situation est bien meilleure que ce que le comptage de puissance naïf semblerait dire parce que les vertex effectifs de cette théorie sont régularisés à petit moments grâce à des identités de Ward qui sont la trace de la symétrie  $U(1)$  de la théorie. Si l'on tient compte de ces identités le comptage de puissances devient superrenormalisable du côté infrarouge jusqu'à la dimension critique  $d = 1$ ,  $d + 1 = 2$ , ce qui ne doit pas nous surprendre puisque c'est à cette dimension que le théorème de Mermin-Wagner nous dit que la phase à symétrie brisée n'existe plus.

Le contrôle du régime 3 repose donc sur les identités de Ward de la théorie. La version la plus simple de ces identités, correspondant au vide instable  $\gamma = 0$  est donnée dans [FMRT4]. Pour la théorie translatée correspondant au véritable vide il faut une version un peu modifiée de ces identités, en cours d'élaboration.

Le boson de Goldstone correspond naïvement à la partie tangentielle du champ  $\gamma$  perpendiculaire à l'aimantation, donc pour la phase  $\langle \rangle_1$  c'est le champ  $\gamma_2$ . C'est ce champ qui a pour propagateur effectif à longue distance la transformée de Fourier  $\int d^{(d+1)p} \frac{\rho_J(p)}{p^2} e^{ip(x-y)}$ , où  $\rho_J$  est le cutoff ultraviolet\*. On doit donc finalement démontrer que

$$\langle \gamma_2(x)\gamma_2(y) \rangle_1 \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\text{const}}{|x-y|^{d-1}} \quad (\text{III.10})$$

On pourrait croire que la fonction à deux points dans la direction d'aimantation,  $\langle \gamma_1(x)\gamma_1(y) \rangle_1$  reste massive, donc à décroissance rapide à cause de la courbure radiale non nulle au fond du "chapeau mexicain". Il n'en est rien car les vertex effectifs de type  $\gamma_1\gamma_2^2$  ne sont pas, eux, protégés par des identités de Ward. La décroissance de la fonction à deux points dans la direction radiale est donc limitée par des termes à deux propagateurs intermédiaires tangentiels. Donc on doit avoir, dans des unités convenables

$$\langle \gamma_1(x)\gamma_1(y) \rangle_1 \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\text{const}}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (\text{III.11})$$

La démonstration des comportements (III.10-11) est donc l'objectif de notre programme. La présentation très brève ci-dessus ne doit pas toutefois occulter l'existence de

---

\* On a dans ce qui suit choisi pour simplifier des unités convenables afin de faire disparaître l'anisotropie et les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  dans (II.20).

difficultés techniques assez importantes pour le contrôle de ce troisième régime. En particulier comme le terme de brisure  $R$  (II.16) tend vers 0, dans l'analyse multi-échelles il n'est pas possible de se repérer dès le départ par rapport à la direction finale d'aimantation. Il faut, pour les fluctuations successives du champ  $\gamma$  que le groupe de renormalisation définit, introduire un repère local, qui coorespond à une "aimantation moyenne locale". Celle-ci ne coïncide avec la direction finale d'aimantation  $\sigma^1$  qu'à la fin de l'analyse (ou, si l'on veut, pour les dernières tranches de fluctuation). D'autre part le modèle en chapeau mexicain n'est pas exactement semblable au modèle "sigma non-linéaire" des rotateurs, et le cas où le module  $|\gamma| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$  du champ n'est pas très proche du fond de la gouttière, bien que donnant de petites contributions, doit être traité. Le développement de cluster multi-échelles est donc compliqué par des conditions dites de "petits champs/grands champs" [R] et par l'utilisation d'un repère local. De telles complications techniques, liées au caractère non-trivial du vide ou à l'existence de symétries, sont semblent-il inévitables et ont leurs analogues dans d'autres contextes comme par exemple la brisure (plus simple) de la symétrie discrète  $\mathbb{Z}_2$  dans le modèle  $\phi^4$  [GJ] ou la théorie de Gross-Neveu à deux dimensions [KMR], ou bien l'étude de la limite ultraviolette des théories de jauge non-Abéliennes à quatre dimensions [MRS].

#### IV. Conclusion

Pour nous résumer, dans chacun des trois régimes considérés ci-dessus il existe un développement contrôlable à l'aide d'un petit paramètre autour d'un modèle exact. Dans le premier régime le petit paramètre est  $\lambda$  et le développement est fait autour du gas de Fermi. Dans le second régime le paramètre  $\lambda_0$  effectif a cessé d'être petit, mais pour la partie dangereuse correspondante un nouveau paramètre petit est apparu, à savoir  $1/N \simeq \text{const } e^{\frac{-\text{const}}{\lambda}}$ . Ce paramètre contrôle le développement autour d'un nouveau modèle exact, qui correspond à une resommation explicite des graphes de "ladder" les plus divergents, donc à certaines "chaînes de bulles" de la théorie initiale. (Ce modèle est exact parce que ces chaînes forment des séries géométriques explicitement calculables, ou, si l'on préfère, parce que le résultat est quadratique dans le champ intermédiaire.) Enfin dans le troisième régime le petit paramètre  $1/N$  n'est plus indispensable, et c'est le caractère superrenormalisable de

la théorie dû aux identités de Ward qui fournit des auto-couplages de plus en plus petits à longue distance pour le boson de Goldstone. On peut dire que le développement se fait alors autour de la même théorie que dans le régime 2, mais considérée comme une théorie bosonique libre de masse nulle. Si l'on préfère, on peut aussi considérer les régimes 2 et 3 comme un seul régime, et dire que les constantes de couplages du boson  $\gamma$ , petites au départ à cause du paramètre  $1/N$ , le restent ensuite à plus longue distance grâce aux identités de Ward qui rendent la théorie superrenormalisable.

Les régimes 2 et 3 ci-dessus peuvent être traités indépendamment du régime 1 pour n'importe quelle dimension  $d \geq 2$ , et les comportements (III.10-11) doivent pouvoir se démontrer dans ce cas, la démonstration étant même un peu plus facile pour  $d = 3$  que pour  $d = 2$  puisque le problème infrarouge est alors plus facile (comparer (III.11) pour  $d = 2$  et  $d = 3$ ; au delà de  $d = 3$  le propagateur (III.11) devient même sommable, donc semblable à un propagateur massif pour le comptage de puissance). C'est à cette démonstration que nous consacrons actuellement l'essentiel de nos efforts.

Ce n'est toutefois que pour  $d = 2$  qu'en combinant ces résultats au contrôle du premier régime nous pouvons envisager une démonstration complète des comportements (III.10-11) pour les fonctions *fermioniques* correspondantes du modèle microscopique de départ (II.20).

## Références

- [B] T. Balaban, A Low Temperature Expansion for Classical N-Vector models. I.A Renormalization Group Flow, preprint Boston University 1993.
- [BG] G. Benfatto and G. Gallavotti, "Perturbation Theory of the Fermi Surface in a Quantum Liquid. A General Quasiparticle Formalism and One-Dimensional Systems". Journal of Statistical Physics **59**, 541-664 (1990);
- [FKLT] J. Feldman, H. Knörrer, D. Lehmann and E. Trubowitz, preprint ETH Zürich

- [FMRT1] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz. An Infinite Volume Expansion for Many Fermion Green's functions. *Helv. Phys. Acta.* **65** 679-721 (1992)
- [FMRT2] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz. "Two dimensional Many Fermion Systems as Vector Models. *Europhys. Letters* 24, 521 (1993).
- [FMRT3] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz. "An Intrinsic  $1/N$  Expansion for Many Fermion Systems". *Europhys. Lett.* 24, 437 (1993).
- [FMRT4] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau and E. Trubowitz. Ward Identities and a Perturbative Analysis of a  $U(1)$  Goldstone Boson in a Many Fermion System, *Helv. Phys. Acta* **66**, 498 (1993).
- [FSS] J. Fröhlich, B. Simon and T. Spencer. Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking, *Commun. Math. Phys.* 50 79 (1976).
- [FT1] J. Feldman and E. Trubowitz. "Perturbation theory for Many Fermion Systems, *Helvetica Physica Acta.* **63** 156-260 (1990).
- [FT2] J. Feldman and E. Trubowitz. "The flow of an Electron-Phonon system to the Superconducting State", *Helvetica Physica Acta.* **64** 213-357 (1991).
- [GJS] J. Glimm, A. Jaffe and T. Spencer. Phase Transitions for  $\phi_2^4$  quantum fields, *Commun. Math. Phys.* 45, 203 (1975)
- [KMR] C. Kopper, J. Magnen and V. Rivasseau. Mass Generation in the Large  $N$  Gross-Neveu Model, avec C. Kopper et J. Magnen, preprint Ecole Polytechnique, (1993). to appear in *Commun. Math. Phys.*
- [M] D.C. Mattis. *The Many Body Problem*. 1993. World Scientific.
- [MRS] J. Magnen, V. Rivasseau et R. Sénéor. Construction of  $YM_4$  with an infrared cutoff. *Commun. Math. Phys.* (1993).
- [R] V. Rivasseau. Cluster expansions with small/large field conditions, Cours à l'Ecole d'été de Vancouver et preprint Ecole Polytechnique (1993).